

# Transformaty całkowe i wstęp do teorii dystrybucji

14 grudnia 2013

# Rozdział 1

## Funkcje specjalne Eulera

### 1.1 Funkcja Gamma

Definicja 1.1.1

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$$

#### 1.1.1 Analiza zbieżności

Zauważmy, że:

$$t^z = e^{z \ln t} = e^{(Re z + i Im z) \ln t} = e^{Re z \cdot \ln t} \cdot \underbrace{e^{i Im z \cdot \ln t}}_{e^{i\alpha}}, \quad |e^{i\alpha}| = 1.$$

Zatem o zbieżności całki decyduje tylko jej część rzeczywista:  $e^{Re z \ln t}$ . Całka postaci:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^m dt$$

jest zbieżna dla  $m > -1$ .

Jeśli  $Re z \leq 0$ , to całka definiująca  $\Gamma(z)$  może być rozbieżna.

Wiemy,

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \quad \text{jest zbieżna} \Leftrightarrow \alpha < 1$$

Definicja jest poprawna dla  $\underline{Re z > 0}$

**Twierdzenie 1.1.1**  $\Gamma(z)$  jest funkcją holomorficzną dla  $Re z > 0$ .

**Dowód**

1. Niech  $F_n(z) := \int_{\frac{1}{n}}^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ .

Pokażemy, że  $F_n$  są holomorficzne.

Całkę można różniczkować względem parametru, kiedy całka jest zbieżna jednostajnie względem parametru.

$F_n(z)$  - całka zbieżna jednostajnie względem  $z$ .

Zbadajmy różniczkowalność w punkcie. W tym celu badamy otoczenie  $z$ .

Rozważmy pas  $\{z : \delta < \operatorname{Re} z < A\}$ .

$$|e^{-t}t^{z-1}| \leq \varphi(t) = \begin{cases} e^{-t}t^{A-1} & 1 < t, \\ e^{-t}t^{\delta-1} & 0 < t < 1, \end{cases}$$

Czyli mamy oszacowanie niezależne od  $z$ , więc  $F_n$  jest holomorficzną.

2. Z twierdzenia Weierstrassa ciąg funkcji holomorficzných zbieżny jednostajnie na każdym zbiorze zwartym jest zbieżny do funkcji holomorficznęj.

Na dowolnym zbiorze zwartym  $K \subset \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$

$$F_n \rightrightarrows \Gamma$$

Zbiór  $K$  jako zwarty jest domknięty i ograniczony

$$|\Gamma(z) - F_n(z)| = \left| \int_0^{\frac{1}{n}} e^{-t}t^{z-1} dt \right| \leq \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi(t)| dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

bo  $\varphi$  - całkowna i długość przedziału  $\rightarrow 0$

Stąd wynika, że  $\Gamma$  jest holomorficzną. □

Spróbujmy teraz rozszerzyć funkcję  $\Gamma$  poza rozważaną półpłaszczyznę.

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} (e^{-t} + 0)t^{z-1} dt = \\ &= \left( e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \right) \\ &= \int_0^{\infty} \left( e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k}{k!} \right) t^{z-1} dt + \int_0^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k}{k!} \right) t^{z-1} dt = \\ &= \int_0^1 \left( e^{-t} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k}{k!} \right) t^{z-1} dt + \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^k}{k!} \right) t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1} dt = \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \right) t^{z-1} dt + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \left[ \frac{1}{k+z} t^{k+z} \right]_0^1 + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1} dt = \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \right) t^{z-1} dt + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+z} + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1} dt \end{aligned}$$

$$\Gamma(z) - \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{k+z}}_* = \int_0^1 \left( \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} \right) t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} e^{-t}t^{z-1} dt =: \varphi(z)$$

$\varphi(z)$  - holomorficzną dla  $\operatorname{Re} z > -(n+1)$   
 $z = -k$  - biegun pierwszego rzędu (bo  $\dots \frac{1}{z+k}$ )

$$\operatorname{Res}_{z=-k}\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!} \quad \text{bo } \operatorname{Res}\Gamma = \operatorname{Res}*$$

**Wniosek 1.1.1**  $\Gamma(z)$  posiada bieguny rzędu 1 w punktach  $z = -k$ , ( $k = 0, 1, \dots$ )

$$\operatorname{Res}_{z=-k}\Gamma(z) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

### 1.1.2 Własności

**Wzór 1.1.1 (Uogólnienie silni)**  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

**Dowód**

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt, \quad \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

Pokażemy prawdziwość dla  $\operatorname{Re} z > 0$ , dalej korzystając z rozszerzenia.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{z} t^z\right)' dt = \underbrace{e^{-t} \cdot \frac{1}{z} t^z \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{1}{z} t^z dt = \frac{1}{z} \Gamma(z+1)$$

□

**Wniosek 1.1.2**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

*Funkcja  $\Gamma$  stanowi uogólnienie silni.*

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^0 dt = 1$$

*Uzasadnienie  $0! = \Gamma(1) = 1$*

**Przykład 1.1.1**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \left(\begin{array}{l} t = u^2 \\ dt = 2u du \end{array}\right) = \int_0^{\infty} e^{-u^2} \frac{1}{u} 2u du = \sqrt{\pi}$$

**Wzór 1.1.2 (Związek funkcji  $\Gamma$  z sinusem)**

$$\Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

**Dowód** na ćwiczeniach / w domu

□

**Wniosek 1.1.3** *Funkcja  $\Gamma$  nie ma zer w płaszczyźnie zespolonej.*

**Dowód** Przypuśćmy, że  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\Gamma(z) = 0$ . Wtedy:

$$\Gamma(1-z) = z_1 \in \mathbb{C}$$

$$0 \cdot z_1 = 0 \neq \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

$$\Gamma(1-z) = \infty$$

Więc w punkcie  $1-z$  ma punkt osobliwy.

$$0 \cdot \infty \Rightarrow 1-z \in \mathbb{Z} \quad (1-z = -k) \Rightarrow z \in \mathbb{N} \Rightarrow \Gamma(z) \neq 0,$$

bo  $\Gamma(n) = (n-1)!$  □

**Wzór 1.1.3 (Wzór na  $\Gamma(2z)$ )**

$$2^{2z-1}\Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z)$$

## 1.2 Funkcja Beta

**Definicja 1.2.1 (Funkcja beta)**

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \quad \text{Re } x > 0, \text{ Re } y > 0 \quad x, y \in \mathbb{C}$$

### 1.2.1 Własności

**Twierdzenie 1.2.1** *Zachodzą następujące związki:*

1.  $B(x, y) = B(y, x)$
2.  $B(x, y) = \frac{y-1}{x+y-1} B(x, y-1)$
3.  $B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$
4.  $B(x, x) = \frac{1}{2^{2x-1}} B\left(\frac{1}{2}, x\right)$
5.  $B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt$
6. **Związek z funkcją  $\Gamma$**   
 $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

**Dowód (5.)**

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt = \left( \begin{array}{l} t = \frac{u}{u+1} \\ dt = \frac{1}{(u+1)^2} du \end{array} \right) = \\ &= \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{u+1}\right)^{x-1} \left(1 - \frac{u}{u+1}\right)^{y-1} \frac{1}{(u+1)^2} du = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(u+1)^{x+y}} du \end{aligned}$$

□

**Dowód (6.)**

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x+y) &\stackrel{df}{=} \int_0^\infty e^{-t} t^{x+y-1} dt = \left( \begin{array}{l} t = (1+u)r \\ dt = (1+u)dr \\ u\text{-parametr} \end{array} \right) = \\
 &= \int_0^\infty e^{-(1+u)r} (1+u)^{x+y-1} r^{x+y-1} (1+u) dr = \\
 &= (1+u)^{x+y} \int_0^\infty e^{-(1+u)r} r^{x+y-1} dr \quad \Big| \cdot \frac{1}{\Gamma(x+y) \cdot (1+u)^{x+y}} \\
 \\ 
 \frac{1}{(1+u)^{x+y}} &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-(1+u)r} r^{x+y-1} dr,
 \end{aligned}$$

podstawiamy do 5.

$$\begin{aligned}
 B(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty u^{x-1} du \int_0^\infty e^{-(1+u)r} r^{x+y-1} dr = \\
 &\quad \text{(można bo całka zbieżna bezwzględnie)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^\infty e^{-r} r^{x+y-1} dr \int_0^\infty e^{-ur} u^{x-1} du = \\
 &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-r} r^{y-1} dr}_{\Gamma(y)} \underbrace{\int_0^\infty e^{-ur} (ru)^{x-1} d(ru)}_{\Gamma(x)}
 \end{aligned}$$

□

**Dowód (2.)**

$$\begin{aligned}
 B(x,y) &= \frac{y-1}{x+y-1} B(x,y-1) = \\
 &= \frac{y-1}{x+y-1} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y-1)}{\Gamma(x+y-1)} \stackrel{w1.1}{=} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}
 \end{aligned}$$

□

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N} \quad B(x,n) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(n)}{\Gamma(x+n)} = \frac{\Gamma(x)(n-1)!}{(x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x)} = \\
 &= \frac{(n-1)!}{(x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x}
 \end{aligned}$$

## 1.2.2 Związek ze stałą Eulera

**Definicja 1.2.2 (Stała Eulera)**

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right)$$

**Dowód (istnienia granicy (szkic))**

$$\begin{aligned}
 u_n &:= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \\
 v_n &:= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \\
 \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n &> v_n
 \end{aligned}$$

$u_n$  - ciąg malejący.

$v_n$  - ciąg rosnący.

$$u_n - v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Więc

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = c \approx 0.57721 \dots$$

□

**Twierdzenie 1.2.2 (Wzór Gaussa dla funkcji  $\Gamma$ )**

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^x \cdot n!) \cdot \frac{1}{x(x+1) \dots (x+n)}$$

określony dla  $x \in \mathbb{R}$  ale rozszerzymy.

**Uwaga!** korzystamy ze wzoru (z definicji pochodnej):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - u^{\frac{1}{n}}) = \ln \frac{1}{u}$$

**Dowód**

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &\stackrel{df}{=} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = \left( \begin{array}{l} e^{-t} = u \\ -e^{-t} dt = du \end{array} \right) = \\ &= \int_1^0 -(\ln \frac{1}{u})^{x-1} du = \int_0^1 (\ln \frac{1}{u})^{x-1} du = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{x-1} \int_0^1 \left(1 - u^{\frac{1}{n}}\right)^{x-1} du = \left( \begin{array}{l} u = y^n \\ du = ny^{n-1} dy \end{array} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{x-1} \cdot n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^{n-1} dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^x B(x, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^x \cdot \frac{(n-1)!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \cdot 1 = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x (n-1)!}{x(x+1) \dots (x+n-1)} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x+n}}_{=1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x (n)!}{x(x+1) \dots (x+n)} \end{aligned}$$

□

**Wniosek 1.2.1**

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x (n)!}{x(x+1) \dots (x+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \frac{(1+\frac{1}{1})^x (1+\frac{1}{2})^x \dots (1+\frac{1}{n-1})^x}{(\frac{x}{1}+1)(\frac{x}{2}+1) \dots (\frac{x}{n}+1)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)^x \cdot \frac{1}{(1+\frac{x}{k})} = \\ &= \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{k})^x}{(1+\frac{x}{k})} \end{aligned}$$

(inny zapis wzoru Gaussa)

**Wzór 1.2.1**

$$e^c = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

**Wzór 1.2.2 (Wzór Weierstrassa)**

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = e^{Cx} x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

**Dowód** Zauważmy, że:

$$e^{Cx} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x},$$

oraz:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}.$$

Stąd:

$$\Gamma(x) \cdot e^{Cx} = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1 + \frac{x}{n}}.$$

□

**Wzór 1.2.3**

$$\Gamma'(1) = -C.$$

**Dowód** Zlogarytmujmy funkcję korzystając ze wzoru Weierstrassa:

$$-\ln \Gamma(x) = Cx + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right).$$

$$\ln \Gamma(x) = -Cx - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n} \right).$$

Zróżniczkujmy obie strony:

$$\begin{aligned} (\ln \Gamma(x))' &= C - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = -C - \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{x+n} - \frac{1}{n} \right) = \\ &= -C - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(x+n)}. \end{aligned}$$

Wstawmy teraz  $x = 1$ :

$$(\ln \Gamma(x))' \Big|_{x=1} = -C - 1 + 1.$$

Zważywszy na to, że:

$$(\ln \Gamma(x))' = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

dostajemy:

$$\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -C \Rightarrow \Gamma'(1) = -C \cdot \Gamma(1) = -C.$$

□



## Rozdział 2

# Szeregi Fouriera

**Uwaga 2.0.1** Będziemy używali następującego oznaczenia:

$$f(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x),$$

$$f(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x).$$

## 2.1 Pomocnicze lematy o zbieżności pewnych całek

### 2.1.1 Lemat Riemanna-Lebesgue'a

**Lemat 2.1.1 (Lemat Riemanna-Lebesgue'a)** Jeżeli  $g(t)$  dla  $t \in \mathcal{R}$ , jest bezwzględnie całkowalna, to:

1.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \sin ptdt = 0$$

2.

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^b g(t) \cos ptdt = 0$$

**Dowód** (dla przypadku 1.)

Wybermy  $\varepsilon > 0$ .

Podzielmy przedział  $[a, b]$  na przedziały:  $[t_{i-1}, t_i]$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ , gdzie  $t_0 = a$  oraz  $t_n = b$ .

Wprowadźmy oznaczenia:

$$m_i = \inf_{\langle t_{i-1}, t_i \rangle} g(t),$$

$$M_i = \sup_{\langle t_{i-1}, t_i \rangle} g(t),$$

dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Wtedy:

$$\int_a^b g(t) \sin ptdt = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} g(t) \sin ptdt = \sum_{i=1}^n m_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin ptdt + \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [g(t) - m_i] \sin ptdt.$$

Możemy dobrać taki podział odcinka  $[a, b]$ , aby:

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [g(t) - m_i] \sin pt dt \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |M_i - m_i| |\sin pt| dt \leq \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta t_i \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Zauważmy, że:

$$\left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin pt dt \right| = \left| \left( -\frac{1}{p} \cos pt \right) \Big|_{t_{i-1}}^{t_i} \right| \leq \frac{2}{p}.$$

Zatem

$$\sum_{i=1}^n m_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin pt dt \leq \frac{2}{p} \sum_{i=1}^n |m_i|.$$

Stąd  $\exists p$  takie, że

$$\sum_{i=1}^n m_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sin pt dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd ostatecznie:

$$\int_a^b g(t) \sin pt dt \leq \varepsilon.$$

Z dowolności  $\varepsilon$  otrzymujemy tezę. □

## 2.1.2 Całka Dirichleta

Przy dowodzie tego twierdzenia będziemy potrzebowali następującego faktu z analizy:

**Twierdzenie 2.1.1 (II twierdzenie o wartości średniej)** Niech  $f$  będzie funkcją monotoniczną, a  $g$  całkowną. Wtedy  $\exists \xi \in (a, b)$ , że zachodzi wzór:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a^+) \int_a^\xi g(x)dx + f(b^-) \int_\xi^b g(x)dx.$$

**Lemat 2.1.2 (Całka Dirichleta)** Jeżeli  $g(t)$  jest rosnąca i ograniczona na przedziale  $[0, h]$ , gdzie  $h > 0$ , to zachodzi wzór:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^h g(t) \frac{\sin pt}{t} dt = \frac{\pi}{2} g(0^+).$$

**Dowód**

$$\int_0^h g(t) \frac{\sin pt}{t} dt = g(0^+) \int_0^h \frac{\sin pt}{t} dt + \int_0^h [g(t) - g(0^+)] \frac{\sin pt}{t} dt.$$

Zauważmy, że:

$$\int_0^h \frac{\sin pt dt}{t} = \left| \begin{array}{l} x = pt \\ dx = pdt \end{array} \right| = \int_0^{ph} \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Wybierzmy teraz  $\varepsilon > 0$ .

Weźmy pewne  $\delta > 0$  i rozdzielmy przedział całkowania:

$$\int_0^h [g(t) - g(0^+)] \frac{\sin pt}{t} dt = \underbrace{\int_0^{\delta} [g(t) - g(0^+)] \frac{\sin pt}{t} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{\delta}^h [g(t) - g(0^+)] \frac{\sin pt}{t} dt}_{I_2}.$$

Korzystając z II twierdzenia o wartości średniej dostajemy:

$$I_1 = [g(0^+) - g(0^+)] \int_0^{\xi} \frac{\sin pt}{t} dt + [g(\delta^-) - g(0^+)] \int_{\xi}^{\delta} \frac{\sin pt}{t} dt = \left| \begin{array}{l} pt = x \\ pdt = dx \end{array} \right| = [g(\delta^-) - g(0^+)] \int_{p\xi}^{p\delta} \frac{\sin x}{x}.$$

$$\exists_L \forall_{p, \xi, \delta} \left| \int_{\xi}^{\delta} \frac{\sin pt}{t} dt \right| \leq L.$$

Zatem dla dostatecznie małych  $\delta$ :

$$|I_1| \leq [g(\delta^-) - g(0^+)] \cdot L < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zauważmy, że na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a:

$$\int_{\delta}^h [g(t) - g(0^+)] \frac{\sin pt}{t} dt \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

Zatem przy odpowiednio dużym  $p$ :

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ostatecznie więc:

$$\int_0^h [g(t) - g(0^+)] \frac{\sin pt}{t} dt \leq |I_1| + |I_2| < \varepsilon.$$

Z dowolności  $\varepsilon$  otrzymujemy tezę. □

**Uwaga 2.1.1** Teza powyższego twierdzenia pozostaje prawdziwa dla funkcji, która jest różnicą dwóch funkcji rosnących.

## 2.2 Szeregi Fouriera

**Lemat 2.2.1** Dla każdego  $n \in \mathbb{N}, n > 0$  zachodzi wzór:

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u - x_0) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(u - x_0)}{2 \sin \frac{u - x_0}{2}}.$$

**Dowód** (Indukcja po  $n$ )

Dowód przeprowadzony na ćwiczeniach. □

## 2.2.1 Konstrukcja szeregu Fouriera

**Twierdzenie 2.2.1** Niech będzie dana okresowa funkcja  $f$  o okresie  $2\pi$ . Zakładamy także, że  $f$  jest różnicą dwóch funkcji rosnących. Wtedy:

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)].$$

gdzie:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx,$$

dla  $m = 0, 1, \dots$

oraz

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx,$$

dla  $m = 1, 2, \dots$

**Dowód**

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx_0 + b_m \sin mx_0) = (*)$$

Wstawmy wzory na współczynniki szeregu:

$$(*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \sum_{m=1}^n \left( \frac{\cos mx_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos mudu + \frac{\sin mx_0}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin mudu \right) = (*)$$

Skorzystamy ze wzoru trygonometrycznego:  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$$(*) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) du + \sum_{m=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos m(u - x_0) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u - x_0) \right\} du = (*)$$

Korzystamy z okresowości funkcji  $f$ , funkcji trygonometrycznych i lematu:

$$(*) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(u - x_0)}{2 \sin \frac{u - x_0}{2}} du = \frac{1}{\pi} \int_{x_0 - \pi}^{x_0 + \pi} f(u) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(u - x_0)}{2 \sin \frac{u - x_0}{2}} du = \left| \begin{array}{l} u - x_0 = t \\ du = dt \end{array} \right| = (*)$$

Rozbijamy przedział całkowania:

$$(*) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 f(x_0 + t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt + \int_0^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right) = (*)$$

Zmieniamy zmienną, aby mieć takie same całki:

$$(*) = \left| \begin{array}{l} t = -z \\ dt = -dz \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} f(x_0 - z) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})z}{2 \sin \frac{z}{2}} dz + \int_0^{\pi} f(x_0 + t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \right) = (*)$$

Korzystamy z II tw. o wartości średniej, całki Dirichleta i faktu, że:

$$h(t) = \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}$$

jest funkcją rosnącą:

$$(*) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0+t) + f(x_0-t)] \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [f(x_0^+) + f(x_0^-)].$$

□

## 2.2.2 Zbieżność do funkcji

**Twierdzenie 2.2.2 (Warunki Dirichleta)** *Jeżeli:*

1.  $f$  jest różnicą dwóch funkcji rosnących,
2. W każdym punkcie nieciągłości  $x_0$  zachodzi:  $f(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$ .
3.  $f(\pi) = f(-\pi) = \frac{1}{2}[f(\pi^-) + f(-\pi^+)]$ ,

to  $\forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle$   $f(x)$  jest sumą swojego szeregu Fouriera.

## 2.2.3 Szereg Fouriera dla liczb zespolonych

Pamiętając, że:

$$\cos mz = \frac{1}{2} (e^{imz} + e^{-imz}),$$

oraz

$$\sin mz = \frac{1}{2i} (e^{imz} - e^{-imz}),$$

możemy definiować szereg Fouriera dla liczb zespolonych wzorem:

$$S(z) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mz + b_m \sin mz) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m e^{imz} + d_m e^{-imz}).$$

Oznaczmy  $e^{iz} = \xi$ . Otrzymujemy szereg Laurenta

$$S(z) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m \xi^m + d_m \xi^{-m}).$$

Szereg Laurenta jest zbieżny, gdy:

$$r < |\xi| < R$$

Skoro

$$\xi = e^{iz} = e^{ix-y},$$

to

$$|e^{iz}| = |e^{ix-y}| = |e^{ix}| |e^{-y}| = e^{-y}.$$

Więc

$$e^{-y} \in (r, R).$$

A zatem ostatecznie:

$$Imz \in (-\ln R, -\ln r).$$

Zatem szereg jest zbieżny dla  $z \in \mathbb{C}$  takich, że  $Imz \in (-\ln R, -\ln r)$ , czyli w pewnym pasie równoległym do osi rzeczywistej.

## Rozdział 3

# Transformata Fouriera

### 3.1 Wzór całkowy Fouriera, definicja transformaty Fouriera

#### 3.1.1 Wzór w postaci zespolonej

Niech  $g(x)$  będzie funkcją określoną na przedziale  $[-\frac{l}{2}; \frac{l}{2}]$ , gdzie  $l > 0$ . Załóżmy, że funkcja  $g$  jest rozwijalna w szereg Fouriera. Zatem:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos y_n x + b_n \sin y_n x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iy_n x}, \quad (3.1)$$

gdzie:

$$\begin{cases} y_n = \frac{2n\pi}{l} & , \forall n \in \mathbb{Z} \\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & , n \geq 0 \\ c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & , n < 0. \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$  współczynniki  $c_n$  mogą być określone wzorem:

$$c_n = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} g(\xi) e^{-iy_n \xi} d\xi, \quad (3.2)$$

Równanie 3.2 wstawmy do równania 3.1.

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iy_n x} \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} g(\xi) e^{-iy_n \xi} d\xi = (*).$$

Zauważmy, że:  $y_n - y_{n-1} = \frac{2\pi}{l}$ . Oznaczmy zatem  $y_n - y_{n-1} = \Delta y_n$ .

