Egzamin z TCiWdTD dn. 07.02.2008

....

Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. (za 10 pkt.)
Wiedząc, że

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}} \quad \text{dla } z \in \mathbb{C},\ \nu \in \mathbb{C},$$

wyrazić funkcję $J_{\frac{3}{2}}(z)$ za pomocą funkcji elementarnych zmiennej z.

Zad. 2. (za 10 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać równanie

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-t} \text{ dla } t > 0, \text{ z warunkami } y\left(0^+\right) = y'\left(0^+\right) = y''\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie Borela o splocie dla transformaty Laplace'a.

b) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o zachowaniu się transformaty Laplace'a w nieskończoności.

Zad. 4. a) (za 6 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x+1) + |x|$$

b) (za 4 pkt.)
Podać definicję nośnika dystrybucji, równości dystrybucji na zbiorze otwartym, definicję dystrybucji temperowanej (wolnorosnącej).

Zad. 5. a) (za 3 pkt.)
Podać definicję nieskończonej transformaty Hankela.

b) (za 3 pkt.)
Pokazać, że jeśli $H_\nu[f(r)](p) = \widetilde{f}_\nu(p)$ oznacza nieskończoną transformatę Hankela funkcji f, to zachodzi wzór

$$H_\nu[f(ar)](p) = \frac{1}{a^2}\widetilde{f}_\nu\left(\frac{p}{a}\right).$$

c) (za 4 pkt)
Funkcję $f(x) = 1 - x^2$ rozwinąć na przedziale $(0,1)$ na szereg Fouriera-Bessela.

Zad. 6. a) (za 8 pkt)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + 5x_{n+1} - 2x_n = 3^n, \text{ gdzie } x_0 = x_1 = x_2 = 0.$$

b) (za 2 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o splocie dla $Z-$transformaty.