Egzamin z TCiWdTD dn. 9.02.2016

....

Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Sformułować twierdzenie o różniczkowaniu splotu.

b) (za 5 pkt.)
Niech $f_1(t) = f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot 1_+(t)$. Wyznaczyć $(f_1 * f_2)'(t)$.

Zad. 2. (za 10 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać równanie

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-t} \text{ dla } t > 0, \text{ z warunkami } y\left(0^+\right) = y'\left(0^+\right) = y''\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 3. a) (za 7 pkt.)
Pokazać, że w przestrzeni dystrybucji temperowanych zachodzi wzór

$$\mathcal{F}[\cos t](\omega) = \pi[\delta(\omega - 1) + \delta(\omega + 1)].$$

b) (za 3 pkt.)
Sformułować wzór sumacyjny Poissona.

Zad. 4. a) (za 7 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = |x - 2| + 1_+(x).$$

b) (za 3 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o transformacie Laplace'a pochodnej dystrybucji.

Zad. 5. a) (za 7 pkt)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = n^2, \text{ gdzie } x_0 = 0,\ x_1 = 0.$$

b) (za 3 pkt.)
Sformułować twierdzenie o splocie dla $Z-$transformaty.

Zad. 6. a) (za 5 pkt.)
Niech $\widetilde{f}_\nu(p)$ będzie nieskończoną transformatą Hankela funkcji $f(x)$, zaś $\widetilde{g}_\nu(p)$ nieskończoną transformatą Hankela funkcji $g(x)$. Pokazać, że

$$\int_0^{+\infty} x f(x) g(x)\, dx = \int_0^{+\infty} p \widetilde{f}_\nu(p) \widetilde{g}_\nu(p)\, dp.$$

b) (za 5 pkt.)
Niech $\mathcal{H}_\nu\{f(r)\}(p) = \widetilde{f}_\nu(p)$ oznacza nieskończoną transformatę Hankela funkcji $f(r)$ w punkcie p. Pokazać, że dla $a > 0$ zachodzi wzór

$$\mathcal{H}_\nu\{f(ar)\}(p) = \frac{1}{a^2} \widetilde{f}_\nu\left(\frac{p}{a}\right) \text{ (twierdzenie o podobieństwie).}$$