Stąd oczywiście:  $\frac{1}{l} = \frac{\Delta y_n}{2\pi}$

$$(*) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iy_n x} \Delta y_n \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} g(\xi) e^{-iy_n \xi} d\xi = (*).$$

Otrzymaliśmy sumę Riemanna, którą w granicy zamieniamy na całkę Riemanna. Możemy przejść z  $l$  do nieskończoności i wtedy całka wewnętrzna będzie po całym  $\mathbb{R}$ .

$$(*) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-iy\xi} d\xi.$$

W ten sposób otrzymujemy:

**Wzór 3.1.1 (Wzór całkowy Fouriera w postaci zespolonej)**

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-iy\xi} d\xi.$$

### 3.1.2 Wzór w postaci rzeczywistej

**Wzór ogólny**

Dokonajmy teraz prostej modyfikacji powyższego wzoru.

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{iy(x-\xi)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) [\cos y(x-\xi) + i \sin y(x-\xi)] d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \cos y(x-\xi) d\xi, \end{aligned}$$

gdzie ostatnia równość wynika z nieparzystości sinusa.

Otrzymaliśmy:

**Wzór 3.1.2 (Wzór całkowy Fouriera w postaci rzeczywistej)**

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \cos y(x-\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) (\cos(yx) \cos(y\xi) + \sin(yx) \sin(y\xi)) d\xi.$$

**Wzory uproszczone w pewnych szczególnych przypadkach**

Dla  $g(x)$  parzystej  $h_C(x) = g(x) \cos x$  jest parzysta a  $h_S(x) = g(x) \sin x$  jest nieparzysta. Natomiast dla  $g(x)$  nieparzystej  $h_C(x) = g(x) \cos x$  jest nieparzysta a  $h_S(x) = g(x) \sin x$  jest parzysta. Stąd wobec całkowania po przedziale symetrycznym względem zera, otrzymujemy następujące wzory uproszczone.

**Wzór 3.1.3 (Wzór całkowy Fouriera dla funkcji  $g$ -parzystej)**

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \cos y(x-\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \cos(yx) \cos(y\xi) d\xi.$$

**Wzór 3.1.4 (Wzór całkowy Fouriera dla funkcji  $g$ -nieparzystej)**

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \cos y(x-\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \sin(yx) \sin(y\xi) d\xi.$$

### 3.1.3 Transformaty sinusowe i cosinusowe

**Definicja 3.1.1** *Transformatą cosinusową  $g(x)$  nazywamy przekształcenie:*

$$G_c(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \cos(y\xi) d\xi.$$

Odwrotną transformatą cosinusową  $G_c(y)$  nazywamy przekształcenie:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_c(y) \cos(yx) dy.$$

Transformatą sinusową  $g(x)$  nazywamy przekształcenie:

$$G_s(y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \sin(y\xi) d\xi.$$

Odwrotną transformatą sinusową  $G_s(y)$  nazywamy przekształcenie:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_s(y) \sin(yx) dy.$$

## 3.2 Podstawowe twierdzenia dla transformat

### 3.2.1 Warunek dostateczny istnienia transformaty

**Twierdzenie 3.2.1** Jeżeli istnieje  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx$ , to  $\forall y \in \mathbb{R}$  funkcja  $G(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} g(\xi) d\xi$  istnieje i  $G(y)$  jest jednostajnie ciągła.

**Dowód**

- (określoność)

$$|G(y)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} g(\xi) d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iy\xi}| \cdot |g(\xi)| d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi)| d\xi < \infty.$$

- (jednostajna ciągłość)

Ustalmy  $\varepsilon > 0$  i weźmy pewną  $\delta > 0$  taką, że  $\delta$  nie zależy od  $y$ . Rozważmy następującą różnicę:

$$\begin{aligned} |G(y + \delta) - G(y)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(y+\delta)\xi} g(\xi) d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} g(\xi) d\xi \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} (e^{-i\delta\xi} - 1) g(\xi) d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iy\xi}| \cdot |e^{-i\delta\xi} - 1| |g(\xi)| d\xi = (*). \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

$$|e^{-i\delta\xi} - 1|^2 = |\cos(\delta\xi) - i \sin(\delta\xi) - 1|^2 = (\cos(\delta\xi) - 1)^2 + (\sin(\delta\xi))^2 = 2 - 2 \cos(\delta\xi) = 4 \sin^2 \left( \frac{\delta\xi}{2} \right).$$

Stąd:

$$(*) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin \left( \frac{\delta\xi}{2} \right) \right| |g(\xi)| d\xi = (*).$$



Rozbijmy tę całkę na przedziały, dobierając  $x_0$  w ten sposób, aby:

$$\int_{-\infty}^{-x_0} \left| \sin\left(\frac{\delta\xi}{2}\right) \right| \cdot |g(\xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{8},$$

oraz

$$\int_{x_0}^{\infty} \left| \sin\left(\frac{\delta\xi}{2}\right) \right| \cdot |g(\xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Wtedy:

$$\begin{aligned} (*) &= 2 \left( \int_{-\infty}^{-x_0} \left| \sin\left(\frac{\delta\xi}{2}\right) \right| \cdot |g(\xi)| d\xi + \int_{-x_0}^{x_0} \left| \sin\left(\frac{\delta\xi}{2}\right) \right| \cdot |g(\xi)| d\xi + \int_{x_0}^{\infty} \left| \sin\left(\frac{\delta\xi}{2}\right) \right| \cdot |g(\xi)| d\xi \right) < \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + 2 \int_{-x_0}^{x_0} \left| \sin\left(\frac{\delta\xi}{2}\right) \right| \cdot |g(\xi)| d\xi + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Zajmijmy się pozostałą całką:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-x_0}^{x_0} \left| \sin\left(\frac{\delta\xi}{2}\right) \right| \cdot |g(\xi)| d\xi &= 2 \int_{-x_0}^{x_0} \frac{|\delta\xi|}{2} \left| \frac{\sin\left(\frac{\delta\xi}{2}\right)}{\frac{\delta\xi}{2}} \right| \cdot |g(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \delta |x_0| \int_{-x_0}^{x_0} |g(\xi)| d\xi < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

dla dostatecznie małych  $\delta$ .

Stąd ostatecznie:

$$|G(y + \delta) - G(y)| < \varepsilon.$$

Wobec dowolności  $\varepsilon$  funkcja  $G(y)$  jest jednostajnie ciągła.

□

**Uwaga 3.2.1** Należy zwrócić uwagę, że założenie całkowalności funkcji  $g$  na całej osi rzeczywistej jest założeniem bardzo mocnym i znacznie zawężającym przestrzeń rozpatrywanych funkcji.

**Wniosek 3.2.1** Z powyższego twierdzenia wynika, że transformaty poprawiają klasę funkcji jako, że wyjściowo nie zakładaliśmy nic o ciągłości funkcji transformowanej.

### 3.2.2 Wartość główna całki niewłaściwej

**Definicja 3.2.1** Wartością główną całki niewłaściwej z funkcji  $f$  nazywamy:

$$V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Można rozważać również całki niewłaściwe z funkcji nieograniczonych.

**Przykład 3.2.1** (dla funkcji nieograniczonej)

$$V.P. \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = 0.$$

### 3.2.3 Twierdzenie o transformacie odwrotnej

**Twierdzenie 3.2.2 (O transformacie odwrotnej)** Jeżeli  $G(y) = \mathcal{F}[g](y)$  i  $g$  jest funkcją o wahaniu skończonym (różnicą dwóch funkcji rosnących) to zachodzi wzór:

$$\frac{g(x^+) + g(x^-)}{2} = V.P. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} G(y) dy.$$

**Dowód**

$$P = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R e^{iyx} dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} g(\xi) d\xi =$$

Łączymy wykładniki i zamieniamy kolejność całkowania:

$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy(x-\xi)} g(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \int_{-R}^R e^{iy(x-\xi)} dy =$$

Obliczamy całkę i korzystamy ze wzoru:  $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \left( -\frac{i}{x-\xi} e^{iy(x-\xi)} \right)_{y=-R}^{y=R} = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi \left( (-i) \frac{2i \sin(R(x-\xi))}{x-\xi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \frac{\sin(R(x-\xi))}{x-\xi} d\xi \end{aligned}$$

Rozbijamy przedział całkowania w punkcie  $x$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^x g(\xi) \frac{\sin(R(\xi-x))}{\xi-x} d\xi + \int_x^{\infty} g(\xi) \frac{\sin(R(\xi-x))}{\xi-x} d\xi \right) = \\ &= \left| \begin{array}{l} \xi - x = u \\ d\xi = du \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-\infty}^0 g(x+u) \frac{\sin(Ru)}{u} du + \int_0^{\infty} g(x+u) \frac{\sin(Ru)}{u} du \right) = \end{aligned}$$

Na mocy lematu Dirichleta

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} [g(x^-) + g(x^+)] = \frac{g(x^-) + g(x^+)}{2}.$$

□

## Rozdział 4

# Transformata Laplace'a

### 4.1 Wprowadzenie, definicja

Rozważmy funkcję  $f(t)$  rzeczywistą taką, że  $f(t) = 0$  dla  $t < 0$ .

**Definicja 4.1.1** *Transformatą Laplace'a funkcji  $f(t)$  nazywamy przekształcenie określone wzorem:*

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-iyt} \cdot e^{-xt} f(t) dt.$$

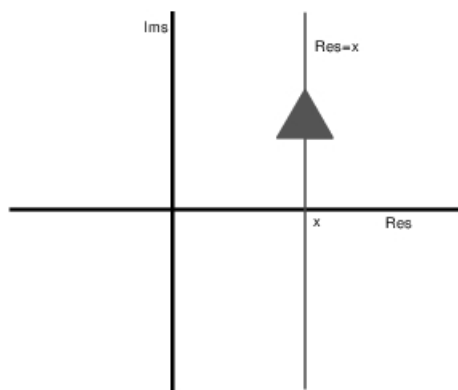
dla  $s = x + iy \in \mathbb{C}$ .

Zauważmy, że na podstawie twierdzenia z poprzedniego rozdziału:

$$f(t)e^{-xt} = V.P. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} dy \int_0^{\infty} e^{-su} f(u) du.$$

$$f(t) = V.P. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(x+iy)t} F(s) dy = \left| \begin{array}{l} s = x + iy \\ ds = idy \end{array} \right| = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s) ds.$$

**Uwaga 4.1.1** *Granice w ostatniej całce oznaczają całkowanie po prostej równoległej do osi  $Im s$  takiej, że  $Re s = x$ .*



**Definicja 4.1.2** Odwrotną transformatę Laplace'a nazywamy przekształcenie zdefiniowane wzorem:

$$f(t) = V.P. \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{st} F(s) ds.$$

## 4.2 Własności transformaty Laplace'a

### 4.2.1 Twierdzenie o zbieżności bezwzględnej

**Twierdzenie 4.2.1** Jeżeli  $F(s)$  jest zbieżna bezwzględnie dla  $s = s_0$ , to  $F(s)$  jest zbieżna bezwzględnie dla  $Re s \geq Re s_0$ .

**Dowód**

$$|e^{-st} f(t)| = |e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t)| \leq |e^{-s_0 t} f(t)|,$$

dla każdego  $t \geq 0$ . □

**Uwaga 4.2.1** Jeżeli  $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$ , gdzie  $\alpha > 0$ , to  $F(s)$  jest zbieżna bezwzględnie dla  $Re s > \alpha$ .

**Definicja 4.2.1** Funkcją Heaviside'a lub inaczej funkcją skoku jednostkowego nazywamy funkcję zdefiniowaną wzorem:

$$\mathbb{1}_+(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$

**Przykład 4.2.1**

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \mathbb{1}_+(t).$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{1+t^2} dt.$$

Weźmy teraz  $s$  takie, że  $Re s > 0$ . Wtedy powyższa całka będzie zbieżna bezwzględnie. Dla  $Re s < 0$  w sposób oczywisty będzie rozbieżna. Zajmijmy się więc przypadkiem, gdy  $Re s = 0$ . Wtedy  $s = iy$ . Dostajemy zatem:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-iyt}}{1+t^2} dt.$$

Ponieważ  $|e^{-iyt}| = 1$ , więc powyższe rozważania pokazują, że  $F(s)$  jest zbieżna bezwzględnie dla  $Re s \geq 0$ .

**Przykład 4.2.2**

$$f(t) = \mathbb{1}_+(t).$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt.$$

Tutaj łatwo zauważyć, że  $F(s)$  będzie zbieżna bezwzględnie dla  $Re s > 0$ .

**Wniosek 4.2.1** Obszar zbieżności bezwzględnej jest półpłaszczyzną  $Re s > \alpha$  lub  $Re s \geq \alpha$ .

## 4.2.2 Twierdzenie podstawowe o zbieżności transformaty Laplace'a

**Twierdzenie 4.2.2** Jeżeli  $F(s)$  jest zbieżna dla  $s = s_0$ , to jest zbieżna w półpłaszczyźnie  $Re s > Re s_0$ , w której można ją wyrazić przez całkę zbieżną bezwzględnie postaci:

$$(s - s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt,$$

gdzie

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau) d\tau.$$

**Dowód** Weźmy  $Re s > Re s_0$ . Wtedy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} e^{-st} f(t) dt &= \int_0^{\omega} e^{-(s-s_0)t} \underbrace{e^{-s_0t} f(t)}_{\varphi'(t)} dt = \int_0^{\omega} e^{-(s-s_0)t} \varphi'(t) dt = \\ &= e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) \Big|_{t=0}^{t=\omega} + (s-s_0) \int_0^{\omega} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt = \underbrace{e^{-(s-s_0)\omega} \varphi(\omega)}_{A(\omega)} - \underbrace{\varphi(0)}_0 + (s-s_0) \int_0^{\omega} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt = (*). \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} A(\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-(s-s_0)\omega} \varphi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-(s-s_0)\omega} \int_0^{\omega} e^{-s_0t} f(\tau) d\tau = F(s_0) \lim_{\omega \rightarrow \infty} e^{-(s-s_0)\omega} = 0, \end{aligned}$$

gdzie z założenia wiemy, że  $F(s_0)$  istnieje. Zatem:

$$(*) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} (s - s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt.$$

Wiemy, że  $\varphi(t)$  jest ograniczona, więc powyższa całka jest zbieżna bezwzględnie.  $\square$

**Uwaga 4.2.2** Obszarem zbieżności zwykłej całki Laplace'a jest półpłaszczyzna otwarta  $Re s > \alpha$ .

### Przykład 4.2.3

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} \mathbb{1}_+(t).$$

Tutaj oczywiście zbieżność jest na obszarze  $Re s \geq 0$ .

### Przykład 4.2.4

$$f(t) = \frac{1}{1+t} \mathbb{1}_+(t).$$

Dla  $Re s > 0$  mamy zbieżność. Rozpatrzmy  $Re s = 0$ , wtedy  $s = iy$ , a zatem:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-iyt}}{1+t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\cos(yt)}{1+t} dt - i \int_0^{\infty} \frac{\sin(yt)}{1+t} dt.$$

Powyższe całki są zbieżne dla  $y \neq 0$ , bo dla  $y = 0$  mamy:

$$F(s) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t} dt,$$

co w sposób oczywisty jest rozbieżne.

**Twierdzenie 4.2.3 (Kryterium Dirichleta)** Jeżeli funkcja  $f$  zbiega monotonicznie do 0 na  $(a, \infty)$ , oraz  $\left| \int_a^b g(x) dx \right| < L$ , gdzie  $L > 0$ ,  $a < b$ , to całka:

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx$$

jest zbieżna.

### 4.2.3 Twierdzenie o transformacie odwrotnej

**Twierdzenie 4.2.4 (O transformacie odwrotnej)** Niech  $\Omega$  będzie obszarem zbieżności  $F(s)$ . Jeżeli  $F(s)$  jest zbieżna bezwzględnie dla  $\operatorname{Re} s = \operatorname{Re} s_0$ , to zachodzi wzór:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \text{V.P.} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F(s)e^{st} ds.$$

Dla  $t = 0$  zachodzi wzór:

$$f(0^+) = \frac{1}{\pi i} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) ds,$$

gdzie prosta  $\operatorname{Re} s = x \subset \Omega$ .

#### Przykład 4.2.5

$$f(t) = \mathbb{1}_+(t).$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_0^\omega e^{-st} dt = \lim_{\omega \rightarrow \infty} -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^\omega = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{s} e^{-\omega s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}, \end{aligned}$$

dla  $\operatorname{Re} s > 0$ .

Policzmy dla przykładu transformatę odwrotną i sprawdźmy jej wartość w zerze:

$$F(s) = \frac{1}{s}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \text{V.P.} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{1}{s} ds &= \left| \begin{array}{l} s = iy + x \\ ds = idy \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x + iy} dy = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(x + iy)) \Big|_{y=-R}^{y=R} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} (\ln(x + iR) - \ln(x - iR)) = \frac{1}{2\pi i} i \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

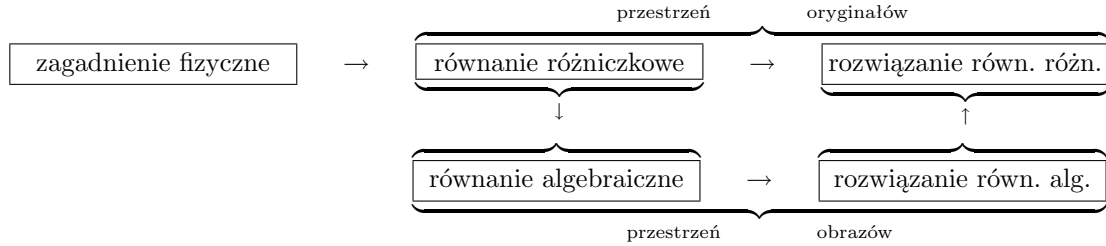
#### Przykład 4.2.6 Niech

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 \leq t \leq \ln \ln 3 \\ (-1)^n \exp\left(\frac{1}{2}e^t\right) & \text{dla } \ln \ln n \leq t \leq \ln \ln(n+1), n \geq 3 \end{cases}$$

Wykazać, że  $F(s)$  jest zbieżna, ale nigdzie nie jest zbieżna bezwzględnie.

### 4.3 Zastosowanie do równań różniczkowych

Transformatę całkową Laplace'a możemy użyć do rozwiązywania zagadnień z równań różniczkowych. Poniższy schemat przedstawia klasyczny i alternatywny sposób ich rozwiązywania.



**Twierdzenie 4.3.1 (o transformacie całki)** Jeżeli  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  oraz  $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ , to:

$$\mathcal{L}\{\varphi\}(s) = \frac{1}{s}F(s).$$

**Dowód**

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} \varphi(t) dt &= \int_0^T \left( -\frac{1}{s} e^{-st} \right)' \varphi(t) dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \varphi(t) \Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{s} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \\ &= -\frac{1}{s} e^{-sT} \varphi(T) + \frac{1}{s} \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz pokazać, że:

$$\frac{1}{s} e^{-sT} \varphi(T) \rightarrow 0.$$

Rozpiszmy z definicji:

$$e^{-sT} \int_0^T f(\tau) d\tau = e^{-(s-s_0)T} \underbrace{\int_0^T e^{-s_0\tau} f(\tau) d\tau}_{=I}.$$

Wystarczy teraz pokazać, że  $I$  jest ograniczone:

$$I = \int_0^T e^{-s_0\tau} f(\tau) d\tau = \int_0^T e^{-s_0(T-\tau)} \underbrace{e^{-s_0\tau} f(\tau)}_{\varphi_1'(t)} d\tau = (*),$$

gdzie:  $\varphi_1(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau) d\tau$ .

$$(*) = e^{-s_0(T-T)} \varphi_1(T) - s_0 \int_0^T e^{-s_0(T-\tau)} \varphi_1(\tau) d\tau = \varphi_1(T) - s_0 \int_0^T e^{-s_0(T-\tau)} \varphi_1(\tau) d\tau.$$

Zauważmy, że:

$$\varphi_1(T) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} F(s_0).$$

Wiemy, że  $F(s_0)$  istnieje, zatem należy zająć się wyrażeniem:

$$|s_0| \left| \int_0^T e^{-s_0(T-\tau)} \varphi_1(\tau) d\tau \right| \leq M \cdot |s_0| \cdot \int_0^T e^{-\operatorname{Re} s_0(T-\tau)} d\tau \leq \frac{M|s_0|}{\operatorname{Re} s_0}.$$

Otrzymujemy zatem:

$$\int_0^T e^{-st} \varphi(t) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{s} F(s).$$

□

**Twierdzenie 4.3.2 (o transformacie pochodnej)** Niech  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ . Wówczas zachodzi wzór:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0^+),$$

o ile istnieje  $f'$  i  $\mathcal{L}\{f'\}$  jest zbieżna.

