# Egzamin z TCiWdTD dn. 02.02.2009

.............................................................................................................................

Nazwisko i imię, grupa

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Egz | Ćw | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Wiedząc, że

$$J_\nu(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k z^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}} \quad \text{dla } z\in\mathbb{C},\ \nu\in\mathbb{C},$$

wyrazić funkcję $J_{-\frac{3}{2}}(z)$ za pomocą funkcji elementarnych zmiennej $z$.

b) (za 5 pkt.)

Korzystając z tego, że $C=-\Gamma'(1)$ pokazać, że $\int\limits_0^1 \frac{1-e^{-t}-e^{-\frac{1}{t}}}{t}dt=C$.

Zad. 2. (za 10 pkt.)
Niech $L[f](s)=F(s)$ będzie transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$. Pokazać, że

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right](s)=\int\limits_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma,$$

(całkujemy po takiej drodze, że $\operatorname{Re} s\to+\infty$). Korzystając z udowodnionego wzoru, obliczyć $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin kt}{t}dt$

oraz $L[\operatorname{Si} kt](s)$, gdzie $\operatorname{Si} kt:=\int\limits_0^t\frac{\sin k\tau}{\tau}d\tau$ (tzw. sinus całkowy).

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie Borela o splocie dla transformaty Laplace'a.

b) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o zachowaniu się transformaty Laplace'a w nieskończoności.

Zad. 4. a) (za 6 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x)=|x-2|+2[x]$$

b) (za 4 pkt.)
Podać definicję nośnika dystrybucji, równości dystrybucji na zbiorze otwartym, definicję dystrybucji temperowanej (wolnorosnącej).

Zad. 5. a) (za 5 pkt.)
Funkcję $f(x)=x^2+x^4$ rozwinąc na przedziale $(0,1)$ na szereg Fouriera-Bessela.

b) (za 5 pkt)
Wyznaczyć transformatę Mellina funkcji $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Zad. 6. a) (za 8 pkt)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+3}+3x_{n+2}+3x_{n+1}+x_n=1,\ \text{gdzie } x_0=0, x_1=0, x_2=1.$$

b) (za 2 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o splocie dla $Z-$transformaty.