**Dowód** Obliczamy poniższą całkę jak następuje:

$$\int_0^t f'(\tau) d\tau = f(t) - f(0^+).$$

Transformujemy obie strony:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f'(\tau) d\tau \right\} (s) = \mathcal{L}\{f\}(s) - \mathcal{L}\{f(0^+)\}(s) = F(s) - \frac{f(0^+)}{s}.$$

Z drugiej strony:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f'(\tau) d\tau \right\} (s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f'\}(s)$$

zatem

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = sF(s) - f(0^+).$$

□

**Przykład 4.3.1** Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe:

$$\frac{dx}{dt} + x = \sin t,$$

gdzie  $x(0^+) = 0$ . Niech  $\mathcal{L}\{f\}(s) = X(s)$ . Policzmy transformaty Laplace'a obu stron.

$$sX(s) - x(0^+) + X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Uwzględniając warunek początkowy dostajemy następujące równanie algebraiczne:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = (*).$$



Rozkładamy na ułamki proste:

$$(*) = \frac{1}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}.$$

Z tabeli transformat Laplace'a i korzystając z liniowości transformaty znajdujemy transformaty odwrotne obydwu stron i dostajemy wynik:

$$x(t) = \left( \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t \right) \mathbb{1}_+(t).$$

**Przykład 4.3.2** Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe:

$$y'' - y' - 2y = 1,$$

gdzie  $y(0^+) = 1$  oraz  $y'(0^+) = 0$ . Niech  $\mathcal{L}\{y\}(s) = Y(s)$ . Policzymy transformaty Laplace'a obu stron.

$$\mathcal{L}\{y''\}(s) - \mathcal{L}\{y'\}(s) - 2Y(s) = \frac{1}{s}.$$

Uwzględniając warunek początkowy dostajemy następujące równanie algebraiczne:

$$s^2 Y(s) - s \cdot 1 - 0 - (s \cdot Y(s) - 1) - 2Y(s) = \frac{1}{s}.$$

$$s^2 Y(s) - sY(s) - 2Y(s) = \frac{1}{s} - 1 + s = \frac{s^2 - s + 1}{s}.$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2 - s - 2)} = \frac{s^2 - s - 1}{s(s-2)(s+1)} = (*).$$

Rozkładamy na ułamki proste:

$$(*) \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s-2}.$$

Z tabeli transformat Laplace'a i korzystając z liniowości transformaty znajdujemy transformaty odwrotne obydwu stron i dostajemy wynik:

$$y(t) = \left( -\frac{1}{2} + e^{-t} + \frac{1}{2} e^{2t} \right) \mathbb{1}_+(t).$$

**Twierdzenie 4.3.3 (O podobieństwie)** Jeżeli  $\mathcal{L}\{f\} = F$ , to

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

**Dowód**

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(at) dt = \left| \begin{array}{l} at = u \\ a dt = du \end{array} \right| = \int_0^{\infty} e^{-s \frac{u}{a}} f(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

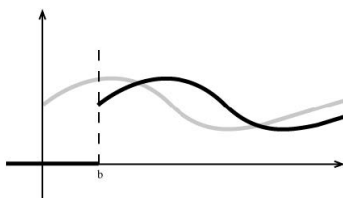
□

**Przykład 4.3.3**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin t\}(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\ \mathcal{L}\{\sin at\}(s) &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2+1} = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2} \end{aligned}$$

**Twierdzenie 4.3.4 (o przesunięciu)** Jeżeli  $\mathcal{L}\{f\} = F$ , to

$$\mathcal{L}\{f(t-b)\mathbb{1}_+(t-b)\}(s) = e^{-bs}F(s), \quad b > 0$$



**Dowód**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-b)\mathbb{1}_+(t-b)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-b)\mathbb{1}_+(t-b) dt = \\ &= \int_b^{\infty} e^{-st} f(t-b) dt = \left| \begin{array}{l} t-b = u \\ dt = du \end{array} \right| = \int_0^{\infty} e^{-s(u+b)} f(u) du = \\ &= e^{-bs} F(s) \end{aligned}$$

□

**Przykład 4.3.4** Wyznaczyć transformatę Laplace'a funkcji

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } t \in \langle 0, 2\pi \rangle \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

$$f(t) = \sin t - \sin(t-2\pi)\mathbb{1}_+(t-2\pi),$$

$$\text{więc } \mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s^2+1} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1} = \frac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

**Przykład 4.3.5** Znaleźć transformatę odwrotną funkcji  $\frac{1}{s(s+1)}e^{-s}$

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\}(t) = 1 - e^{-t} \quad (\text{dla } t > 0)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-s}}{s(s+1)}\right\}(t) = (1 - e^{-(t-1)})\mathbb{1}_+(t-1)$$

**Twierdzenie 4.3.5 (połączenie podobieństwa z przesunięciem)**

Jeżeli  $\mathcal{L}\{f\} = F$ , to

$$\mathcal{L}\{f(at-b)\mathbb{1}_+(at-b)\}(s) = \frac{1}{a}e^{-\frac{bs}{a}}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a, b > 0$$

**Twierdzenie 4.3.6** Jeżeli  $\mathcal{L}\{f\} = F$ , to

$$\mathcal{L}\{f(at+b)\mathbb{1}_+(t)\}(s) = \frac{1}{a}e^{\frac{bs}{a}}\left(F\left(\frac{s}{a}\right) - F_b\left(\frac{s}{a}\right)\right) \quad a, b > 0$$

$$\text{gdzie } F_b(s) := \int_0^b e^{-st} f(t) dt \quad (F_b \text{ jest skończoną transformatą Laplace'a)}$$

**Dowód** na ćwiczeniach lub w domu □

**Twierdzenie 4.3.7 (o przesunięciu obrazu)** Jeżeli  $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ ,  $c > 0$ ,  $d \in \mathbb{C}$ , to

$$F(cs + d) = \frac{1}{c} \mathcal{L} \left\{ e^{-\frac{d}{c}u} f \left( \frac{u}{c} \right) \right\} (s)$$

**Dowód** Niech  $F_1(s) = F(cs + d)$ .

$$\begin{aligned} F_1(s) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} e^{-(cs+d)t} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-tcs - td} f(t) dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} ct = u \\ c dt = du \end{array} \right| = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} e^{-su - \frac{u}{c}d} f \left( \frac{u}{c} \right) du = \\ &= \frac{1}{c} \mathcal{L} \left\{ e^{-\frac{d}{c}u} f \left( \frac{u}{c} \right) \right\} (s) \end{aligned}$$

□

**Przykład 4.3.6**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}} \\ \mathcal{L}\{e^{-dt}t^\alpha\}(s) &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{(s + d)^{\alpha+1}} \end{aligned}$$

**Wniosek 4.3.1 (twierdzenie o tłumieniu)** Dla  $c = 1$  otrzymujemy

$$F(s + d) = \mathcal{L} \{ e^{-du} f(u) \} (s)$$

## 4.4 Splot funkcji

**Definicja 4.4.1 (Splot funkcji)**

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

**Założenia**

1. Funkcje  $f_1, f_2$  są bezwzględnie całkowalne i jedna z nich jest ograniczona.
2.  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ , (wtedy z nierówności Schwarz'a:  $|\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau| \leq \|f_1\|_{L^2} \cdot \|f_2\|_{L^2}$ )

**Definicja 4.4.2 (Splot funkcji prawostronnych)** Jeśli  $f_1(t) = f_2(t) = 0$  dla  $t < 0$ , to

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

**Uwaga 4.4.1** Od tej pory będziemy rozważali tylko takie funkcje.

**Przykład 4.4.1** (założenie samej bezwzględnej zbieżności całek nie wystarcza)

$$f_1(t) = t^{-\frac{1}{2}}, \quad f_2(t) = (1-t)^{-\frac{1}{2}}$$

$f_1, f_2$  - są bezwzględnie całkowalne.

(mają osobliwości, ale rzędu pierwiastkowego, więc są zbieżne)

$$(f_1 * f_2)(1) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\tau}} d\tau = \int_0^1 \frac{1}{\tau} d\tau \quad - \text{rozbieżna}$$

**Definicja 4.4.3** Klasa  $\tau_0$  jest to zbiór funkcji bezwzględnie całkowalnych, które punkt osobliwy mogą mieć wyłącznie dla  $t = 0$ .

**Określenie splotu dla funkcji klasy  $\tau_0$**

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \underbrace{\int_0^{\frac{t}{2}} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau}_{I_1} + \underbrace{\int_{\frac{t}{2}}^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau}_{I_2}$$

Więc w  $\tau_0$

$$|I_1| \leq M_{f_2} \int_0^{\frac{t}{2}} |f_1(\tau)| d\tau < \infty$$

$$|I_2| \leq M_{f_1} \int_{\frac{t}{2}}^t |f_2(t-\tau)| d\tau < \infty$$

**Twierdzenie 4.4.1 (Younga)** Jeżeli

$$f_1 \in L^p(\mathbb{R}), f_2 \in L^q(\mathbb{R}), \frac{1}{q} + \frac{1}{q} - 1 = \frac{1}{r} > 0,$$

to

$$f_1 * f_2 \text{ istnieje i } f_1 * f_2 \in L^r(\mathbb{R})$$

**Uwaga 4.4.2** Jeżeli  $\frac{1}{r} = 0$  ( $r = \infty$ ) (symbolicznie), to  $f_1 * f_2$  jest ograniczona i jednostajnie ciągła.

#### 4.4.1 Własności splotu

**Własność 4.4.1 (przemienność)**  $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$

**Własność 4.4.2 (łączność)**  $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$

**Twierdzenie 4.4.2 (Borela)** Jeżeli  $\mathcal{L}\{f_1\} = F_1, \mathcal{L}\{f_2\} = F_2$  oraz  $F_1, F_2$  są zbieżne bezwzględnie dla  $s = s_0$ , to

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f_1 * f_2\}(s_0) &= F_1(s_0) \cdot F_2(s_0) \\ (f_1 * f_2) &= \mathcal{L}^{-1}\{F_1 \cdot F_2\} \end{aligned}$$

**Dowód**  $f_1, f_2$  - prawostronne.

$$\begin{aligned}
 F_1(s_0) \cdot F_2(s_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0\tau} f_1(\tau) d\tau \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0u} f_2(u) du = \\
 &\quad (F_1, F_2 \text{ zbieżne bezwzględnie, więc można zmienić kolejność całkowania.}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0\tau} e^{-s_0u} f_1(\tau) f_2(u) d\tau du = \left| \begin{array}{l} u = t - \tau \\ du = dt \end{array} \right| = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0\tau} f_1(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0(t-\tau)} f_2(t-\tau) dt d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s_0t} (f_1 * f_2)(t) dt = \\
 &= \mathcal{L}\{f_1 * f_2\}(s_0)
 \end{aligned}$$

□

## Ciągłość splotu

**Lemat 4.4.1** Jeżeli  $f$  jest całkowalna na przedziale  $\langle 0, t \rangle$ , to

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^t |f(u+\delta) - f(u)| du = 0$$

**Twierdzenie 4.4.3** Jeżeli  $f_1, f_2 \in \tau_0$  i są prawostronne,  $t > 0$ , to splot  $f_1 * f_2$  jest ciągły w punkcie  $t$ .

**Dowód**

$$\begin{aligned}
 D(t, \delta) &:= (f_1 * f_2)(t + \delta) - (f_1 * f_2)(t) = \int_0^{t+\delta} f_1(\tau) f_2(t + \delta - \tau) d\tau - \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \\
 &= \underbrace{\int_0^{t_0} f_1(\tau) (f_2(t + \delta - \tau) - f_2(t - \tau)) d\tau}_{I_1} + \underbrace{\int_{t_0}^t f_1(\tau) (f_2(t + \delta - \tau) - f_2(t - \tau)) d\tau}_{I_2} + \\
 &\quad + \underbrace{\int_t^{t+\delta} f_1(\tau) f_2(t + \delta - \tau) d\tau}_{I_3}
 \end{aligned}$$

$I_1$ : argument  $f_2$  zmienia się w przedziale  $(t - t_0, t + \delta)$ , więc  $|f_2| \leq M_{f_2}$

$$|I_1| \leq 2M_{f_2} \cdot \underbrace{\int_0^{t_0} |f_1(\tau)| d\tau}_{\text{całkowalne z założenia}} < \frac{1}{3}\varepsilon \quad \text{dla dostatecznie małych } t_0$$

$I_2$ : argument  $f_1$  zmienia się w przedziale  $(t_0, t)$ , więc  $|f_1| \leq M_{f_1}$

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq M_{f_1} \int_{t_0}^t |f_2(t + \delta - \tau) - f_2(t - \tau)| d\tau = \left| \begin{array}{l} t - \tau = u \\ -d\tau = du \end{array} \right| = \\ &= M_{f_1} \int_0^{t-t_0} |f_2(u + \delta) - f_2(u)| du < \\ &\quad (\text{na mocy lematu 4.4.1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla dostatecznie małej } \delta \end{aligned}$$

$I_3$ :

$$|I_3| \leq M_{f_1} \int_t^{t+\delta} |f_2(t + \delta - \tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{dla dostatecznie małej } \delta,$$

bo  $f_2$  całkowalna i przedział malejący. □

**Uwaga 4.4.3** Teza twierdzenia 4.4.3 nie jest prawdziwa dla  $t = 0$ .

**Przykład 4.4.2 (kontrprzykład)** Niech  $f_1(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ ,  $f_2(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ . Wtedy  $f_1, f_2 \in \tau_0$  i dla  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(t) &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = \left| \begin{array}{l} \frac{\tau}{t} = u \\ \frac{d\tau}{t} = du \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t \cdot du}{\sqrt{ut}\sqrt{t-ut}} du \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}} du = \\ &= \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}} du = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \\ &= \pi \xrightarrow{t \rightarrow 0} \pi \quad - \text{stała, niezależna od } t \end{aligned}$$

Lecz z definicji:

$$(f_1 * f_2)(0) = \int_0^0 \dots = 0$$

Zatem funkcja  $(f_1 * f_2)$  nie jest ciągła. Sprzeczność. □

**Uwaga 4.4.4** Jeżeli  $f_1, f_2 \in \tau_0$  i jedna z nich jest ograniczona, to  $(f_1 * f_2)$  jest ciągła dla  $t \geq 0$ .

**Dowód**

$$\left| \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right| \leq M_{f_1} \int_0^t |f_2(t - \tau)| d\tau \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0,$$

bo  $f_2$  całkowalna i długość przedziału całkowania dąży do zera. □

**Twierdzenie 4.4.4 (O pochodnej splotu)** Jeżeli  $f_1, f_2 \in \tau_0$ , istnieje  $f_1' \in \tau_0$ , to dla tych punktów  $t > 0$ , dla których  $f_2$  jest ciągła (z prawej lub lewej strony), splot  $(f_1 * f_2)$  jest różniczkowalny (prawo- lub lewostronnie) i zachodzi wzór:

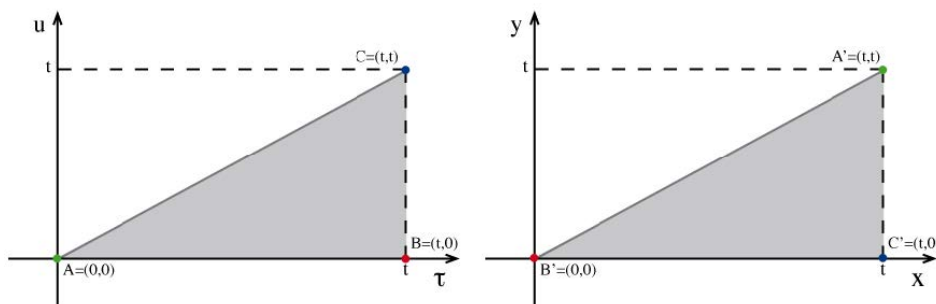
$$(f_1 * f_2)'(t^\pm) = (f_1' * f_2)(t) + f_1(0^+) \cdot f_2(t^\pm)$$

**Dowód**

$$f_1(\tau) = \int_0^\tau f_1'(u) du + f_1(0^+)$$

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(t) &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_2(t - \tau) \left( \int_0^\tau f_1'(u) du + f_1(0^+) \right) d\tau = \\ &= \int_0^t f_2(t - \tau) d\tau \int_0^\tau f_1'(u) du + f_1(0^+) \int_0^t f_2(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t f_2(t - \tau) d\tau \int_0^\tau f_1'(u) du + f_1(0^+) \int_0^t f_2(u) du \end{aligned}$$

$$\int_0^t f_2(t - \tau) d\tau \int_0^\tau f_1'(u) du = \left| \begin{array}{l} \tau = -y + t \\ u = x - y \end{array} \right| =$$



$$= \int_0^t dx \underbrace{\int_0^x f_1'(x - y) f_2(y) dy}_{(f_1' * f_2)}$$

$$(f_1 * f_2)'(t) = (f_1' * f_2)(t) + f_1(0^+) f_2(t^\pm)$$

□

**Uwaga 4.4.5** Jeśli  $f_1(0) = 0$ , to ciągłość  $f_2$  nie jest istotna.

**Uwaga 4.4.6** Jeśli  $t = 0$ , to twierdzenie 4.4.4 nie jest prawdziwe.

**Przykład 4.4.3 (kontrprzykład)**

$$f_1 = t^{\frac{1}{2}}, \quad f_2 = t^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
(f_1 * f_2)(t) &\stackrel{df}{=} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot \sqrt{t-\tau} d\tau = \left| \begin{array}{l} \frac{\tau}{t} = u \\ \frac{d\tau}{t} = du \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{t\sqrt{t-ut} \cdot du}{\sqrt{ut}} = \int_0^1 t \frac{\sqrt{1-u} \cdot du}{\sqrt{u}} = \\
&= t \int_0^1 u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{\frac{1}{2}} du = t \cdot B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = t \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)} = \\
&= t \cdot \frac{1}{2} \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = t \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Więc  $(f_1 * f_2)' = \frac{\pi}{2}$ .

Ale ze wzoru z twierdzenia 4.4.4:

$$(f_1 * f_2)'(0) = \underbrace{(f_1' * f_2)(0)}_0 + \underbrace{f_1(0^+) \cdot f_2(0)}_0 = 0$$

Sprzeczność! □

## 4.5 Zagadnienie różnowartościowości transformaty

Będziemy teraz rozważali następujące zagadnienie:

$$\mathcal{L}\{f_1\} = \mathcal{L}\{f_2\} \stackrel{?}{\Rightarrow} f_1 = f_2.$$

Do precyzyjnej odpowiedzi na postawione w powyższej implikacji pytanie będziemy potrzebowali dodatkowego pojęcia funkcji zerowej.

### 4.5.1 Funkcja zerowa

**Definicja 4.5.1 (Funkcja zerowa)** Funkcję  $u(t)$  nazywamy zerową  $\Leftrightarrow$ , gdy  $\forall t > 0 \int_0^t u(z) dz = 0$ .

**Uwaga 4.5.1**

$$\mathcal{L}\{u\} = 0.$$

**Dowód** Weźmy  $\omega > 0$  i zastosujemy uogólniony wzór na całkowanie przez części. Wtedy:

$$\int_0^\omega e^{-st} u(t) dt = \int_0^\omega e^{-st} \left( \int_0^t u(\tau) d\tau \right)' dt = e^{-st} \int_0^t u(\tau) d\tau \Big|_0^\omega + s \int_0^\omega e^{-st} \int_0^t u(\tau) d\tau = 0.$$

□

**Lemat 4.5.1** Jeżeli  $\psi$  jest ciągła na  $(a, b)$  oraz:

$$\int_a^b x^n \psi(x) dx = 0,$$

dla  $n = 0, 1, 2, \dots$ , to  $\psi \equiv 0$ .



**Twierdzenie 4.5.1** Jeżeli  $\mathcal{L}\{f\} = F$  oraz  $F(s_0 + n\delta) = 0$  dla  $n = 1, 2, \dots, \delta > 0$ , to  $f$  jest funkcją zerową.

**Dowód** Wiemy, że transformatę Laplace'a funkcji  $f$  możemy wyrazić wzorem:

$$F(s) = (s - s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt,$$

gdzie:

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau) d\tau.$$

Dokonajmy teraz podstawienia:  $s = s_0 + n\delta$ . Zgodnie z założeniem:

$$\begin{aligned} 0 = F(s_0 + n\delta) &= n\delta \int_0^{\infty} e^{-n\delta t} \varphi(t) dt = \left| \begin{array}{l} e^{-\delta t} = x \\ dt = \frac{1}{\delta x} dx \end{array} \right| = n\delta \int_0^1 x^n \varphi\left(\frac{-\ln x}{\delta}\right) \left(\frac{1}{\delta x}\right) dx = \\ &= n \int_0^1 x^{n-1} \psi(x) dx \Rightarrow \psi(x) \equiv 0 \equiv \varphi(t) \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

Stąd:

$$0 = \int_0^t e^{-s_0\tau} f(\tau) d\tau = \left| \begin{array}{l} u = e^{-s_0\tau} \quad v' = f(\tau) \\ u' = -s_0 e^{-s_0\tau} \quad v = \int_0^{\tau} f(\xi) d\xi \end{array} \right| = \left[ e^{-s_0\tau} \int_0^{\tau} f(\xi) d\xi \right]_0^t + s_0 \int_0^t e^{-s_0\tau} \int_0^{\tau} f(\xi) d\xi d\tau$$

Różniczkując obydwie strony względem  $t$  otrzymujemy:

$$0 = -s_0 e^{-s_0 t} \int_0^t f(\xi) d\xi + e^{-s_0 t} \frac{d}{dt} \int_0^t f(\xi) d\xi + s_0 e^{-s_0 t} \int_0^t f(\xi) d\xi$$

Stąd:

$$\int_0^t f(\xi) d\xi = \text{const} \quad \forall t > 0 \Rightarrow f - f. \text{ zerowa}$$

□

**Wniosek 4.5.1** Jeżeli  $\mathcal{L}\{f_1\} = \mathcal{L}\{f_2\}$ , to  $f_1 - f_2$  jest funkcją zerową.

## 4.6 Holomorficzność transformaty Laplace'a

**Twierdzenie 4.6.1** Jeżeli  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  jest zbieżna dla  $\text{Re } s > \beta$ , to  $F$  jest holomorficzna w tej półpłaszczyźnie i dla każdego  $n = 1, 2, \dots$  zachodzi wzór:

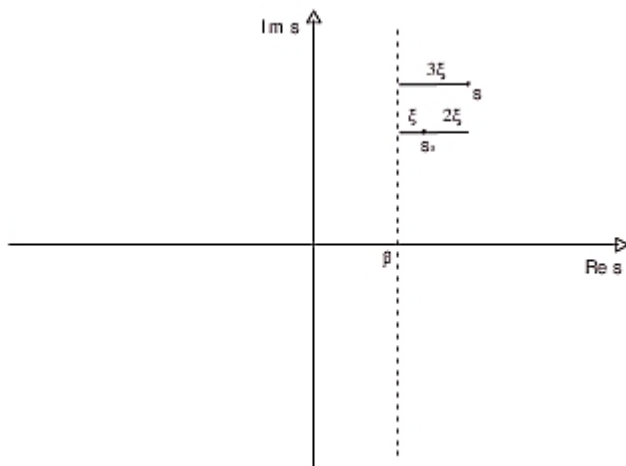
$$F^{(n)}(s) = (-1)^n \int_0^{\infty} e^{-st} t^n f(t) dt.$$

**Dowód** Weźmy  $n=1$ . Chcemy sprawdzić czy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(s+h) - F(s)}{h} \stackrel{?}{=} - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt.$$

Niech  $s, s_0$  i  $\beta$  będą takie, że  $\exists \xi$  takie, że:

- $Re(s - \beta) = 3\xi$ ,
- $Re(s_0 - \beta) = \xi$ ,
- $Re(s - s_0) = 2\xi$ .



Zakładamy, że transformata jest zbieżna w punkcie  $s_0$ . Mamy zatem:

$$F(s) = (s - s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt,$$

gdzie:

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-s_0 \tau} f(\tau) d\tau.$$

Teraz wprowadzimy funkcję  $\psi$ , którą otrzymamy formalnie różniczkując  $F$  po  $s$  (choć nie wiemy, czy taka operacja jest poprawna). Zatem wprowadzamy funkcję  $\psi$  określoną wzorem:

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt - (s - s_0) \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) dt.$$

Chcemy teraz sprawdzić czy  $\psi$  jest rzeczywiście pochodną transformaty. Będzie to prawdą, gdy prawdziwa będzie poniższa równość:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{F(s+h) - F(s)}{h} - \psi(s) \right) \stackrel{?}{=} 0.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{F(s+h) - F(s)}{h} - \psi(s) = \\
& = \frac{1}{h} \left\{ (s+h-s_0) \int_0^\infty e^{-(s+h-s_0)t} \varphi(t) dt - (s-s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt \right\} - \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt + \\
& + (s-s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) dt = \left( \int_0^\infty e^{-(s+h-s_0)t} \varphi(t) dt - \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt \right) + \\
& + (s-s_0) \left( \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-(s+h-s_0)t} \varphi(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt + \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) dt \right) = \\
& = \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} (e^{-ht} - 1) \varphi(t) dt + (s-s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} \left( \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right) \varphi(t) dt.
\end{aligned}$$

Rozpatrzmy teraz wyrażenia:

$$\begin{aligned}
& |e^{-ht} - 1| \leq e^{\xi t} |ht|. \\
& \left| \frac{e^{-ht} - 1}{h} + t \right| = \left| \frac{e^{-ht} - 1 + ht}{h} \right| \leq \frac{1}{2} \frac{|ht|^2 e^{\xi t}}{h} = \frac{1}{2} |h| t^2 e^{\xi t}.
\end{aligned}$$

Niech teraz  $D(h) = \frac{F(s+h) - F(s)}{h} - \psi(s)$ . Zgodnie z powyższymi oszacowaniami otrzymamy:

$$|D(h)| \leq M \int_0^\infty e^{-2\xi t} e^{\xi t} |h| t dt + M \cdot 2\xi \int_0^\infty \frac{1}{2} |h| t^2 e^{\xi t} e^{-2\xi t} dt \leq |h| \cdot \text{const.} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

To dowodzi holomorficzności  $F$  i tego, że  $F' = \psi$ . Teraz wystarczy pokazać, że  $\psi$  wyraża się wzorem:

$$\psi(s) = - \int_0^\infty e^{-st} t f(t) dt.$$

W tym celu policzmy pomocniczą całkę:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \tau (e^{-s_0 \tau} f(\tau)) d\tau = \tau \varphi(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \varphi(\tau) d\tau = \\
& = t\varphi(t) - \int_0^t \varphi(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Możemy zapisać:

$$t\varphi(t) = \int_0^t (\tau e^{-s_0 \tau} f(\tau) + \varphi(\tau)) d\tau.$$

Rozpatrzmy teraz następujące wyrażenie:

$$-(s-s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) dt = \int_0^\infty \left( e^{-(s-s_0)t} \right)' t \varphi(t) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(s-s_0)t} t \varphi(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} - \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} (t e^{-s_0 t} f(t) + \varphi(t)) dt = \\
&= - \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} t e^{-s_0 t} f(t) dt - \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} \varphi(t) dt.
\end{aligned}$$

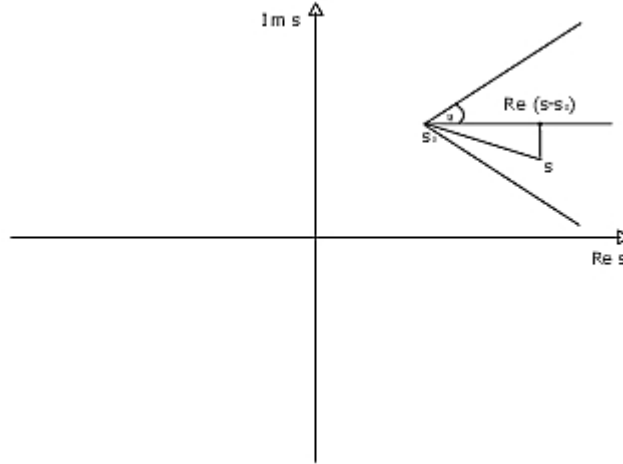
Wracając do wzoru na  $\psi$  otrzymujemy:

$$\psi(s) = - \int_0^{\infty} e^{-st} t f(t) dt.$$

□

**Lemat 4.6.1** Jeżeli  $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$  jest zbieżna dla  $s = s_0$ , to całka  $\mathcal{L}\{f\}(s)$  jest zbieżna jednostajnie w każdym sektorze postaci:

$$\left\{ s \in \mathbb{C} : |\arg(s - s_0)| \leq \psi < \frac{\pi}{2} \right\}$$



**Dowód** Transformata  $\mathcal{L}\{f\}$  jest zbieżna jednostajnie  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Omega \forall \omega_1, \omega_2 > \Omega$

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-st} f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Niech

$$\varphi(t) = - \int_t^{\infty} e^{-s_0 \tau} f(\tau) d\tau.$$

Stąd mamy:

$$\varphi'(t) = e^{-s_0 t} f(t),$$

oraz

$$\varphi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-st} f(t) dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t) dt =$$

$$= \underbrace{e^{-(s-s_0)t}\varphi(t)}_A \Big|_{t=\omega_1}^{t=\omega_2} + \underbrace{(s-s_0)}_{\omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-(s-s_0)t}\varphi(t) dt.$$

$$|A| = \left| e^{-(s-s_0)\omega_2}\varphi(\omega_2) - e^{-(s-s_0)\omega_1}\varphi(\omega_1) \right| \leq |\varphi(\omega_1)| + |\varphi(\omega_2)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

dla  $\omega_1, \omega_2 > \Omega$ , gdzie  $\Omega$  jest dostatecznie duże.

$$\begin{aligned} |B| &= \left| (s-s_0) \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-(s-s_0)t}\varphi(t) dt \right| \leq |s-s_0| \sup_{t>\Omega} |\varphi(t)| \cdot \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\operatorname{Re}(s-s_0)t} dt \leq \\ &\leq |s-s_0| \sup_{t>\Omega} |\varphi(t)| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-|s-s_0|t \cos \psi} dt = |s-s_0| \sup_{t>\Omega} |\varphi(t)| \cdot \left( \frac{-1}{|s-s_0| \cos \psi} e^{-|s-s_0|t \cos \psi} \right) \Big|_{\omega_1}^{\omega_2} \leq \\ &\leq \frac{2 \sup_{t>\Omega} |\varphi(t)|}{\cos \psi} < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Stąd ostatecznie:

$$\left| \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-st} f(t) dt \right| < \varepsilon \quad \text{dla dostatecznie dużych } \Omega.$$

□

**Twierdzenie 4.6.2** Jeżeli  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  jest zbieżna dla  $s = s_0$ , to:  $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$  po każdej drodze zawartej w sektorze:

$$\left\{ s \in \mathbb{C} : |\arg(s - s_0)| \leq \psi < \frac{\pi}{2} \right\}$$

**Dowód** Uwaga! Pisząc  $s \rightarrow \infty$  mamy na myśli, że  $|s|$  w sensie liczb zespolonych zbiega do nieskończoności.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^{T_1} e^{-st} f(t) dt + \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t) dt + \int_{T_2}^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Oszacujmy teraz poszczególne części:

$$\left| \int_0^{T_1} e^{-st} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

dla dostatecznie małego  $T_1$ .

$$\left| \int_{T_2}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

dla dostatecznie dużego  $T_2$  (na mocy lematu 4.6.1).

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_{T_1}^{T_2} e^{-t \operatorname{Re} s} |f(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3},$$

dla dostatecznie dużych  $\operatorname{Re} s$ . Stąd:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

□

**Wniosek 4.6.1** Obrazem transformaty Laplace'a jest funkcja holomorphyzna taka, że:

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} F(s) = 0.$$

## 4.7 Odwracanie transformaty Laplace'a

Wiemy, że jeśli  $F$  jest obrazem  $f$  przy przekształceniu Laplace'a, to:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds,$$

o ile oczywiście powyższa całka jest zbieżna.

**Uwaga 4.7.1 (BARDZO WAŻNY WZÓR NA ODWRACANIE TRANSFORMATY!!!)**  
Jeżeli  $F(s)$  ma bieguny w punktach  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , to:

$$\frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} = \sum_{j=1}^n \operatorname{res}_{s=s_j} (e^{st} F(s)).$$

Wzór wynika z lematu Jordana dla funkcji zespolonych.

## 4.8 Zastosowania transformaty Laplace'a

### 4.8.1 Zastosowanie do równań różniczkowych zwyczajnych

- (1)  $y^{(n)} + c_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + c_1 \cdot y' + c_0 \cdot y = f(t)$  dla  $t \geq 0$ , gdzie  $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$  stałe;
- (2) warunki początkowe:  $y(0^+) = y_0, y'(0^+) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0^+) = y_0^{(n-1)}$ .

**Założenia:**

1.  $f \in \tau_0$
2.  $f$  ma  $\mathcal{L}$  transformatę
3. funkcje  $y, y', \dots, y^{(n-1)} \in C$  (funkcje ciągłe) dla  $t \geq 0$
4.  $y^{(n)}(t^\pm) + c_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t^\pm) + \dots + c_1 \cdot y'(t^\pm) + c_0 \cdot y(t^\pm) = f(t^\pm)$
5.  $y^{(n)}$  ma  $\mathcal{L}$  transformatę

Zauważmy, że nie zakładamy tutaj np. ciągłości  $y^{(n)}$  oraz  $f$ .

Oznaczamy:  $\mathcal{L}\{y\}(s) = Y(s)$ ,  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  i stosujemy  $\mathcal{L}$  transformatę do równania (1):

$$\begin{aligned} & \left[ s^n Y(s) - y_0 \cdot s^{n-1} - y'_0 \cdot s^{n-2} - \dots - y_0^{(n-1)} \right] + c_{n-1} \cdot \left[ s^{n-1} \cdot Y(s) - y_0 \cdot s^{n-2} - \dots - y_0^{(n-2)} \right] + \\ & + c_{n-2} \cdot \left[ s^{n-2} \cdot Y(s) - y_0 \cdot s^{n-3} - \dots - y_0^{(n-3)} \right] + \dots + c_1 \cdot [s \cdot Y(s) - y_0] + c_0 \cdot Y(s) = F(s) \end{aligned}$$

Grupujemy odpowiednie wyrazy i dostajemy:

$$Y(s) \cdot p(s) = F(s) + y_0 \cdot (s^{n-1} + c_{n-1} \cdot s^{n-2} + \dots + c_1) + y'_0 \cdot (s^{n-2} + c_{n-1} \cdot s^{n-3} + \dots + c_2) +$$

$$+ \dots + y_0^{(n-2)} \cdot (s + c_{n-1}) + y_0^{(n-1)},$$

gdzie  $p(s) = s^n + c_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + c_1 \cdot s + c_0$  - wielomian charakterystyczny.

Czyli:

$$(\star) \quad Y(s) = \frac{F(s)}{p(s)} + y_0 \cdot \frac{(s^{n-1} + c_{n-1} \cdot s^{n-2} + \dots + c_1)}{p(s)} + y_0' \cdot \frac{(s^{n-2} + c_{n-1} \cdot s^{n-3} + \dots + c_2)}{p(s)} + \dots + y_0^{(n-1)} \cdot \frac{1}{p(s)}$$

**Rozpatrzmy dwa przypadki:**

**A** Równanie niejednorodne z jednorodnymi warunkami początkowymi.

**B** Równanie jednorodne z dowolnymi warunkami początkowymi.

**Ad. B Przypadek szczególny** Okazuje się, że gdy znamy rozwiązanie tego konkretnego przypadku, to potrafimy znaleźć rozwiązanie B.

Niech:

$$y_0 = 0, y_0' = 0, \dots, y_0^{(n-2)} = 0, y_0^{(n-1)} = 1$$

Wtedy:

$$Y(s) = \frac{1}{p(s)} =: G(s) \text{ oraz } g := \mathcal{L}^{-1}\{G\}$$

// funkcja  $g$  jest postaci - kombinacja liniowa funkcji wykładniczych, albo wielomian razy funkcja wykładnicza

Mamy:

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = G(s) = \frac{1}{p(s)}$$

$$\mathcal{L}\{g'\}(s) = s \cdot G(s) - g(0^+) = \frac{s}{p(s)}$$

$$\mathcal{L}\{g''\}(s) = \frac{s^2}{p(s)}$$

$\vdots$

$$\mathcal{L}\{g^{(n-1)}\}(s) = \frac{s^{n-1}}{p(s)}$$

$$\mathcal{L}\{g^{(n)}\}(s) = \frac{s^n}{p(s)} - 1$$

**Wróćmy do B** Liczymy transformatę odwrotną  $(\star)$ :

$$y(t) = y_0 \cdot \left[ g^{(n-1)}(t) + c_{n-1} \cdot g^{(n-2)}(t) + \dots + c_1 \cdot g(t) \right] + \\ + y_0' \cdot \left[ g^{(n-2)}(t) + c_{n-1} \cdot g^{(n-3)}(t) + \dots + c_2 \cdot g(t) \right] + \dots + y_0^{(n-1)} \cdot g(t)$$

Jest to rozwiązanie przypadku B.

Znając rozwiązanie przypadku szczególnego, znamy rozwiązanie dla dowolnego jednorodnego.

**Ad. A**

$$Y(s) = \frac{F(s)}{p(s)} = F(s) \cdot G(s)$$

Zatem na mocy twierdzenia Borela o splocie (4.4.2):

$$y(t) = (g * f)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

**Uwaga 4.8.1** Gdybyśmy nie zakładali warunków 2. i 5., to mimo wszystko  $y = g * f$  spełnia równanie niejednorodne:

Pamiętając, że  $g(0^+) = g'(0^+) = \dots = g^{(n-2)}(0^+) = 0$  oraz  $g^{(n-1)}(0^+) = 1$

$$y' = g' * f + g(0^+) \cdot f = g' * f$$

$$y'' = g'' * f + g'(0^+) \cdot f = g'' * f$$

$\vdots$

$$y^{(n-1)} = g^{(n-1)} * f$$

$$y^{(n)} = g^{(n)} * f + g^{(n-1)}(0^+) \cdot f = g^{(n)} * f + f$$

Teraz powyższe wzory podstawiamy do (1) i otrzymujemy:

$$y^{(n)} + c_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + c_1 \cdot y' + c_0 \cdot y = g^{(n)} * f + f + c_{n-1} \cdot g^{(n-1)} * f + \dots + c_1 \cdot g' * f + c_0 \cdot g * f \triangleq \\ \triangleq (g^{(n)} + c_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \dots + c_1 \cdot g' + c_0 \cdot g) * f + f \stackrel{\diamond}{=} f$$

$\Delta$  korzystamy z liniowości splotu

$\diamond$   $g^{(n)} + c_{n-1} \cdot g^{(n-1)} + \dots + c_1 \cdot g' + c_0 \cdot g = 0$ , bo  $g$  - rozwiązanie równania jednorodnego

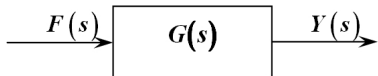
**Wniosek 4.8.1** Jeśli znamy  $g(t)$ , to umiemy rozwiązać dowolne równanie niejednorodne z jednorodnymi warunkami początkowymi.

## 4.8.2 Zastosowania w fizyce

Model matematyczny:



Dla transformat:



Gdzie  $G(s)$  - transmitancja układu.

**Przykład 4.8.1** Przypadek szczególny.

$$f(t) = 1_+(t)$$

Interpretacja fizyczna: od chwili 0 przykładamy stały impuls (np. elektryczny, mechaniczny itp).  
Wtedy:

$$y_{1_+}(t) = (g * f)(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$$

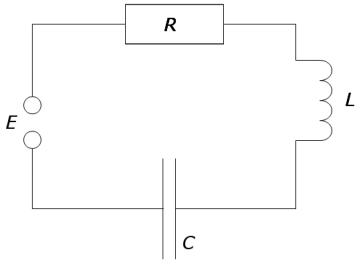
Czyli otrzymujemy uniwersalny wzór na funkcję  $g$ :

$$g(t) = \frac{d}{dt} (y_{1_+}(t)).$$

Znając odpowiedź układu na impuls  $1_+(t)$  na mocy poprzednich uwag, znamy rozwiązanie zagadnienia z dowolnymi warunkami początkowymi.



**Przykład 4.8.2** Układ  $R, L, C$



Wejście:  $E(t)$  - siła elektromotoryczna źródła prądu

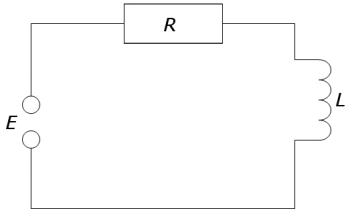
Wyjście:  $i(t)$  - natężenie prądu.

Zgodnie z II prawem Kirchhoffa mamy:

$$E = R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(\tau) d\tau$$

Przypadek  $E \in C^1 \Rightarrow \dot{E} = R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i$  - rozwiązanie na ćwiczeniach.

**Przykład 4.8.3** Układ  $R, L$



$$E(t) = U \cdot 1_+(t)$$

$$i(t) = ?$$

Transformujemy to równanie:

$$U \cdot 1_+(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di}{dt}, \quad i(0^+) = 0$$

$$\frac{U}{s} = R \cdot I(s) + L \cdot s \cdot I(s), \quad I(s) = \mathcal{L}\{i\}(s)$$

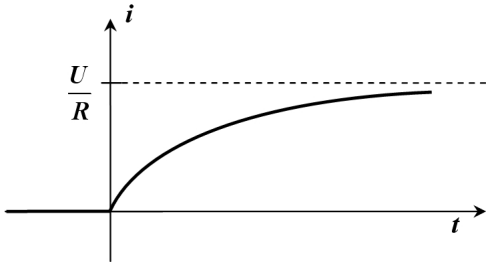
$$I(s)(R + s \cdot L) = \frac{U}{s}$$

$$I(s) = \frac{U}{s \cdot (R + s \cdot L)},$$

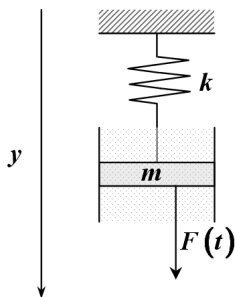
gdzie  $U, R, L$ - stałe

Stosujemy rozkład na ułamki proste i obliczamy  $\mathcal{L}^{-1}\{I\}$  (jest to Prawo Ohma):

$$i(t) = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$$



**Przykład 4.8.4** Proste doświadczenie: do cylindra wlewamy ciec i umieszczamy w nim ciężarek na sprężynie.



$F(t)$ - wejście (siła wymuszająca)

$y$  - wyjście (wychylenie z położenia równowagi)

Mamy następujące równanie różniczkowe:

$$m\ddot{y} = F - ky - c\dot{y}$$

Gdzie  $c\dot{y}$  - to siła oporu (zakładamy, że przy małych prędkościach opór jest proporcjonalny do  $\dot{y}$ )

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = F$$

Zauważamy odpowiedniość do:

$$\dot{E} = R \cdot \frac{di}{dt} + L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i$$

To znaczy:

$$m \leftrightarrow L$$

$$c \leftrightarrow R$$

$$k \leftrightarrow \frac{1}{C}$$

$$F \leftrightarrow \dot{E}$$

**Przykład 4.8.5** Przykład: (rrecz paraboliczne)

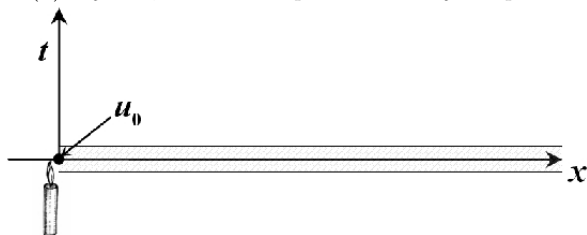
Równanie przewodnictwa cieplnego:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, ,$$

gdzie  $u = u(x, t)$  - temperatura,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ ,  $a > 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & x \geq 0 & (1) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{-warunek początkowy} & x > 0 \\ u(0, t) = U_0 & \text{-warunek brzegowy} & t > 0 & (2) \end{cases}$$

Z (2) wynika, że  $x = 0$  - punkt o stałej temperaturze  $u_0$ .



Niech  $u_0 \equiv 0$

$$U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot u(x, t) dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt = s \cdot U(x, s) - u(x, 0) = s \cdot U(x, s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt \stackrel{\diamond}{=} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot u(x, t) dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, s)$$

◇ zakładamy bezwzględną całkowalność

Transformujemy równania (1) i (2):

$$\begin{cases} sU(x, s) = a^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, s) & // \text{rrcz zredukowało się do rrw} \\ U(0, s) = \mathcal{L}\{u(0, t)\} = \frac{U_0}{s} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, s) - \frac{s}{a^2} U(x, s) = 0 \\ U(0, s) = \frac{U_0}{s} \end{cases} \quad (3)$$

Równanie charakterystyczne:

$$r^2 - \frac{s}{a^2} = 0 \Rightarrow r = \pm \frac{\sqrt{s}}{a}$$

Rozwiązanie ma postać:

$$U(x, s) = C_1 \cdot e^{\frac{\sqrt{s}}{a}x} + C_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

$C_1 = 0$ , ponieważ transformata musi zniknąć w  $\infty$ .

Czyli:

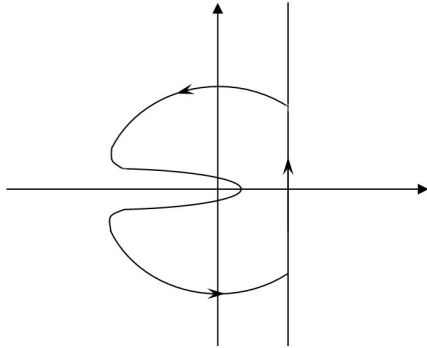
$$U(x, s) = C_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

Z (3) obliczamy stałą  $C_2$ :

$$\frac{U_0}{s} = C_2 \Rightarrow U(x, s) = \frac{U_0}{s} e^{-\frac{\sqrt{s}}{a}x}$$

Teraz obliczamy transformatę odwrotną.

Całkujemy po takiej drodze:



Po odwróceniu otrzymujemy:

$$u(x, t) = \frac{2U_0}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\frac{x}{2\sqrt{a \cdot t}}}^{\infty} e^{-r^2} dr$$

Z postaci rozwiązania wynika, że temperatura rozchodzi się z nieskończoną szybkością, bo  $t > 0 \Rightarrow u > 0$  - jest to własność przyjętego modelu matematycznego.

# Rozdział 5

## Wstęp do teorii dystrybucji

### 5.1 Dystrybucje, wiadomości wstępne

Wielkości fizyczne opisujemy najczęściej przyporządkowując im funkcje (np. zależne od czasu). Inną drogą opisu tych wielkości jest przyporządkowanie im funkcjonałów określonych na odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych rzeczywistych lub zespolonych. Funkcjonały takie nazywamy dystrybucjami. Dystrybucje mogą być określone na różnych przestrzeniach funkcyjnych. Zmieniając odpowiednią przestrzeń funkcyjną zmieniamy klasę dystrybucji.

Poniżej przypomnimy podstawowe pojęcia dotyczące dystrybucji.

### 5.2 Przestrzeń funkcji próbnych $\mathcal{D}$ , przestrzeń $\mathcal{D}'$

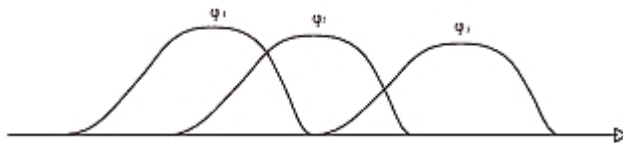
**Definicja 5.2.1**  $\mathcal{D}$  (zbiór funkcji próbnych) =  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  lub  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Oznacza to, że  $\varphi \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \varphi \in C^\infty$  oraz  $\text{supp } \varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$  (nośnik funkcji) jest zwarty ( $\varphi$  może być funkcją o wartościach rzeczywistych lub zespolonych).

W przestrzeni funkcji próbnych definiujemy zbieżność ciągu funkcyjnego w sposób następujący.

**Definicja 5.2.2**  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  w  $\mathcal{D} \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} \quad \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows \varphi^{(k)}$   
oraz nośniki  $\text{supp } \varphi_n$  są wspólnie ograniczone.

**Uwaga 5.2.1** To jest kontrprzykład na zbieżność (brak wspólnej ograniczoności nośników)



**Twierdzenie 5.2.1** Każda funkcja ciągła o nośniku ograniczonym może być jednostajnie przybliżona przez funkcje z przestrzeni  $\mathcal{D}$ .

**Dowód** (szkic) Należy rozważyć funkcję:

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |t| \geq 1 \\ e^{\frac{1}{t^2-1}} & \text{dla } |t| < 1 \end{cases}$$

oraz zauważyć, że jest ona klasy  $C^\infty$  i utworzyć kolejną funkcję pomocniczą określoną wzorem

$$g_\alpha(t) = \frac{\xi\left(\frac{t}{\alpha}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(t) dt = 1$$

dla  $\alpha > 0$ . Funkcja  $g_\alpha$  jest tożsamościowo równa zeru poza przedziałem  $(-\alpha, \alpha)$ . Niech

$$\varphi_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g_\alpha(t - \tau) d\tau, \quad \varphi_\alpha \in \mathcal{D}.$$

Funkcja  $\varphi_\alpha$  jest żądanym przybliżeniem, ponieważ

$$|f(t) - \varphi_\alpha(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) - f(\tau)] g_\alpha(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(\tau)| g_\alpha(t - \tau) d\tau.$$

Dobierając  $\alpha$  tak małe, by dla  $|t - \tau| < \alpha$  na mocy jednostajnej ciągłości funkcji  $f$  zachodziła nierówność  $|f(t) - f(\tau)| < \varepsilon$  otrzymujemy tezę, gdyż

$$|f(t) - \varphi_\alpha(t)| \leq \varepsilon \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g_\alpha(t - \tau) d\tau = \varepsilon$$

co kończy dowód. □

**Definicja 5.2.3** *Przestrzeń dystrybucji  $\mathcal{D}'$  nazywamy przestrzeń funkcjonalów liniowych i ciągłych na  $\mathcal{D}$  (ciągłość względem zbieżności określonej w poprzedniej definicji).*

W przestrzeni  $\mathcal{D}'$  określamy zbieżność jak następuje.

Niech  $T_n, T \in \mathcal{D}'$  (oznaczamy równoważnie  $T(\varphi) = \langle T|\varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle$ ).

**Definicja 5.2.4**  $T_n \rightarrow T$  w  $\mathcal{D}' \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D} \Rightarrow T_n(\varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T(\varphi)$

**Twierdzenie 5.2.2** *Przestrzeń  $\mathcal{D}'$  jest domknięta ze względu na zbieżność (tzn. granica ciągu funkcjonalów liniowych i ciągłych jest funkcjonalem liniowym i ciągłym).*

Spośród wszystkich dystrybucji szczególnie wyróżniamy tzw. dystrybucje regularne. Są to dystrybucje wyznaczone przez funkcje lokalnie całkowalne. Niech  $f$  będzie funkcją lokalnie całkowalną na  $\mathbb{R}$ .

**Definicja 5.2.5** *Dystrybucją regularną wyznaczoną przez lokalnie całkowalną funkcję  $f$  nazywamy dystrybucję określoną wzorem*

$$\langle f|\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

dla  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Poprawność tej definicji (ciągłość funkcjonału) wynika z oszacowania

$$|\langle f|\varphi \rangle - \langle f|\varphi_n \rangle| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt = \int_K |f(t)| |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt \leq M_K \cdot \varepsilon$$

gdzie  $K$  jest zbiorem zwartym, w którym zawarte są nośniki wszystkich funkcji  $\varphi_n, \varphi$ .

Wiele pojęć związanych z dystrybucjami wprowadza się zwykle w ten sposób, by były one uogólnieniem własności dystrybucji regularnych. Dotyczy to przede wszystkim różniczkowania dystrybucji, pojęcia równości dystrybucji na zbiorze otwartym (mimo, że dystrybucja nie jest funkcją mającą określoną wartość w każdym punkcie) oraz pojęcia nośnika dystrybucji.

Rozważmy na początek funkcję lokalnie całkowaną  $f$ , której pochodna  $f'$  jest także funkcją lokalnie całkowaną. Niech  $\varphi \in \mathcal{D}$  będzie taka, że  $\text{supp } \varphi \subset K = \langle a, b \rangle$  - zwarty. Wówczas ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = \int_{a-1}^{b+1} f'(t) \varphi(t) dt = \underbrace{f(t) \varphi(t)}_0 \Big|_{a-1}^{b+1} - \int_{a-1}^{b+1} f(t) \varphi'(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt$$

co pozwala przyjąć następującą definicję różniczkowania w przestrzeni  $\mathcal{D}'$ .

**Definicja 5.2.6** Pochodną dystrybucji  $T \in \mathcal{D}'$  nazywamy dystrybucję  $T' = DT$  określoną wzorem

$$\langle T' | \varphi \rangle = - \langle T | \varphi' \rangle \quad \text{dla } \varphi \in \mathcal{D}$$

(w ten sposób każda dystrybucja, a więc i każda funkcja lokalnie całkowna ma pochodną). Pochodną tą nazywamy pochodną w sensie dystrybucyjnym.

W przypadku wielowymiarowym powyższą definicję modyfikujemy do wzoru

$$\langle D^\alpha T | \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T | D^\alpha \varphi \rangle$$

gdzie  $\alpha$  jest wielowskazywnikiem  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ ,

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi.$$

**Definicja 5.2.7** Dystrybucje  $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'$  są równe na zbiorze otwartym  $A \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{supp } \varphi \subset A \Rightarrow \langle T_1 | \varphi \rangle = \langle T_2 | \varphi \rangle$ .

**Definicja 5.2.8** Nośnikiem dystrybucji  $T \in \mathcal{D}'$  nazywamy najmniejszy zbiór domknięty  $F \subset \mathbb{R}$  taki, że  $T = 0$  na  $F'$  w sensie poprzedniej definicji.

Spośród wszystkich dystrybucji wyróżniamy tzw. dystrybucje skończonego rzędu będące pochodnymi dystrybucyjnymi funkcji ciągłych.

**Definicja 5.2.9** Dystrybucję  $T \in \mathcal{D}'$  nazywamy dystrybucją skończonego rzędu  $\Leftrightarrow$  gdy istnieje funkcja  $h(t)$  ciągła na  $\mathbb{R}$  oraz liczba naturalna  $k$  taka, że  $T = D^k h$ . Najmniejszą liczbę  $k$  o tej własności nazywamy rzędem dystrybucji  $T$ .

**Twierdzenie 5.2.3** Każda dystrybucja  $T \in \mathcal{D}'$  jest lokalnie dystrybucją skończonego rzędu tzn., że dla ustalonego ograniczonego lecz dowolnego przedziału  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  istnieje  $h \in C(a, b)$ ,  $k \geq 0$  taka, że  $\forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{supp } \varphi \subset (a, b)$  zachodzi

$$\langle T | \varphi \rangle = (-1)^k \int_a^b h(t) \varphi^{(k)}(t) dt = (-1)^k \int_R h(t) \varphi^{(k)}(t) dt = \langle D^k h | \varphi \rangle$$

(dla dystrybucji skończonego rzędu równość powyższa zachodzi dla wszystkich  $\varphi \in \mathcal{D}$  - bez żadnych dodatkowych ograniczeń co do nośnika  $\varphi$ ).

## Przykłady (dystrybucji skończonego rzędu)

1. Niech

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}.$$

Wówczas  $Dh = 1_+$ , gdzie  $1_+$  jest funkcją skoku jednostkowego (funkcją Heavyside'a) określoną jako

$$1_+(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}.$$

Obliczając z definicji pochodną  $Dh$  otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle Dh|\varphi \rangle &= -\langle h|\varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} t\varphi'(t) dt = \underbrace{-t\varphi(t)|_0^{+\infty}}_0 + \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1_+(t) \varphi(t) dt = \langle 1_+|\varphi \rangle, \text{ a więc } Dh = 1_+. \end{aligned}$$

2. Niech  $\delta = D1_+ = D^2h$ . Obliczmy wartość  $\langle \delta|\varphi \rangle$ .

$$\langle \delta|\varphi \rangle = \langle D1_+|\varphi \rangle = -\langle 1_+|\varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = \underbrace{-\varphi(\infty)}_0 + \varphi(0) = \varphi(0)$$

Dystrybucja  $\delta$  zwana jest tzw. deltą Diraca. Nie jest ona dystrybucją regularną, ponieważ (patrz twierdzenie 5.2.5) nie istnieje funkcja lokalnie całkowna  $f$  taka, że  $\forall \varphi \in \mathcal{D}$  zachodzi  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$ , jest ona jednakże dystrybucją skończonego rzędu, jej rząd równy jest 2.

3. Dystrybucje  $\delta^{(n)} = D^n \delta = D^{n+2}h$  są także dystrybucjami skończonego ( $n+2$  - go) rzędu. Korzystając z definicji obliczamy natychmiast, że

$$\langle \delta^{(n)}|\varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta|\varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

**Twierdzenie 5.2.4** Niech  $f$  będzie lokalnie całkowna na  $\mathbb{R}$ . Niech  $h(t) = \int_{\alpha}^t f(\tau) d\tau$ .

Wówczas  $f = Dh$  (w sensie dystrybucyjnym).

**Dowód** W teorii całki Lebesgue'a dowodzi się, że  $h(t)$  jest różniczkowalna prawie wszędzie i prawie wszędzie  $h'(t) = f(t)$ . W takim razie mamy na mocy wzoru na całkowanie przez części

$$\langle Dh|\varphi \rangle = -\langle h|\varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \varphi'(t) dt = \underbrace{-h(t) \varphi(t)|_{-\infty}^{+\infty}}_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt = \langle f|\varphi \rangle,$$

a więc  $Dh = f$ .

Ponieważ  $h$  jest ciągła, więc  $f$  jest skończonego rzędu (0 - gdy  $f$  ciągła, 1 - w przeciwnym razie).

□

Przypomnijmy sobie jeden z ważnych lematów z analizy funkcjonalnej:

**Lemat 5.2.1** Niech  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  - zbiór otwarty.

Wtedy dla dowolnego zbioru  $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$  - ograniczonego i takiego, że  $\overline{\Omega'} \subset \Omega$  istnieje funkcja  $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$  taka, że  $\eta(x) = 1$  dla  $x \in \Omega'$  i  $0 \leq \eta(x) \leq 1$  dla  $x \in \Omega$ .

**Twierdzenie 5.2.5** Dystrybucja Diraca  $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  jest dystrybucją osobliwą (nie jest dystrybucją regularną).

### Dowód

Należy wykazać, że  $\delta$  nie jest dystrybucją regularną.

Nie wprost:

Przypuścmy, że  $\delta$  jest dystrybucją regularną.

Zatem istnieje funkcja lokalnie całkwalna  $f$  w  $\mathbb{R}$  taka, że

$$(*) \quad \langle \delta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Skorzystamy z lematu 5.2.1 przyjmując, że

$$\Omega' = \{0\}, \quad \Omega_i = \{x \in \mathbb{R} : |x| < \frac{1}{i}\} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots$$

Na mocy lematu 5.2.1 istnieją funkcje  $\eta_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$  takie, że  $\eta_i(0) = 1$ ,  $\eta_i(x) = 0$  dla  $x \notin \Omega_i$  oraz  $0 \leq \eta_i(x) \leq 1$  dla  $x \in \Omega_i$ .

Zatem korzystając ze wzoru (\*) mamy

$$1 = \eta_i(0) = \int_{\Omega_i} f(x)\eta_i(x)dx \leq \int_{\Omega_i} |f(x)|dx \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem dystrybucja Diraca jest dystrybucją osobliwą. □

## 5.3 Transformata Laplace'a dystrybucji - definicja

Ze zbioru wszystkich dystrybucji skończonego rzędu wybieramy te, które są pochodnymi dystrybucyjnymi funkcji ciągłych  $h(t)$  spełniających dwa dodatkowe warunki:

1.  $h(t) = 0$  dla  $t < 0$
2.  $\mathcal{L}\{h(t)\}$  istnieje (w sensie klasycznym) i jest zbieżna bezwzględnie dla  $\text{Re } s > \sigma$ .

Zbiór takich dystrybucji oznaczamy przez  $\mathcal{D}'_0$ .

**Definicja 5.3.1** Dla dystrybucji  $T = D^k h \in \mathcal{D}'_0$  definiujemy przekształcenie Laplace'a wzorem

$$\mathcal{L}\{T\}(s) = s^k \mathcal{L}\{h(t)\}(s) = s^k H(s)$$

gdzie  $H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s)$ .

**Twierdzenie 5.3.1** Jeśli funkcja  $f(t)$  posiada  $\mathcal{L}$  transformatę w sensie klasycznym, to posiada również transformatę w sensie dystrybucyjnym i transformaty te są równe.



**Dowód** Niech  $h(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$  oraz niech  $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$  w sensie klasycznym. Wówczas  $h$  spełnia warunki 1 i 2 oraz  $Dh = f$ . Ponadto, zgodnie z tw. o transformacie całki w sensie klasycznym  $\mathcal{L}\{h\}(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f\}(s) = \frac{1}{s}F(s) = H(s)$ . Zatem z poprzedniej definicji wynika, że wyznaczając tę transformatę w sensie dystrybucyjnym dostajemy

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{Dh\} = sH(s) = s\frac{1}{s}F(s) = F(s)$$

co kończy dowód. □

### Przykłady

1.  $T = \delta$ . Ponieważ  $\delta = D^2h(t)$ , gdzie  $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$  spełnia 1 i 2, więc

$$\mathcal{L}\{\delta\}(s) = s^2\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = s^2\frac{1}{s^2} = 1$$

(funkcja stała nie należała do przestrzeni obrazów klasycznej transformaty).

2.  $T = \delta^{(n)}$ . Ponieważ  $\delta^{(n)} = D^{n+2}h(t)$ , więc

$$\mathcal{L}\{\delta^{(n)}\}(s) = s^{n+2}\frac{1}{s^2} = s^n - \text{wielomiany!}$$

3.  $T = \delta(t-a)$ , gdzie  $\langle \delta(t-a), \varphi \rangle := \varphi(a)$ . Ponieważ  $\delta(t-a) = D^2h(t-a)$ , więc na mocy własności klasycznej transformaty (tw. o przesunięciu) otrzymujemy

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = s^2e^{-as}\frac{1}{s^2} = e^{-as}$$

### 5.3.1 Najważniejsze własności $\mathcal{L}$ -transformaty dystrybucji

Założmy, że  $T \in \mathcal{D}'_0$  tzn.  $T = D^k h(t)$ ,  $h(t)$  spełnia warunki 1 i 2 oraz

$$\mathcal{L}\{T\}(s) = s^k\mathcal{L}\{h\}(s) = s^kH(s) = F(s)$$

**Definicja 5.3.2** Niech  $b \in \mathbb{R}$ . Wówczas operator przesunięcia  $\tau_b$  określony na funkcjach klasycznych równościami  $\tau_b\varphi(t) = \varphi(t-b)$  definiujemy w przestrzeni dystrybucji jako

$$\langle \tau_b T | \varphi \rangle = \langle T | \varphi(t+b) \rangle$$

(„uzasadnieniem” tej definicji jest następująca równość dla funkcji lokalnie całkowalnych

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-b)\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t+b) dt$$

Przykładowo,  $\langle \tau_b \delta | \varphi \rangle = \langle \delta | \varphi(t+b) \rangle = \varphi(b)$  - por. poprzedni przykład.

**Twierdzenie 5.3.2 (O przesunięciu)** Dla każdego  $b > 0$  prawdziwy jest wzór

$$\mathcal{L}\{\tau_b T\}(s) = e^{-bs}F(s)$$

**Dowód**

$$\begin{aligned}\langle \tau_b T | \varphi(t) \rangle &= \langle D^k h(t) | \varphi(t+b) \rangle = (-1)^k \langle h(t) | \varphi^{(k)}(t+b) \rangle = \\ &= (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \varphi^{(k)}(t+b) dt = \\ &= (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-b) \varphi^{(k)}(t) dt = \langle D^k h(t-b) | \varphi \rangle\end{aligned}$$

co oznacza, że  $\tau_b T = D^k h(t-b)$ . Zatem

$$\mathcal{L}\{\tau_b T\}(s) = \mathcal{L}\{D^k h(t-b)\}(s) = s^k e^{-bs} H(s) = e^{-bs} F(s)$$

□

Analogicznie do operatora przesunięcia wprowadzamy w przestrzeni dystrybucji operację mnożenia dystrybucji przez funkcję klasy  $C^\infty$ . Ponieważ dla  $f$  - lokalnie całkowalnych,  $\varphi \in \mathcal{D}$ ,  $\psi \in C^\infty$  zachodzi oczywisty wzór  $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t)\psi(t))\varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\psi(t)\varphi(t)) dt$ , więc w naturalny sposób wprowadzamy następującą definicję mnożenia dystrybucji  $T \in \mathcal{D}'$  przez funkcję  $\psi \in C^\infty$ .

**Definicja 5.3.3**  $\langle T\psi | \varphi \rangle := \langle T | \psi\varphi \rangle$

**Twierdzenie 5.3.3 (przesunięcie w dziedzinie zespolonej)** *Jeżeli  $T \in \mathcal{D}'_o$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ , to zachodzi wzór*

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} T\}(s) = F(s + \alpha)$$

**Dowód** Niech  $T = D^k h$ . Wówczas ze wzoru Leibniza otrzymujemy

$$\begin{aligned}\langle e^{-\alpha t} T | \varphi \rangle &= \langle T | e^{-\alpha t} \varphi \rangle = \langle D^k h | e^{-\alpha t} \varphi \rangle = (-1)^k \left\langle h \left| \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-\alpha)^i e^{-\alpha t} D^{k-i} \varphi \right. \right\rangle = \\ &= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-\alpha)^i \underbrace{\langle h | e^{-\alpha t} \varphi^{(k-i)} \rangle}_{\langle h e^{-\alpha t} | \varphi^{(k-i)} \rangle} = \\ &= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-\alpha)^i (-1)^{k-i} \langle D^{k-i} (h(t) e^{-\alpha t}) | \varphi \rangle = \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^i \langle D^{k-i} (h(t) e^{-\alpha t}) | \varphi \rangle\end{aligned}$$

W takim razie  $e^{-\alpha t} T = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^i D^{k-i} (h(t) e^{-\alpha t})$ , a więc

$$\mathcal{L}\{e^{-\alpha t} T\}(s) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^i s^{k-i} H(s + \alpha) = H(s + \alpha) \cdot (s + \alpha)^k = F(s + \alpha)$$

co kończy dowód. □

**Twierdzenie 5.3.4 (o transformacie pochodnej)** Jeśli  $T \in \mathcal{D}'_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , to prawdziwy jest wzór

$$\mathcal{L}\{D^n T\}(s) = s^n F(s)$$

**Dowód** Niech  $T = D^k h(t)$ , zatem  $D^n T = D^{n+k} h(t)$ . Stąd

$$\mathcal{L}\{D^n T\}(s) = \mathcal{L}\{D^{n+k} h\}(s) = s^{n+k} H(s) = s^n F(s)$$

co kończy dowód.  $\square$

### Uwaga

Powyższy wzór różni się pozornie od sformułowania klasycznego. W sformułowaniu klasycznym prawdziwy jest wzór

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - f(0^+) s^{n-1} - f'(0^+) s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Występująca między obydwooma przypadkami różnica jest jednak tylko pozorna. Jeżeli oznaczymy przez  $[f]$  dystrybucję generowaną przez funkcję  $f$  (równą 0 dla  $t < 0$ ), to łatwo pokazać przez indukcję względem  $n$ , że pochodna w sensie dystrybucyjnym  $D^n [f]$  może być wyznaczona jako

$$D^n [f] = [f^{(n)}] + f^{(n-1)}(0^+) \delta + \dots + f(0^+) \delta^{(n-1)}. \quad (5.1)$$

Najpierw obliczamy dla  $n = 1$  jak następuje

$$\begin{aligned} \langle Df | \varphi \rangle &= -\langle f | \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt = -\int_{-\infty}^0 \underbrace{f(t)}_0 \varphi'(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \\ &= -f(t) \varphi(t) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = f(0^+) \underbrace{\langle \delta | \varphi \rangle}_{\varphi(0)} + \langle f' | \varphi \rangle \end{aligned}$$

tzn.  $D[f] = [f'] + f(0^+) \delta$ . Stąd dalej łatwo przez indukcję uzyskać wzór (5.1) dla dowolnego  $n$ . Stosując do wzoru (5.1) twierdzenie o transformacie pochodnej (w sensie dystrybucyjnym) otrzymujemy

$$s^n \mathcal{L}\{f\}(s) = \mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) + f^{(n-1)}(0^+) + \dots + f(0^+) s^{n-1},$$

który jest równoważny wzorowi klasycznemu.

**Twierdzenie 5.3.5 (o różniczkowaniu transformaty)** Dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  prawdziwy jest wzór:

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n T\}(s), \quad \text{gdzie } \mathcal{L}\{T\}(s) = F(s)$$

**Dowód** dla  $n = 1$ :

$$F(s) = s^k H(s), \quad T = D^k h, \quad h - \text{ciągła}$$

$$F'(s) = k s^{k-1} \cdot H(s) + s^k H'(s)$$

$$\mathcal{L}\{k D^{k-1} h(t) + D^k(-t \cdot h(t))\}(s) = k s^{k-1} H(s) + s^k H'(s) = F'(s)$$

Ponieważ  $D^k(-th(t)) = -\binom{k}{0} t D^k h(t) - \binom{k}{1} D^{k-1} h(t)$ , to

$$F'(s) = \mathcal{L}\{k D^{k-1} h(t) + D^k(-t \cdot h(t))\}(s) = \mathcal{L}\{-t D^k h(t)\}(s) = \mathcal{L}\{-t T\}(s)$$

$\square$

### 5.3.2 Splot dystrybucji

$T_1, T_2 \in D'_0$  (czyli  $T_1 = D^{k_1} h_1, T_2 = D^{k_2} h_2, h_1(t) = h_2(t) = 0$  dla  $t < 0$ )

**Definicja 5.3.4**

$$T_1 * T_2 = (D^{k_1} h_1) * (D^{k_2} h_2) \stackrel{def}{=} D^{k_1+k_2}(h_1 * h_2)$$

**Uwaga 5.3.1** Jeżeli splot dystrybucji istnieje w sensie klasycznym, to istnieje w sensie dystrybucyjnym i są sobie równe.

**Dowód**

$$T_1 = D(h_1 * \mathbb{1}) \quad (h * \mathbb{1})(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$

$$T_2 = D(h_2 * \mathbb{1})$$

$$T_1 * T_2 = D^2(h_1 * \mathbb{1} * h_2 * \mathbb{1}) = D^2(((h_1 * h_2) * \mathbb{1}) * \mathbb{1}) = D^1((h_1 * h_2) * \mathbb{1}) = h_1 * h_2$$

□

**Twierdzenie 5.3.6 (Borela)** Jeżeli  $\mathcal{L}\{T_1\} = H_1, \mathcal{L}\{T_2\} = H_2$ , to

$$\mathcal{L}\{T_1 * T_2\} = H_1 \cdot H_2$$

**Dowód**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{T_1 * T_2\}(s) &= \mathcal{L}\{D^{k_1} h_1 * D^{k_2} h_2\}(s) = \mathcal{L}\{D^{k_1+k_2}(h_1 * h_2)\}(s) = \\ &= s^{k_1+k_2} \mathcal{L}\{h_1 * h_2\}(s) = \\ &\quad \text{z twierdzenia Borela o splocie (4.4.2)} \\ &= \underline{s^{k_1}} \cdot s^{k_2} \cdot \underline{\mathcal{L}\{h_1\}(s)} \cdot \underline{\mathcal{L}\{h_2\}(s)} = \underline{H_1(s)} \cdot \underline{H_2(s)} \end{aligned}$$

□

### Własności splotu dystrybucji

**Własność 5.3.1 (Splot z dystrybucją  $\delta$ )**  $\delta$  jest jedynką w algebrze dystrybucji.

**Dowód**

$$\delta = D^2 \tilde{h}, \quad \tilde{h}(t) = \begin{cases} t & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}, \quad \tilde{h}(t) = \int_0^t d\tau = \mathbb{1}_+ * \mathbb{1}_+$$

$$\underline{T} * \delta = D^k h * D^2 \tilde{h} = D^{k+2}(h * \tilde{h}) = D^{k+2}(h * \mathbb{1}_+ * \mathbb{1}_+) = D^k(h) = \underline{T}$$

□

**Własność 5.3.2 (Splot z dystrybucją  $\delta^{(n)}$ )** Splot z  $\delta^{(n)}$  to różniczkowanie rzędu  $n$ .

**Dowód**

$$\underline{T * \delta^{(n)}} = D^k h * D^{n+2}(\mathbb{1}_+ * \mathbb{1}_+) = D^{k+n+2}(h * \mathbb{1}_+ * \mathbb{1}_+) = D^{k+n}(h) = D^n(D^k h) = \underline{D^n T}$$

□

**Własność 5.3.3**

$$\begin{aligned}
\underline{D^n(T_1 * T_2)} &= T_1 * T_2 * \delta^{(n)} = \\
&= T_1 * (T_2 * \delta^{(n)}) = \underline{T_1 * D^n T_2} = \\
&= (T_1 * \delta^{(n)}) * T_2 = \underline{D^n T_1 * T_2}
\end{aligned}$$

**Uwaga 5.3.2** *Równanie różniczkowe w przestrzeni dystrybucji*

$$c_n D^n y + c_{n-1} D^{n-1} y + \dots + c_1 D y + c_0 y = f, \quad c_0, \dots, c_n - \text{stałe}$$

można zapisać w równoważnej postaci splotowej

$$(c_n \delta^n + c_{n-1} \delta^{n-1} + \dots + c_1 \delta^{(1)} + c_0 \delta) * y = f.$$

**Własność 5.3.4**

Jeżeli  $L(y_\delta) = \delta$  (rozwiązanie dystrybucyjne z  $f = \delta$ ), gdzie  $L(y) = c_n D^n y + \dots + c_1 D y + c_0 y$ , to  $\underline{L(y_\delta * f)} \stackrel{5.3.3}{=} L(y_\delta) * f = \delta * f = f$ . Zatem  $y_\delta * f$  jest rozwiązaniem równania z dowolnym  $f$ .  $y_\delta$  - to tzw. rozwiązanie podstawowe.

## Rozdział 6

# Uzupełnienie własności klasycznej transformaty Fouriera

Przypomnienie:  $f(t)$  - funkcja bezwzględnie całkowna na  $\mathbb{R}$ . Wówczas:

$$\mathcal{F}[f](y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} f(t) dt = F(y)$$

$$f(t) = V.P. \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ity} F(y) dy$$

### 6.1 Własności $\mathcal{F}$ transformaty

**Własność 6.1.1 (Pochodna transformaty)**

$$\frac{d^k F}{dy^k} = (-i)^k \mathcal{F}[t^k f(t)], \quad t^k f(t) - \text{bezwzględnie całkowna}$$

**Własność 6.1.2 (Różniczkowanie funkcji  $f$  (transformata pochodnej))**

$$\mathcal{F}[f'(t)](y) = iy \mathcal{F}[f(t)](y)$$

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)](y) = (iy)^n \mathcal{F}[f(t)](y)$$

**Własność 6.1.3 (Transformata całki)**

$$\mathcal{F} \left[ \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right] (y) = \frac{1}{iy} \mathcal{F}[f](y)$$

*o ile istnieje transformata funkcji po lewej stronie.*

**Własność 6.1.4 (Twierdzenie o przesunięciu)**

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)](y) = e^{-iyt_0} \mathcal{F}[f(t)](y)$$

**Własność 6.1.5**

$$\mathcal{F}[e^{iy_0 t} f(t)](y) = F(y - y_0)$$

**Własność 6.1.6**

$$\mathcal{F}[f(t) \cos y_0 t](y) = \frac{1}{2} (F(y - y_0) + F(y + y_0))$$

**Własność 6.1.7**

$$\mathcal{F}[f(t) \sin y_0 t](y) = \frac{1}{2i} (F(y - y_0) - F(y + y_0))$$

**Własność 6.1.8 (Twierdzenie Borela)**

$$\mathcal{F}[f_1 * f_2] = \mathcal{F}[f_1] \cdot \mathcal{F}[f_2]$$

**Twierdzenie 6.1.1 (Tożsamość Parsewala)** *Jeżeli  $\mathcal{F}[g_1] = G_1$ ,  $\mathcal{F}[g_2] = G_2$ , to zachodzi tożsamość:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(u) G_2(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(u) g_2(u) du$$

**Dowód**

$$\begin{aligned} L &= \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u) G_2(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuv} g_2(v) dv \right) du = \\ &\quad \text{(zmieniamy kolejność całkowania)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g_2(v) dv \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u) \cdot e^{-iuv} du = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(v) G_1(v) dv = P \end{aligned}$$

□

**Wniosek 6.1.1 (inna postać tożsamości Parsewala)** *Niech  $g_2 = \mathcal{F}^{-1}[\overline{g_1}]$ , wtedy  $G_2 = \overline{g_1}$*

$$g_2 = \mathcal{F}^{-1}[\overline{g_1}](u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iuv} \overline{g_1(v)} dv = \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuv} g_1(v) dv} = \frac{1}{2\pi} \overline{G_1(u)}$$

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(u) \cdot \overline{g_1(u)} du = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(u) \cdot g_2(u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_1(u) \overline{G_1(u)} du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_1(u)|^2 du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G_1(u)|^2 du$$

$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

(gdyby w definicji dobrać współczynniki przy całkach równomiernie, to byłaby to izometria w  $L^2(\mathbb{R})$ )

# Rozdział 7

## Ciąg dalszy dystrybucji

### 7.1 Dystrybucje temperowane

**Definicja 7.1.1** Funkcja  $f(t)$  jest szybko malejąca  $\Leftrightarrow$

$$\forall n, k \in \mathbb{N} \exists c_{n,k} \quad |t^n \varphi^{(k)}| \leq c_{n,k}.$$

Zbiór funkcji szybko malejących oznaczamy przez  $\Phi$ .

**Uwaga 7.1.1** Zachodzi oczywista inkluzja  $D \subset \Phi$ , bowiem każda funkcja o nośniku zwartym jest szybko malejąca. Co więcej, rozważając przykład funkcji  $\varphi(t) = e^{-t^2} \in \Phi$  łatwo zauważyć, że  $\varphi \notin D$ , zatem  $D \subsetneq \Phi$ .

**Definicja 7.1.2** Mówimy, że ciąg funkcji  $\varphi_n \in \Phi$  zbiega do  $\varphi \in \Phi \Leftrightarrow \forall m, k \in \mathbb{N} \ t^m \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows t^m \varphi^{(k)}$  (zb. jednostajna).

**Definicja 7.1.3** Dystrybucją wolnorosnącą (temperowaną) nazywamy funkcjonal liniowy i ciągły na przestrzeni  $\Phi$ . Zbiór dystrybucji wolnorosnących oznaczamy  $\Phi'$ .

**Uwaga 7.1.2** Jeżeli  $f \in \Phi'$ , to  $f \in D'$ , zatem  $\Phi' \subset D'$ .

Rozważmy następujący przykład:

**Przykład 7.1.1**

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2} \varphi(n).$$

a więc dla  $\varphi(t) = e^{-t^2}$  otrzymujemy

$$\langle T, e^{-t^2} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2} e^{-n^2} = \infty.$$

Zatem  $T \notin \Phi'$ ,  $T \in D'$ .

Przyjęcie powyższej definicji dystrybucji temperowanej jest uzasadnione tym, że w przypadku funkcji klasycznych (dystrybucji regularnych) mamy:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt,$$



gdzie  $\varphi \in \Phi$ . O ile zachodzi oszacowanie:

$$|f(t)| \leq Ct^n.$$

to całka powyższa istnieje dla każdej funkcji szybko malejącej  $\varphi$ . Funkcje takie nazywamy wolnorosnącymi. Każda wolnorosnąca funkcja wyznacza dystrybucję temperowaną.

## 7.2 Transformata Fouriera dystrybucji

Przypomnijmy sobie równość Parsevala:

Jeśli  $G_1 = \mathcal{F}[g_1]$  i  $G_2 = \mathcal{F}[g_2]$ , to:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(u)G_2(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(u)G_1(u) du.$$

**Definicja 7.2.1**

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle,$$

gdzie  $\varphi \in \Phi$ .

**Uwaga 7.2.1** Uzasadnienie powyższej definicji wynika z przedstawionej wyżej równości Parsevala.

**Twierdzenie 7.2.1** Jeśli  $\varphi \in \Phi$ , to  $\mathcal{F}[\varphi] \in \Phi$ .

**Dowód** Niech  $F = \mathcal{F}[\varphi]$ . Mamy:

$$F^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^k e^{-i\omega t} \varphi(t) dt.$$

Dokonajmy oszacowania:

$$|(i\omega)^n F^{(k)}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d^n}{dt^n} ((-it)^k \varphi(t)) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n}{dt^n} ((-it)^k \varphi(t)) \right| dt \leq C_{n,k} \Rightarrow F \in \Phi.$$

□

**Uwaga 7.2.2** Przekształcenie:  $\mathcal{F} : \Phi \rightarrow \Phi$  jest ciągle. Wystarczy pokazać ciągłość w zerze. Czyli, że jeśli  $\varphi_n \rightarrow 0$ , to  $\mathcal{F}\varphi_n \rightarrow 0$ .

**Uwaga 7.2.3** Niech  $f \in \Phi'$  oraz  $\varphi_n \rightarrow 0$ . Mamy

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi_n \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi_n \rangle \rightarrow \langle f, 0 \rangle = 0.$$

Stąd  $\mathcal{F}[f]$  jest ciągle.

### 7.2.1 Własności

**Twierdzenie 7.2.2 (Własności transformaty Fouriera dystrybucji)** Niech  $F = \mathcal{F}[f]$ . Wtedy:

1.  $\mathcal{F}[(-it)^k f(t)] = F^{(k)}(\omega)$ .

2.  $\mathcal{F}[D^k f] = (i\omega)^k F(\omega)$ .

3.  $\mathcal{F}[f(t - \tau)] = e^{-i\omega\tau} \mathcal{F}[f]$ .

4. Niech  $f = \delta^{(k)}(t - \tau)$ .

Wtedy:

$\mathcal{F}[f] = (it)^k e^{-it\tau}$ . W szczególności:

- $\mathcal{F}[\delta] = 1$ ,
- $\mathcal{F}[\delta(t - \tau)] = e^{-it\tau}$ ,
- $\mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (it)^k$ .

5.  $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta$ .

6.  $\mathcal{F}[e^{-it\tau}] = 2\pi\delta(\omega + \tau)$ .

7.  $\mathcal{F}[(it)^k] = (-1)^k 2\pi\delta^{(k)}$ .

8.  $\mathcal{F}[(it)^k e^{-it\tau}] = (-1)^k 2\pi\delta^{(k)}(\omega + \tau)$ .

9.  $\mathcal{F}[at^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0] = 2\pi[a_n i^n \delta^{(n)} + a_{n-1} (i)^{n-1} \delta^{(n-1)} + \dots + a_0 \delta]$ .

**Dowód** [Własność 1] Weźmy  $k = 1$  (dalej przez indukcję):

$$\begin{aligned} \langle F', \varphi \rangle &= -\langle F, \varphi' \rangle = -\langle f, \mathcal{F}(\varphi') \rangle = -\langle f, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi'(\omega) d\omega \rangle = -\langle f, \int_{-\infty}^{\infty} (it) e^{-i\omega t} \varphi(\omega) d\omega \rangle = \\ &= -\langle f, it \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi(\omega) d\omega \rangle = \langle -it \cdot f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = \langle \mathcal{F}[-it \cdot f], \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

**Dowód** [Własność 2]

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[D^k f], \varphi \rangle &= \langle D^k f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle = (-1)^k \langle f, \frac{d^k}{d\omega^k} \mathcal{F}[\varphi] \rangle = (-1)^k \langle f, \mathcal{F}[(-it)^k \varphi(t)] \rangle = \langle \mathcal{F}[f], (it)^k \varphi(t) \rangle = \\ &= \langle \mathcal{F}[f](it)^k, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

**Dowód** [Własność 4]

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle &= \langle \delta^{(k)}(t - \tau), \mathcal{F}\varphi \rangle = (-1)^k (\mathcal{F}\varphi)^{(k)}(\tau) = (-1)^k \mathcal{F}[(-it)^k \varphi(t)](\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau} (it)^k \varphi(t) dt = \\ &= \langle e^{-it\tau} (it)^k, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

**Dowód** [Własność 5]

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[1], \varphi \rangle &= \langle 1, \mathcal{F}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} 1 d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \cdot 0} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t) dt = \\ &= 2\pi\varphi(0) = \langle 2\pi\delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

□

**Lemat 7.2.1** *Zachodzi następująca tożsamość:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\lambda} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 2n\pi).$$

**Dowód**

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda}, \varphi(\lambda) \right\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-in\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda = \\ &= \left| \begin{array}{l} \lambda - 2k\pi = r \\ d\lambda = dr \end{array} \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in(r+2k\pi)} \varphi(r+2k\pi) dr = \\ &= |\text{niech } \varphi_k(r) = \varphi(r+2k\pi)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-in2k\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inr} \varphi_k(r) dr = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k) \end{aligned}$$

gdzie  $c_n(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inr} \varphi_k(r) dr$  są współczynnikami Fouriera funkcji  $\varphi_k$ .

Wyrażenie  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k)$  jest wartością sumy szeregu Fouriera tej funkcji w punkcie  $r_k = -2k\pi$ , a zatem z okresowości tej sumy mamy

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k) = \varphi_k(0) = \varphi(2k\pi).$$

Wynika stąd, że

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2k\pi) = \left\langle 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - 2k\pi), \varphi \right\rangle$$

co kończy dowód. □

## 7.2.2 Wzór sumacyjny Poissona

**Twierdzenie 7.2.3 (Wzór sumacyjny Poissona)** *Jeżeli  $F = \mathcal{F}[\varphi]$ , to zachodzi wzór:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2n\pi).$$

**Dowód** Z poprzedniego lematu wynika, że

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - n), \mathcal{F}\varphi \right\rangle = \left\langle \mathcal{F} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - n) \right), \varphi \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\lambda}, \varphi \right\rangle = \left\langle 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 2n\pi), \varphi \right\rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2n\pi). \end{aligned}$$

□

### 7.2.3 Tożsamość Jacobiego

Zastosujmy wzór sumacyjny Poissona dla funkcji  $\varphi(x) = e^{-tx^2}$ , dla  $t > 0$ . Wiadomo, że  $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ . Dokonując podstawienia  $t = \frac{\tau}{4\pi^2}$  otrzymujemy następującą postać powyższej tożsamości:

$$\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau n^2}.$$

Wzór ten nazywamy tożsamością Jacobiego.

# Rozdział 8

## Funkcje Bessela

### 8.1 Wprowadzenie

R.r. Bessela, ;  $\nu$  - parametr

$$(\star) \quad u'' + \frac{1}{z}u'(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0 \quad u = u(z), \quad z, \nu \in \mathbb{C}$$

**Definicja 8.1.1** Funkcją Bessela I-go rodzaju o wskaźniku  $\nu$  nazywamy funkcję:

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k} \quad z, \nu \in \mathbb{C}$$

**Twierdzenie 8.1.1** Funkcja  $J_\nu(z)$  jest rozwiązaniem równania  $(\star)$ .

**Dowód**

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{\nu+2k}, \text{ gdzie } \alpha_k = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1) \cdot 2^{\nu+2k}}$$

$$J'_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\nu+2k) z^{\nu+2k-1}$$

$$J''_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (\nu+2k)(\nu+2k-1) z^{\nu+2k-2}$$

Teraz wystarczy wstawić do  $(\star)$ .

□

**Uwaga 8.1.1** Prawdziwe są wzory:

- Dla  $\nu = n \in \mathbb{N}$

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$$

- Dla  $\nu = -n$

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s}}{(n+s)! \cdot s!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s} = (-1)^n J_n(z)$$

- $J_{-\nu}(z)$ ,  $J_\nu(z)$ ,  $\nu \neq n$  są liniowo niezależne, czyli każde rozwiązanie równania  $(\star)$  można zapisać:

$$u(z) = c_1 \cdot J_\nu(z) + c_2 \cdot J_{-\nu}(z)$$

**Definicja 8.1.2** Funkcją Bessela II-go rodzaju o wskaźniku  $\nu$  nazywamy funkcję

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi} \quad z, \nu \in \mathbb{C}$$

Gdy  $\nu = n$ , to wyrażenie definiujące funkcję Bessela II-go rodzaju traktujemy jako granicę.

$$\left( \lim_{\nu \rightarrow n} \left( \frac{0}{0} \right)^{\text{reguła Hospitala}} \dots \right)$$

**Uwaga 8.1.2**

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\frac{d}{d\nu} (J_\nu(z)) \cdot \cos \nu\pi - J_\nu(z) \cdot \pi \cdot \sin \nu\pi - \frac{d}{d\nu} (J_{-\nu}(z))}{\pi \cdot \cos \nu\pi} = \\ &= \frac{\frac{d}{d\nu} (J_\nu(z))|_{\nu=n} (-1)^n - \frac{d}{d\nu} (J_{-\nu}(z))|_{\nu=n}}{\pi (-1)^n} \end{aligned}$$

**Twierdzenie 8.1.2** Funkcja

$$u(z) = c_1 J_\nu(z) + c_2 Y_\nu(z)$$

jest rozwiązaniem ogólnym równania  $(\star)$ .

**Twierdzenie 8.1.3** Zachodzi wzór:

$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k} \left\{ 2 \ln \frac{z}{2} - \Psi(k+1) - \Psi(k+n+1) \right\}$$

gdzie  $\Psi = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$  oraz dla  $n = 0$  tylko drugi szereg jest niezerowy.

**Twierdzenie 8.1.4** Własności funkcji  $J_\nu(z)$

1.  $\frac{d}{dz} [z^\nu \cdot J_\nu(z)] = z^\nu \cdot J_{\nu-1}(z)$
2.  $\frac{d}{dz} [z^{-\nu} \cdot J_\nu(z)] = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z)$
3.  $J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} \cdot J_\nu(z)$
4.  $J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z)$

**Dowód**

- Ad 1.

Ponieważ  $z^\nu J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}}$  oraz  $\Gamma(k+\nu+1) = (k+\nu)\Gamma(k+\nu)$ , więc

$$\frac{d}{dz} [z^\nu J_\nu(z)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(\nu+k)(-1)^k z^{2\nu+2k-1}}{\Gamma(k+1) \cdot (k+\nu)\Gamma(k+\nu)2^{\nu+2k}} = z^\nu \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+(\nu-1)}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(\nu-1)+1)2^{2k+(\nu-1)}} = z^\nu J_{\nu-1}(z)$$

- Ad 2.

Ponieważ  $z^{-\nu} J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}}$  oraz  $\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)$  dla  $k > 0$ , więc

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [z^{-\nu} J_\nu(z)] &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k(-1)^k z^{2k-1}}{k\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}} = -z^{-\nu} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} z^{2(k-1)+(\nu+1)}}{\Gamma((k-1)+1)\Gamma((k-1)+(\nu+1)+1)2^{(\nu+1)+2(k-1)}} = \\ &= -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z) \end{aligned}$$

- Ad 3. i 4.

$$\nu \cdot z^{\nu-1} \cdot J_\nu(z) + z^\nu \cdot J'_\nu(z) = z^\nu J_{\nu-1}(z) \quad | : z^\nu$$

(Prosta obserwacja do 1. - zapisujemy:  $\frac{d}{dz} [z^\nu \cdot J_\nu(z)] = \frac{d}{dz} [z^\nu] \cdot J_\nu(z) + z^\nu \cdot \frac{d}{dz} [J_\nu(z)]$ )

$$-\nu \cdot z^{-\nu-1} \cdot J_\nu(z) + z^{-\nu} \cdot J'_\nu(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z) \quad | : z^{-\nu}$$

(Prosta obserwacja do 2. - analogicznie)

Otrzymujemy:

$$\begin{cases} \frac{\nu}{z} J_\nu(z) + J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) & (a) \\ -\frac{\nu}{z} J_\nu(z) + J'_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) & (b) \end{cases}$$

Jak dodamy stronami (a) i (b), to otrzymamy własność 3., a jak odejmiemy stronami, to otrzymamy własność 4.

□

**Uwaga 8.1.3** Szczególny przypadek 4.:

$$\begin{aligned} 2J'_0(z) &= J_{-1}(z) - J_1(z) = -2J_1(z) \\ \boxed{J'_0(z) &= -J_1(z)} \end{aligned}$$

**Definicja 8.1.3** (Funkcja tworząca)

Niech

$$w(z, t) = e^{\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})z}$$

**Twierdzenie 8.1.5** Wówczas

$$(\diamond) \quad w(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z) \cdot t^n, \text{ gdzie } c_n(z) = J_n(z).$$

(aby udowodnić wzór  $(\diamond)$  wystarczy rozwinąć funkcję  $e^{\frac{1}{2}(t-\frac{1}{t})z}$  w szereg Laurenta względem zmiennej  $t$  - korzystamy z rozwinięcia  $e^z$  w szereg i grupujemy odpowiednie wyrazy)

**Twierdzenie 8.1.6** (własności funkcji  $Y_\nu(z)$ )

Wzory 1. - 4. z twierdzenia 8.1.4 obowiązują dla  $Y_\nu(z)$

**Twierdzenie 8.1.7** (twierdzenie o zerach)

Funkcja  $J_n(z)$  nie ma zer zespolonych, ma nieskończenie wiele zer rzeczywistych, symetrycznych względem  $z = 0$ . Punkt  $z = 0$  jest zerem o krotności  $n$  dla funkcji  $J_n(z)$ . Pozostałe zera są jednokrotne.

**Definicja 8.1.4** Szereg Fouriera - Bessela

Weźmy  $f(r)$  określoną na przedziale domkniętym  $[0, a]$ . Szeregiem Fouriera - Bessela nazywamy szereg postaci:

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_{\nu} \left( x_{\nu_m} \cdot \frac{r}{a} \right)$$

gdzie  $(x_{\nu_m})_m$  - ciąg dodatnich zer funkcji  $J_{\nu}$

**Twierdzenie 8.1.8**  $\{J_{\nu}(x_{\nu_m} \cdot \frac{r}{a})\}_{m=1}^{\infty}$  - tworzy układ ortogonalny z wagą  $h(r) = r$ .

**Dowód** Oznaczmy  $u_{\alpha}(r) = J_{\nu}(\alpha r)$ , wtedy  $u'_{\alpha}(r) = \alpha J'_{\nu}(\alpha r)$ ,  $u''_{\alpha}(r) = \alpha^2 J''_{\nu}(\alpha r)$

Wiemy, że funkcja Bessela I-go rodzaju spełnia r.r. Bessela, zatem prawdziwa jest równość:

$$\begin{cases} u''_{\alpha} + \frac{1}{r}u'_{\alpha} + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)u_{\alpha} = 0 & \cdot ru_{\beta} \\ u''_{\beta} + \frac{1}{r}u'_{\beta} + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)u_{\beta} = 0 & \cdot ru_{\alpha} \end{cases}$$

Odejmujemy dwie ostatnie równości stronami i otrzymujemy:

$$(\alpha^2 - \beta^2) ru_{\alpha} u_{\beta} = \left[ r (u_{\alpha} u'_{\beta} - u'_{\alpha} u_{\beta}) \right]'$$

Rozważamy iloczyn skalarny:

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^a ru_{\alpha} u_{\beta} dr = \left[ r (u_{\alpha} u'_{\beta} - u'_{\alpha} u_{\beta}) \right]_{r=0}^{r=a}$$

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^a r J_{\nu}(\alpha r) J_{\nu}(\beta r) dr = a\beta J_{\nu}(\alpha a) J'_{\nu}(\beta a) - a\alpha J'_{\nu}(\alpha a) J_{\nu}(\beta a)$$

Niech  $\alpha = \frac{x_{\nu_m}}{a}$ ,  $\beta = \frac{x_{\nu_n}}{a}$   $\alpha \neq \beta$ ,  $n \neq m$

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^a r J_{\nu} \left( \nu_m \cdot \frac{r}{a} \right) J_{\nu} \left( \nu_n \cdot \frac{r}{a} \right) dr = 0, \text{ ponieważ}$$

$$a \cdot \frac{x_{\nu_n}}{a} \cdot J_{\nu} \left( \frac{x_{\nu_m}}{a} \cdot a \right) J'_{\nu} \left( \frac{x_{\nu_n}}{a} \cdot a \right) - a \cdot \frac{x_{\nu_m}}{a} \cdot J'_{\nu} \left( \frac{x_{\nu_m}}{a} \cdot a \right) J_{\nu} \left( \frac{x_{\nu_n}}{a} \cdot a \right) = 0$$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b h(x) f(x) g(x) dx - \text{iloczyn skalarny z wagą } h.$$

W tym przypadku waga jest równa  $h(r) = r \geq 0$ . □

**Uwaga 8.1.4** Można pokazać, że  $\{J_{\nu}(x_{\nu_m} \cdot \frac{r}{a})\}$  jest zupełny w  $L^2$ , to znaczy:

$$\langle \gamma, J(x_{\nu_m} \cdot \frac{r}{a}) \rangle = 0 \quad \forall m = 1, 2, \dots \Rightarrow \gamma = 0$$

**Uwaga 8.1.5**

$$\int_0^a r J_{\nu}^2 \left( x_{\nu_m} \cdot \frac{r}{a} \right) dr = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{\nu_m}) \quad (\Delta) \quad (> 0)$$

**Wniosek 8.1.1** (z poprzedniej uwagi, bo wyrażenie  $(\Delta)$  jest różne od zera)

$$c_m = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu_m})} \int_0^a r f(r) J_{\nu} \left( x_{\nu_m} \cdot \frac{r}{a} \right) dr \quad m = 1, 2, \dots$$



**Twierdzenie 8.1.9** (warunki dostateczne)

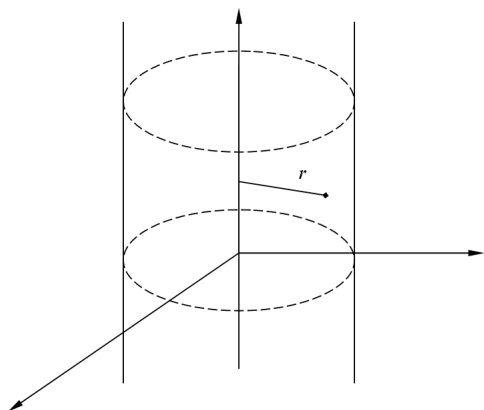
Jeśli

1.  $f(r)$  jest przedziałami ciągła i przedziałami monotoniczna (o wahanu skończonym),
2. istnieje całka  $\int_0^a \sqrt{r} |f(r)| dr < \infty$ ,

to szereg Fouriera - Bessela jest zbieżny w każdym punkcie ciągłości funkcji  $f$  do  $f(r)$ .

(zbieżny do  $\frac{f(r^+) + f(r^-)}{2}$ )

**Przykład 8.1.1**  $0 \leq r < a, \quad t > 0$



$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{k} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

Warunki:

$$\begin{cases} v = v_0 & \text{dla } r = a \\ v = 0 & \text{dla } t = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{V}|_{r=a} = \frac{v_0}{s}$$

$\bar{V}$  - transformata Laplace'a względem  $t$ ,  $r$  - parametr

$$\bar{V} = \mathcal{L}\{v\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} v(r, t) dt$$

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} = \frac{s}{k} \cdot \bar{V} \quad q^2 = -\frac{s}{k}, \text{ bo to liczba zespolona}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial r} + q^2 \cdot \bar{V} = 0 - \text{ jest to równanie różniczkowe zwyczajne (r.r. Bessela dla } \nu = 0)$$

Zatem rozwiązanie jest postaci:

$$\bar{V} = c_1 \cdot J_0(q \cdot r) + c_2 \cdot Y_0(q \cdot r)$$

Ale z ograniczoności rozwiązania wynika, że:  $c_2 = 0$

$$\bar{V} = c_1 \cdot J_0(q \cdot r)$$

Żeby wyliczyć stałą  $c_1$  musimy obliczyć transformatę warunku brzegowego, czyli:

$$\bar{V}|_{r=a} = \frac{v_0}{s} \Rightarrow c_1 \cdot J_0(q \cdot a) = \frac{v_0}{s}$$

$$c_1 = \frac{v_0}{s \cdot J_0(q \cdot a)}$$

Zatem transformata rozwiązania jest postaci:

$$\bar{V} = \frac{v_0 \cdot J_0(q \cdot r)}{s \cdot J_0(q \cdot a)}$$

Obliczamy transformatę odwrotną (uogólniona metoda residuów):

$$v(r, s) = \sum \text{res} \left[ e^{st} \cdot \frac{v_0 \cdot J_0(q \cdot r)}{s \cdot J_0(q \cdot a)} \right]$$

$$\text{res}_{s=0} \left[ e^{st} \cdot \frac{v_0 \cdot J_0(q \cdot r)}{s \cdot J_0(q \cdot a)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ e^{st} \cdot \frac{v_0 \cdot J_0(q \cdot r)}{J_0(q \cdot a)} \right] = e^0 \cdot \frac{v_0 \cdot J_0(0 \cdot r)}{J_0(0 \cdot a)} = \frac{v_0 J_0(0)}{J_0(0)} = v_0$$

Niech  $(\alpha_n)$  - ustalony ciąg zer funkcji  $J_0(xa)$ , tzn.  $J_0(\alpha_n a) = 0$ .

Punkty osobliwe transformaty rozwiązania  $\bar{V}$  występują w takich punktach  $s$ , że

$$q = \alpha_n = \sqrt{-\frac{s}{k}} \Rightarrow s_n = -k\alpha_n^2$$

$$\begin{aligned} \text{Zatem: } \text{res}_{s=s_n} \left[ e^{st} \cdot \frac{v_0 \cdot J_0(q \cdot r)}{s \cdot J_0(q \cdot a)} \right] &= \lim_{s \rightarrow -k\alpha_n^2} \left[ \frac{e^{st}}{s} \cdot \frac{v_0 \cdot J_0\left(\sqrt{-\frac{s}{k}} \cdot r\right)}{J_0\left(\sqrt{-\frac{s}{k}} \cdot a\right)} \cdot (s + k\alpha_n^2) \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow -k\alpha_n^2} \left[ v_0 \cdot \frac{e^{st} \cdot J_0\left(\sqrt{-\frac{s}{k}} \cdot r\right)}{s} \cdot \frac{(s + k\alpha_n^2)}{J_0\left(\sqrt{-\frac{s}{k}} \cdot a\right)} \right] \stackrel{(\nabla)}{=} v_0 \cdot \frac{e^{-k\alpha_n^2 t} \cdot J_0(\alpha_n \cdot r)}{-k\alpha_n^2} \cdot \frac{2\alpha_n \cdot k}{J_1(\alpha_n \cdot a) \cdot a} = -v_0 \cdot \frac{2e^{-k\alpha_n^2 t} \cdot J_0(\alpha_n \cdot r)}{a \cdot \alpha_n \cdot J_1(\alpha_n \cdot a)} \end{aligned}$$

$$(\nabla) \quad \lim_{s \rightarrow -k\alpha_n^2} \left[ \frac{(s + k\alpha_n^2)}{J_0\left(\sqrt{-\frac{s}{k}} \cdot a\right)} \right] \stackrel{H}{=} \frac{2\alpha_n \cdot k}{J_1(\alpha_n \cdot a) \cdot a}$$

Wynik:

$$v(r, t) = \mathcal{L}^{-1}(\bar{V}(r, s)) = v_0 \cdot \left[ 1 - \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k\alpha_n^2 t} \cdot \frac{J_0(\alpha_n \cdot r)}{\alpha_n \cdot J_1(\alpha_n \cdot a)} \right]$$

## Rozdział 9

# Przekształcenia całkowe z jądrem fourierowskim

Niech  $f$  będzie funkcją daną dla  $x \in (a, b)$ ;  $K(\alpha, x)$  dana funkcja dwóch zmiennych.  
Przyporządkowanie

$$I_f(\alpha) = \int_a^b K(\alpha, x)f(x)dx, \quad f \mapsto I_f \quad (9.1)$$

nazywamy przekształceniem z jądrem całkowym  $K(\alpha, x)$ .

Dla  $a = 0, b = \infty$  mamy:

$$\begin{aligned} K(\alpha, x) = e^{-\alpha x} & \quad - \text{ transformata Laplace'a} \\ K(\alpha, x) = x^{\alpha-1} & \quad - \text{ transformata Mellina} \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

**Uwaga 9.0.6** Każde przekształcenie całkowe 9.1 jest liniowe.

$I_f(\alpha)$  - dana  $\Rightarrow f$  (?)

Rozważmy takie przekształcenia, że:

$$f(x) = \int_a^b H(\alpha, x)I_f(\alpha)d\alpha \quad (9.2)$$

Przypadek  $a = 0, b = \infty$ .

**Definicja 9.0.5** Mówimy, że przekształcenie 9.1 ( $a = 0, b = \infty$ ) jest przekształceniem z jądrem fourierowskim  $\Leftrightarrow$  przekształcenie odwrotne 9.2 daje się zapisać wzorem:

$$f(x) = \int_0^\infty K(\alpha, x)I_f(\alpha)d\alpha, \quad \text{tzn. } H(\alpha, x) = K(\alpha, x).$$

**Ograniczenie:** Rozważamy  $K(\alpha, x) = K(\alpha \cdot x)$

Rozpatrzmy teraz następujące przekształcenie (zwane przekształceniem Mellina):

$$\mathbb{K}(s) = \int_0^\infty K(x)x^{s-1}dx$$

**Twierdzenie 9.0.10** Jeżeli jądro  $K$  jest jądrem fourierowskim, to zachodzi warunek

$$\mathbb{K}(s) \cdot \mathbb{K}(1-s) = 1.$$

**Dowód**

$$\begin{aligned} \mathbb{I}(s) &= \int_0^\infty I_f(\alpha) \alpha^{s-1} d\alpha = \int_0^\infty \alpha^{s-1} d\alpha \int_0^\infty K(\alpha \cdot x) f(x) dx = \int_0^\infty f(x) dx \int_0^\infty K(\alpha \cdot x) \alpha^{s-1} d\alpha = \\ &= \left| \begin{array}{l} \alpha x = \eta \\ x d\alpha = d\eta \end{array} \right| = \int_0^\infty f(x) dx \int_0^\infty K(\eta) \frac{\eta^{s-1}}{x^s} d\eta = \int_0^\infty f(x) x^{-s} dx \mathbb{K}(s) = \mathbb{K}(s) \mathbb{F}(1-s) \end{aligned}$$

Zatem:

$$\mathbb{I}(s) = \mathbb{K}(s) \mathbb{F}(1-s) (*)$$

Podobnie możemy wykazać, że

$$\mathbb{F}(s) = \mathbb{I}(1-s) \mathbb{K}(s)$$

Wystarczy teraz podstawić  $s := 1-s$  i wynik wstawić do (\*).  $\square$

**Uwaga 9.0.7** Można pokazać, że warunek  $\mathbb{K}(s) \cdot \mathbb{K}(1-s) = 1$  jest także warunkiem dostatecznym na to, żeby funkcja  $K$  była jądrem fourierowskim.

**Przykłady** jąder fourierowskich:

1.  $K(x) = A \cos x$ ,  $A$ -stała

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(s) &= A \int_0^\infty x^{s-1} \cos x dx = \frac{1}{2} A \int_0^\infty x^{s-1} (e^{ix} + e^{-ix}) dx = \frac{A}{2} \int_0^\infty e^{ix} x^{s-1} dx + \frac{A}{2} \int_0^\infty e^{-ix} x^{s-1} dx \\ &= \frac{A}{2} (\Gamma(s) e^{\frac{\pi}{2}is} + \Gamma(s) e^{-\frac{\pi}{2}is}) = A \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2} \\ \mathbb{K}(1-s) &= A \Gamma(1-s) \cos \frac{\pi}{2}(1-s) = A \Gamma(1-s) \sin \frac{\pi s}{2} \\ &\frac{A^2}{2} \Gamma(s) \Gamma(1-s) 2 \sin \frac{\pi s}{2} \cos \frac{\pi s}{2} = 1 \\ &\frac{A^2}{2} \frac{\pi}{\sin \pi s} \sin \pi s = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned}$$

Zatem  $K(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$  jest jądrem fourierowskim.

$$F_c(\alpha) := I_f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos \alpha x dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty I_f(\alpha) \cos \alpha x d\alpha.$$

2.  $K(x) = A \sin x$ , ...  $\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  (analogicznie)

$$F_s(\alpha) := I_f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin \alpha x dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty I_f(\alpha) \sin \alpha x d\alpha.$$

3.  $K(x) = \sqrt{x}J_\nu(x)$

Skorzystamy ze wzoru, dowodzonego w teorii funkcji Bessela:

$$\int_0^\infty J_\nu(at)t^\mu dt = \frac{2^\mu \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)}{a^{\mu+1} \Gamma(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu)}$$

$$\mathbb{K}(s) = \int_0^\infty J_\nu(x)x^{s-\frac{1}{2}} dx = 2^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}s + \frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}s + \frac{3}{4})}$$

Zachodzi  $\mathbb{K}(s) \cdot \mathbb{K}(1-s) = 1$ .

Mamy zatem:

$$g(\alpha) = \int_0^\infty f(x)\sqrt{\alpha x}J_\nu(\alpha x)dx, \quad f(x) = \int_0^\infty g(\alpha)\sqrt{\alpha x}J_\nu(\alpha x)d\alpha.$$

Wprowadźmy dla uproszczenia:  $f(x) = \tilde{f}(x)\sqrt{x}$  i  $g(\alpha) = \tilde{g}(\alpha)\sqrt{\alpha}$ . Po uproszczeniu wzorów otrzymamy tzw. prostą transformatę Hankela:

$$\tilde{g}(\alpha) = \int_0^\infty x\tilde{f}(x)J_\nu(\alpha x)dx$$

oraz odwrotną transformatę Hankela:

$$\tilde{f}(x) = \int_0^\infty \alpha\tilde{g}(\alpha)J_\nu(\alpha x)d\alpha.$$

## 9.1 Związek transformaty Mellina i transformaty Laplace'a

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st}f(t)dt \quad - \text{dwustronna transformata Laplace'a}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{st}ds$$

Zróbmy podstawienie:  $t = -\ln y$  wtedy  $e^{-st} = y^s$ ,  $dt = -\frac{1}{y}dy$ , zatem

$$F(s) = \int_0^\infty y^{s-1} \overbrace{f(-\ln y)}^{\tilde{f}(y)} dy \quad - \text{prosta transformata Mellina funkcji } \tilde{f} \text{ oraz}$$

$$\tilde{f}(y) = f(-\ln y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)y^{-s}ds \quad - \text{odwrotna transformata Mellina}$$

### Przykład 9.1.1

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^{-x} \\
 F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx = \Gamma(s) \\
 2\pi i f(x) &= \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\pi x^{-s}}{\sin \pi s \cdot \Gamma(1-s)} ds = \underbrace{\dots}_{\text{lemat Jordana}} = e^{-x} 2\pi i
 \end{aligned}$$

### 9.1.1 Własności transformaty Mellina

1. (twierdzenie o transformacie pochodnej)

$$F_{(k)}(s) = \int_0^{\infty} f^{(k)}(x) x^{s-1} dx = \left[ f^{(k-1)}(x) x^{s-1} \right]_0^{\infty} - (s-1) \int_0^{\infty} f^{(k-1)}(x) x^{s-2} dx$$

Przy założeniu, że  $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(k-1)}(x) x^{s-1} = 0$  mamy wzór:

$$F_{(k)}(s) = -(s-1)F_{(k-1)}(s-1)$$

2.  $F(s), G(s)$  - transformaty  $f(x), g(x)$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} f(x)g(x)x^{s-1} dx &= \int_0^{\infty} g(x)dx \cdot x^{s-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sigma)x^{-\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sigma)d\sigma \int_0^{\infty} g(x)x^{s-\sigma-1} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sigma)G(s-\sigma)d\sigma
 \end{aligned}$$

dla  $s = 1$  mamy:

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(\sigma)G(1-\sigma)d\sigma$$

3.  $F(s), G(s)$  - transformaty  $f(x), g(x)$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)G(s)x^{-s} ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s)x^{-s} ds \int_0^{\infty} g(u)u^{s-1} du = \int_0^{\infty} g(u) \frac{du}{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) \left(\frac{x}{u}\right)^{-s} ds}_{f\left(\frac{x}{u}\right)} \\
 &= \int_0^{\infty} g(u) f\left(\frac{x}{u}\right) \frac{du}{u}
 \end{aligned}$$

Własności 2. i 3. są odpowiednikami tw. Borela o splocie.

## Rozdział 10

# Z-transformata

Rozważmy funkcję  $f(t) = f_n$  - stała, dla  $n \leq t < n+1$  (schodkowa),  $f(t) = 0$ , dla  $t < 0$ . Wtedy:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-st} f_n dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=n}^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{1}{s} (e^{-sn} - e^{-s(n+1)}) = \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-sn}}_{D^*(f)}\end{aligned}$$

(obszarem zbieżności transformaty Laplace'a jest  $Re s > a$ )

$D^*(f) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-sn}$  - nazywamy dyskretną transformatą Laplace'a

Podstawmy:  $z = e^s$

### Definicja 10.0.1 (Z-transformata)

$$Z\{\underbrace{f_n}_{\text{ciąg}}\} := \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Jest to część główna (osobliwa) szeregu Laurenta w otoczeniu 0.  
Obszarem zbieżności jest więc  $|z| > R$

### Przykład 10.0.2

- $Z\{e^{\alpha n}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\alpha} z)^{-n} = \frac{1}{1 - e^{\alpha} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{\alpha}}$
- $Z\left\{\frac{1}{n!}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = e^{\frac{1}{z}}$
- $Z\{n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot z^{-n} = -z \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \right)' = -z \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right)' = -z \left( \frac{z}{z-1} \right)' = -z \left( \frac{z-1-z}{(z-1)^2} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}$

4. Niech  $\beta > 0$ . Wtedy

$$\begin{aligned} Z\{\sin \beta n\} &= Z\left\{\frac{1}{2i}(e^{i\beta n} - e^{-i\beta n})\right\} = \frac{1}{2i}(Z\{e^{i\beta n}\} - Z\{e^{-i\beta n}\}) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2i}\left(\frac{z}{z - e^{i\beta}} - \frac{z}{z - e^{-i\beta}}\right) = \\ &= \dots = \frac{z \cdot \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1} \end{aligned}$$

## 10.1 Własności Z-transformaty

1. Liniowość
2. Twierdzenia o przesunięciu

$$\{f_n\} = f_0, f_1, f_2, \dots$$

$$\text{(umowa)} \{f_{n+k}\} := f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, \dots, \quad k > 0$$

$$\text{(umowa)} \{f_{n-k}\} := \underbrace{f_{-k}, f_{-k+1}, \dots, f_{-1}, f_0, f_1, \dots}_{=0 \text{ umownie}}$$

(analogia do  $\mathbb{1}_+$  w zmiennych ciągłych)

### Twierdzenie 10.1.1 (I tw. o przesunięciu)

Jeżeli  $Z\{f_n\}(z) = F(z)$ , to  $Z\{f_{n-k}\} = z^{-k}F(z)$

**Dowód**

$$Z\{f_{n-k}\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)} z^{-k} = z^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)} = z^{-k} \sum_{n=k}^{\infty} f_{n-k} z^{-(n-k)} = z^{-k} F(z)$$

□

### Twierdzenie 10.1.2 (II tw. o przesunięciu)

Jeżeli  $Z\{f_n\}(z) = F(z)$ , to  $Z\{f_{n+k}\} = z^k \left( F(z) - \sum_{\nu=0}^{k-1} f_{\nu} z^{-\nu} \right)$

**Dowód**

$$Z\{f_{n+k}\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-n} = z^k \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+k} z^{-(n+k)} = z^k \left( F(z) - \sum_{\nu=0}^{k-1} f_{\nu} z^{-\nu} \right)$$

□

### Przykład 10.1.1

$$\{n-2\} = 0, 0, 0, 1, 2, \dots$$

$$Z\{n-2\} = z^{-2} Z(n) = z^{-2} \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z(z-1)^2}$$



### 10.1.1 Różnice skończone

$f_n$  - ciąg

Definiujemy następujące różnice (odpowiedniki różniczek):

$$\Delta f_n := f_{n+1} - f_n$$

$$\Delta^2 f_n := \Delta(\Delta f_n) = f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n$$

⋮

$\Delta^k f_n := \Delta(\Delta^{k-1} f_n)$  - definicja rekurencyjna dla  $k \in \mathbb{N}$ .

#### 3. Twierdzenie 10.1.3

Jeśli  $Z\{f_n\}(z) = F(z)$ , to  $Z\{\Delta f_n\} = (z-1)F(z) - z \cdot f_0$

**Dowód**

$$Z\{\Delta f_n\} = Z\{f_{n+1}\} - Z\{f_n\} \stackrel{(10.1.2)}{=} z(F(z) - f_0) - F(z) = (z-1)F(z) - z \cdot f_0$$

□

Ćwiczenia: Wyprowadzić wzór na  $Z\{\Delta^k f_n\}$  (indukcyjnie).

#### 4. Twierdzenie 10.1.4

Jeśli  $Z\{f_n\}(z) = F(z)$  i  $g_n = \sum_{\nu=0}^n f_\nu$  (odpowiednik całki  $\int_0^t \dots$ ), to  $Z\{g_n\} = \frac{z}{z-1}F(z)$

**Dowód**

$$f_n = g_n - g_{n-1}$$

$$F(z) = Z\{f_n\} = Z\{g_n\} - Z\{g_{n-1}\} \stackrel{(10.1.1)}{=} Z\{g_n\} - \frac{1}{z}Z\{g_n\}$$

$$\text{Stąd: } Z\{g_n\} = \frac{z}{z-1}F(z)$$

□

#### 5. Twierdzenie 10.1.5

Jeśli  $Z\{f_n\}(z) = F(z)$ , to  $Z\{n \cdot f_n\} = -z \frac{d}{dz} F(z)$

**Dowód** Analogiczny do przykładu 3.

□

**Definicja 10.1.1 (Splot ciągów)** Splotem ciągów  $\{f_n\}$  i  $\{g_n\}$  nazywamy ciąg  $\{h_n\}$  taki, że

$$h_n = \sum_{\nu=0}^n f_\nu g_{n-\nu}$$

$\sum_{-\infty}^{\infty}$  pamiętając, że reszta się zeruje

(jest to splot klasyczny dla funkcji schodkowych)

Ozn.  $h_n = f_n * g_n$

#### 6. Twierdzenie 10.1.6 (odpowiednik tw. Borela)

Jeśli  $Z\{f_n\}(z) = F(z)$ ,  $Z\{g_n\}(z) = G(z)$ ,  $h_n = f_n * g_n$ , to  $Z\{f_n * g_n\} = F(z) \cdot G(z)$

**Dowód**

$$F(z) \cdot G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \underbrace{z^{-\nu} G(z)}_{Z\{g_{n-\nu}\}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} g_{n-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu g_{n-\nu}}_{f_n * g_n} = Z\{f_n * g_n\}$$

□

### Przykład 10.1.2

$$\{n * 1\} = \sum_{\nu=0}^n \nu = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$Z\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\} = Z\{n\} \cdot Z\{1\} = \frac{z}{(z-1)^2} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)^3}$$

## 10.2 Transformata odwrotna do Z-transformaty

$$F(z) = Z\{f_n\} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

Odwrotną transformatę można wyznaczyć ze wzorów na współczynniki szeregu Laurenta:

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} F(z) \cdot z^{n-1} dz \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

### Przykład 10.2.1

$$F(z) = \frac{z}{z^2 - 1}$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{z^n}{z^2 - 1} dz$$

*Szukamy punktów osobliwych.*

$z_1 = 1, z_2 = -1$  - bieguny rzędu 1.

$$f_n = \text{res}_{z=1} \frac{z^n}{z^2 - 1} + \text{res}_{z=-1} \frac{z^n}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} + \frac{-(-1)^n}{2} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})$$

(0, 1, 0, 1, ...)

## 10.3 Równania różnicowe

$x = x(t)$  - funkcja niewiadoma

$a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, f(t)$  - dane

Równanie:

$$x(t+m) + a_{m-1}x(t+m-1) + a_{m-2}x(t+m-2) + \dots + a_1x(t+1) + a_0x(t) = f(t)$$

nazywamy równaniem różnicowym zmiennej ciągłej.

Podstawiając funkcję schodkową:

$$x(t) = x_n, \quad \text{dla } n \leq t < n+1$$

otrzymujemy:

### Definicja 10.3.1 (Równanie różnicowe dyskretne)

$$\begin{cases} x_{n+m} + a_{m-1} \cdot x_{n+m-1} + \dots + a_1 \cdot x_{n+1} + a_0 \cdot x_n = f_n \\ x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, f_n - \text{dane początkowe} \end{cases} \quad (*)$$

**Uwaga 10.3.1**

Zagadnienie (\*) może być zapisane w równoważny sposób:

$$\begin{cases} \Delta^m x_n + c_{m-1} \cdot \Delta^{m-1} x_n + \dots + c_1 \cdot \Delta x_n + \underbrace{c_0 \cdot x_n}_{\Delta^0 x_n = x_n \text{ z def.}} = f_n \\ x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, f_n - \text{ dane początkowe} \end{cases}$$

Rozwiązanie: Stosujemy Z-transformatę do (\*). Oznaczmy  $Z(x_n) = X(z)$ ,  $Z\{f_n\} = F(z)$ , wtedy:

$$z^m \left( X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x_k z^{-k} \right) + a_{m-1} z^{m-1} \left( X(z) - \sum_{k=0}^{m-2} x_k z^{-k} \right) + \dots + a_0 X(z) = F(z)$$

$$\text{Stąd: } X(z) = \frac{F(z) + \sum_{\nu=1}^m a_\nu z^\nu \sum_{k=0}^{\nu-1} x_k z^{-k}}{z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0}$$

**Przykład 10.3.1**  $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$ ,  $x_0, x_1$  - dane

$$z^2 \left( X(z) - x_0 z^0 - x_1 \frac{1}{z} \right) - 3z(X(z) - x_0) + 2X(z) = 0$$

$$X(z)(z^2 - 3z + 2) = x_0 z^2 + x_1 z - 3x_0 z$$

$$X(z) = \frac{x_0(z^2 - 3z) + x_1 z}{z^2 - 3z + 2} = \frac{x_0(z^2 - 3z) + x_1 z}{(z-1)(z-2)}$$

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{x_0(z^2 - 3z) + x_1 z}{(z-1)(z-2)} z^{n-1} dz = \\ &= \operatorname{res}_{z=1} \frac{x_0(z^2 - 3z) + x_1 z}{(z-1)(z-2)} z^{n-1} + \operatorname{res}_{z=2} \frac{x_0(z^2 - 3z) + x_1 z}{(z-1)(z-2)} z^{n-1} = \\ &= \frac{-2x_0 + x_1}{-1} \cdot 1 + (-2x_0 + 2x_1) 2^{n-1} = 2x_0 - x_1 + 2^n(x_1 - x_0) \end{aligned}$$

Dla  $x_0 = x_1$  otrzymujemy ciąg stały.

**Przykład 10.3.2**  $x_{n+2} - x_n = 1$ ,  $x_0 = 0, x_1 = 1$

$$z^2 \left( X(z) - \frac{1}{z} \right) - X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$X(z)(z^2 - 1) = z + \frac{z}{z-1} = \frac{z - z + z^2}{z-1} = \frac{z^2}{z-1}$$

$$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)} = \frac{Az}{(z-1)} + \frac{Bz}{(z-1)^2} + \frac{Cz}{(z+1)}$$

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{-1}{4}$$

$$x_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}(-1)^{n+1}$$

# Rozdział 11

## Transformata Hankela

### 11.1 Transformata Hankela

**Definicja 11.1.1** Transformatą Hankela funkcji  $f$  nazywamy odwzorowanie:

$$\tilde{f}_\nu(p) = \int_0^\infty r f(r) J_\nu(pr) dr,$$

a transformatą odwrotną odwzorowanie:

$$f(r) = \int_0^\infty p \tilde{f}_\nu(p) J_\nu(pr) dp.$$

Poprawność tych wzorów wynika z rozważań o przekształceniach z jądrem fourierowskim.

#### 11.1.1 Własności transformaty Hankela

**Twierdzenie 11.1.1 (Własności transformaty Hankela)** Załóżmy, że

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r f(r) = 0 \text{ oraz}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r f'(r) = 0, \text{ wtedy:}$$

1. Transformata pochodnej

$$\tilde{f}_\nu^{(1)}(p) = \int_0^\infty r \frac{df}{dr} J_\nu(pr) dr = -p \left( \tilde{f}_{\nu-1}(p) \frac{\nu+1}{2\nu} - \frac{\nu-1}{2\nu} \tilde{f}_{\nu+1}(p) \right).$$

2. Transformata drugiej pochodnej

$$\tilde{f}_\nu^{(2)}(p) = \frac{1}{4} p^2 \left( \frac{\nu+1}{\nu-1} \tilde{f}_{\nu-2}(p) - 2 \frac{\nu^2-3}{\nu^2-1} \tilde{f}_\nu(p) + \frac{\nu-1}{\nu+1} \tilde{f}_{\nu+2}(p) \right).$$

3. Związek z równaniem Bessela

$$\int_0^\infty r \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} f \right) J_\nu(pr) dr = -p^2 \tilde{f}_\nu(p).$$

**Dowód** ad 1)

$$\begin{aligned}
 f_v^{(1)}(p) &= \int_0^\infty r \frac{df}{dr} J_v(pr) dr = \underbrace{rf(r)J_v(pr)}_{=0} \Big|_{r=0}^{r=\infty} - \int_0^\infty f(r) \frac{d}{dr} (rJ_v(pr)) dr = \\
 &= - \int_0^\infty f(r) (J_v(pr) + prJ'_v(pr)) dr = - \int_0^\infty f(r) (J_v(pr) + prJ_{v-1}(pr) - vJ_v(pr)) dr = \\
 &= (v-1) \int_0^\infty f(r) J_v(pr) dr - p\tilde{f}_{v-1}(p).
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że zachodzi równość:

$$2vJ_v(pr) = prJ_{v-1}(pr) + prJ_{v+1}(pr),$$

Stąd:

$$2v \int_0^\infty f(r) J_v(pr) dr = p \left( \int_0^\infty rf(r) J_{v-1}(pr) dr + \int_0^\infty rf(r) J_{v+1}(pr) dr \right) = p\tilde{f}_{v-1}(p) + p\tilde{f}_{v+1}(p).$$

Wstawiając  $\int_0^\infty f(r) J_v(pr) dr$  do wzoru na  $\tilde{f}_v^{(1)}$  dostajemy:

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_v^{(1)}(p) &= (v-1) \left( \frac{p}{2v} \tilde{f}_{v-1}(p) + \frac{p}{2v} \tilde{f}_{v+1}(p) \right) - p\tilde{f}_{v-1}(p) = \\
 &= p \left( \tilde{f}_{v-1}(p) \frac{v-1-2v}{2v} + \frac{v-1}{2v} \tilde{f}_{v+1}(p) \right) = -p \left( \tilde{f}_{v-1}(p) \frac{v+1}{2v} - \frac{v-1}{2v} \tilde{f}_{v+1}(p) \right).
 \end{aligned}$$

□

**Dowód** ad 2)

Stosujemy dwukrotnie punkt (1). □

**Dowód** ad 3) Całkując przez części otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty r \left( \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} \right) J_v(pr) dr &= \int_0^\infty r \frac{d^2 f}{dr^2} J_v(pr) dr + \int_0^\infty \frac{df}{dr} J_v(pr) dr = \\
 &= - \int_0^\infty \frac{df}{dr} (J_v(pr) + prJ'_v(pr)) dr + \int_0^\infty \frac{df}{dr} J_v(pr) dr = -p \int_0^\infty \frac{df}{dr} r J'_v(pr) dr = \\
 &= p \int_0^\infty f(r) (J'_v(pr) + prJ''_v(pr)) dr = (*).
 \end{aligned}$$

Zauważmy, że:

$$pJ'_v(pr) + p^2 r J''_v(pr) = - \left( p^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) J_v(pr) r,$$

gdyż po podzieleniu przez  $p^2 r$  mamy:

$$\frac{1}{pr} J'_v(pr) + J''_v(pr) = - \left( 1 - \frac{v^2}{(pr)^2} \right) J_v(pr) \quad (\text{jest to r-nie Bessela}).$$

Wracamy do (\*):

$$(*) = - \int_0^{\infty} \left( p^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) r J_v(pr) f(r) dr \quad \text{co kończy dowód.}$$

□

**Przykład 11.1.1** Rozważmy równanie Laplace'a:

$$\Delta v = 0,$$

gdzie  $v = v(r, z)$  oraz  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  przy warunkach:

$$\begin{cases} v = v_0 & \text{dla } 0 \leq r < 1, z = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} = 0 & \text{dla } r > 1, z = 0 \end{cases}$$

( $v$  - potencjał naelektryzowanego dysku)

Zastosujemy równanie Laplace'a we współrzędnych biegunowych:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0.$$

Zastosujemy transformatę Hankela. Niech:

$$\tilde{v}(p, z) = \int_0^{\infty} r J_0(pr) v(r, z) dr$$

$$v(r, z) = \int_0^{\infty} p J_0(pr) \tilde{v}(p, z) dp$$

Wtedy:

$$-p^2 \tilde{v}(p, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{v}(p, z) = 0$$

Dostaliśmy równanie zwyczajne drugiego rzędu. A zatem jego rozwiązanie:

$$\tilde{v}(p, z) = A(p)e^{-pz} + B(p)e^{pz}.$$

Ponieważ poszukujemy rozwiązania ograniczonego, to  $B(p) = 0$ . Czyli:

$$\tilde{v}(p, z) = A(p)e^{-pz}.$$

Z warunków mamy:

$$v(r, 0) = \int_0^{\infty} p J_0(pr) A(p) dp = v_0,$$

dla  $0 \leq r < 1$ .

Analogicznie dla  $r > 1$  mamy:

$$\int_0^{\infty} p^2 J_0(pr) A(p) dp = 0.$$

Po rozwiązaniu tych równań całkowych otrzymamy:

$$A(p) = \frac{2}{\pi} v_0 \frac{\sin p}{p^2}.$$

A stąd ostatecznie:

$$v(r, z) = \frac{2v_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-pz}}{p} J_0(pr) \sin p dp.$$

## 11.2 Transformaty skończone

Rozważmy funkcję  $f(x)$ , gdzie  $x \in [-l; l]$ . Rozwińmy  $f$  na szereg Fouriera:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

gdzie:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Na współczynniki  $a_n$  i  $b_n$  możemy spojrzeć jak na transformatę.

**Uwaga 11.2.1** Na rozwinięcia funkcji na szeregi możemy patrzeć jak na transformaty odwrotne.

### 11.2.1 Transformaty cosinusowa i sinusowa

**Definicja 11.2.1** Niech dana będzie funkcja  $f(x)$ . Skończoną transformatą cosinusową nazwiemy:

$$\tilde{f}_c(p) = \int_0^a f(x) \cos \frac{p\pi x}{a} dx,$$

a sinusową:

$$\tilde{f}_s(p) = \int_0^a f(x) \sin \frac{p\pi x}{a} dx.$$

**Przykład 11.2.1** Rozważmy następujące zagadnienie Dirichleta:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in (0, \pi) & y \in (0, \pi) \\ u = 0 & x = 0, \pi & y = 0 \\ u = u_0 & y = \pi & u_0 \neq 0 \end{cases}$$

Zastosujmy transformatę sinusową względem  $x$ :

$$\tilde{u}(p, y) = \int_0^{\pi} u(x, y) \sin px dx.$$

Nasze równanie ma postać:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Obliczmy:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sin px \, dx &= \frac{\partial u}{\partial x} \sin px \Big|_0^{\pi} - p \int_0^{\pi} \frac{\partial u}{\partial x} \cos px \, dx = -p u(x, y) \cos px \Big|_0^{\pi} - p^2 \int_0^{\pi} u \sin px \, dx = . \\ &= -p^2 \tilde{u}(p, y). \end{aligned}$$

Nasze równanie przyjmuje postać:

$$-p^2 \tilde{u}(p, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{u}(p, y) = 0.$$

Warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(p, 0) &= \int_0^{\pi} u(x, 0) \sin px \, dx = 0, \\ \tilde{u}(p, \pi) &= u_0 \int_0^{\pi} \sin px \, dx = -\frac{u_0}{p} (\cos p\pi - 1) = \frac{u_0}{p} (1 - (-1)^p). \end{aligned}$$

Zapiszmy rozwiązanie:

$$\tilde{u}(p, y) = C_1 e^{py} + C_2 e^{-py} = A \sinh py + B \cosh py.$$

Z warunku  $\tilde{u}(p, 0) = 0$  wynika, że  $B = 0$ . Czyli:

$$\tilde{u}(p, y) = A(p) \sinh(py).$$

Korzystając z drugiego warunku mamy:

$$\tilde{u}(p, \pi) = A(p) \sinh p\pi = \frac{u_0}{p} (1 - (-1)^p).$$

Stąd:

$$A(p) = \frac{u_0}{p \sinh p\pi} (1 - (-1)^p).$$

Zatem ostatecznie:

$$\tilde{u}(p, y) = \frac{u_0 \sinh py}{p \sinh p\pi} (1 - (-1)^p).$$

Funkcja  $u$  będzie się zatem wyrażać poprzez szereg:

$$u(x, y) = \frac{2u_0}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sinh py}{p \sinh p\pi} (1 - (-1)^p) \sin px.$$

**Uwaga 11.2.2** W przypadku zagadnienia Neumanna należy stosować transformatę cosinusową.



## Dodatek A

# Tabela transformat Laplace'a

**Uwaga A.0.3** Wszystkie funkcje w pierwszej kolumnie tabeli należy pomnożyć przez  $\mathbb{1}_+(t)$ .

Funkcja transformowana (dla $t > 0$ )	Transformata Laplace'a funkcji
$\mathbf{f}(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(s)$
$\mathbb{1}_+(t)$	$\frac{1}{s}$
$\cos(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 + \alpha^2}$
$\sin(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$
$t^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s - \alpha}$
$\cosh(\alpha t)$	$\frac{s}{s^2 - \alpha^2}$
$\sinh(\alpha t)$	$\frac{\alpha}{s^2 - \alpha^2}$
$\ln t$	$-\frac{1}{s}(\ln s + \mathcal{C})$
$t \cos(\alpha t)$	$\frac{s^2 - \alpha^2}{s^2 + \alpha^2}$
$t \sin(\alpha t)$	$\frac{2\alpha s}{s^2 + \alpha^2}$

Tabela A.1: TABELA TRANSFORMAT LAPLACE'A

## Dodatek B

# Tabela transformat Laplace'a dla dystrybucji

Dystrybucja	Transformata Laplace'a dystrybucji
<b>f</b>	$\mathcal{L}\{f\}(s)$
$\delta$	1
$\delta(t - a)$	$e^{-as}$
$\delta^{(n)}$	$s^n$

Tabela B.1: TABELA TRANSFORMAT LAPLACE'A DLA DYSTRYBUCJI

## Dodatek C

### Tabela Z-transformat

Ciąg transformowany	Z-transformata ciągu
$f_n$	$Z\{f_n\}(z)$
$e^{\alpha n}$	$\frac{z}{z-e^\alpha}$
$\frac{1}{n!}$	$e^{\frac{1}{z}}$
$n$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\sin \beta n$	$\frac{z \cdot \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}$

Tabela C.1: TABELA Z-TRANSFORMAT

## Dodatek D

# Tabela transformat Hankela

Funkcja transformowana	Parametr	Transformata Hankela funkcji
$f(x)$	$v$	$\tilde{f}_v(p)$
$x^v \mathbb{1}_{[0,a]}(x)$	$v > -1$	$\frac{a^{v+1}}{p} J_{v+1}(pa)$
$x^v e^{-\alpha x^2}$	$v > -1$	$\frac{p}{(2\alpha)^{v+1}} e^{-\frac{p^2}{4\alpha}}$
$\frac{e^{-\alpha x}}{x}$	$v = 0$	$\frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha^2}}$

Tabela D.1: TABELA TRANSFORMAT HANKELA

## Dodatek E

# Wzory trygonometryczne

### Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \quad \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

### Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

### Iloczyn funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \quad \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \quad \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Funkcje specjalne Eulera</b>	<b>1</b>
1.1	Funkcja Gamma . . . . .	1
1.1.1	Analiza zbieżności . . . . .	1
1.1.2	Własności . . . . .	3
1.2	Funkcja Beta . . . . .	4
1.2.1	Własności . . . . .	4
1.2.2	Związek ze stałą Eulera . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Szeregi Fouriera</b>	<b>8</b>
2.1	Pomocnicze lematy o zbieżności pewnych całek . . . . .	8
2.1.1	Lemat Riemanna-Lebesgue’a . . . . .	8
2.1.2	Całka Dirichleta . . . . .	9
2.2	Szeregi Fouriera . . . . .	10
2.2.1	Konstrukcja szeregu Fouriera . . . . .	11
2.2.2	Zbieżność do funkcji . . . . .	12
2.2.3	Szereg Fouriera dla liczb zespolonych . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Transformata Fouriera</b>	<b>13</b>
3.1	Wzór całkowy Fouriera, definicja transformaty Fouriera . . . . .	13
3.1.1	Wzór w postaci zespolonej . . . . .	13
3.1.2	Wzór w postaci rzeczywistej . . . . .	14
	Wzór ogólny . . . . .	14
	Wzory uproszczone w pewnych szczególnych przypadkach . . . . .	14
3.1.3	Transformaty sinusowe i cosinusowe . . . . .	14
3.2	Podstawowe twierdzenia dla transformat . . . . .	15
3.2.1	Warunek dostateczny istnienia transformaty . . . . .	15
3.2.2	Wartość główna całki niewłaściwej . . . . .	16
3.2.3	Twierdzenie o transformacie odwrotnej . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Transformata Laplace’a</b>	<b>18</b>

4.1	Wprowadzenie, definicja . . . . .	18
4.2	Własności transformaty Laplace'a . . . . .	19
4.2.1	Twierdzenie o zbieżności bezwzględnej . . . . .	19
4.2.2	Twierdzenie podstawowe o zbieżności transformaty Laplace'a . . . . .	20
4.2.3	Twierdzenie o transformacie odwrotnej . . . . .	21
4.3	Zastosowanie do równań różniczkowych . . . . .	22
4.4	Splot funkcji . . . . .	26
4.4.1	Własności splotu . . . . .	27
	Twierdzenie Borela . . . . .	28
	Ciągłość splotu . . . . .	28
	Twierdzenie o pochodnej splotu . . . . .	30
4.5	Zagadnienie różnowartościowości transformaty . . . . .	31
4.5.1	Funkcja zerowa . . . . .	31
4.6	Holomorficzność transformaty Laplace'a . . . . .	32
4.7	Odwracanie transformaty Laplace'a . . . . .	37
4.8	Zastosowania transformaty Laplace'a . . . . .	37
4.8.1	Zastosowanie do równań różniczkowych zwyczajnych . . . . .	37
4.8.2	Zastosowania w fizyce . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Wstęp do teorii dystrybucji</b>	<b>43</b>
5.1	Dystrybucje, wiadomości wstępne . . . . .	43
5.2	Przestrzeń funkcji próbnych $\mathcal{D}$ , przestrzeń $\mathcal{D}'$ . . . . .	43
5.3	Transformata Laplace'a dystrybucji - definicja . . . . .	47
5.3.1	Najważniejsze własności $\mathcal{L}$ -transformaty dystrybucji . . . . .	48
5.3.2	Splot dystrybucji . . . . .	51
	Własności splotu dystrybucji . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Uzupełnienie własności klasycznej transformaty Fouriera</b>	<b>53</b>
6.1	Własności $\mathcal{F}$ transformaty . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Ciąg dalszy dystrybucji</b>	<b>55</b>
7.1	Dystrybucje temperowane . . . . .	55
7.2	Transformata Fouriera dystrybucji . . . . .	56
7.2.1	Własności . . . . .	56
7.2.2	Wzór sumacyjny Poissona . . . . .	58
7.2.3	Tożsamość Jacobiego . . . . .	59
<b>8</b>	<b>Funkcje Bessela</b>	<b>60</b>
8.1	Wprowadzenie . . . . .	60

<b>9</b>	<b>Przekształcenia całkowe z jądrem fourierowskim</b>	<b>66</b>
9.1	Związek transformaty Mellina i transformaty Laplace'a . . . . .	68
9.1.1	Własności transformaty Mellina . . . . .	69
<b>10</b>	<b>Z-transformata</b>	<b>70</b>
10.1	Własności Z-transformaty . . . . .	71
10.1.1	Różnice skończone . . . . .	72
10.2	Transformata odwrotna do Z-transformaty . . . . .	73
10.3	Równania różnicowe . . . . .	73
<b>11</b>	<b>Transformata Hankela</b>	<b>75</b>
11.1	Transformata Hankela . . . . .	75
11.1.1	Własności transformaty Hankela . . . . .	75
11.2	Transformaty skończone . . . . .	78
11.2.1	Transformaty cosinusowa i sinusowa . . . . .	78
<b>A</b>	<b>Tabela transformat Laplace'a</b>	<b>80</b>
<b>B</b>	<b>Tabela transformat Laplace'a dla dystrybucji</b>	<b>81</b>
<b>C</b>	<b>Tabela Z-transformat</b>	<b>82</b>
<b>D</b>	<b>Tabela transformat Hankela</b>	<b>83</b>
<b>E</b>	<b>Wzory trygonometryczne</b>	<b>84</b>