Egzamin z TCiWdTD dn. 09.02.2009

....
Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Wiedząc, że

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}} \quad \text{dla } z \in \mathbb{C},\ \nu \in \mathbb{C},$$

wykazać, że

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \ \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

b) (za 5 pkt.)
Pokazać, że jeśli f jest bezwzględnie całkowalna na $\mathbb{R}$, to

$$\mathbb{F}[f(t)\sin\omega_0 t](\omega) = \frac{1}{2i}[F(\omega-\omega_0) - F(\omega+\omega_0)],$$

gdzie F oznacza transformatę Fouriera funkcji f.

Zad. 2. a) (za 5 pkt.)
Znaleźć rozwiązanie równania: $y''+2y'+2y = f(t)$ z warunkami początkowymi $y(0^+) = y'(0^+) = 0$, gdzie f oznacza funkcję daną posiadającą transformatę Laplace'a.

b) (za 5 pkt.)

Znaleźć rozwiązanie równania: $y(t) = 2t + \int\limits_0^t \sin(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau.$

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o zachowaniu się transformaty Laplace'a w nieskończoności.

b) (za 5 pkt.)
Niech $f_1(t) = \sin t,\ f_2(t) = \cos 2t$. Wyznaczyć $(f_1 * f_2)(t)$.

Zad. 4. a) (za 6 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = 2|x-2| - x \cdot 1_+(x)$$

b) (za 4 pkt.)
Czy funkcja $F(s) = s^2+1$ należy do przestrzeni obrazów dystrybucji z D_0'? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 5. (za 10 pkt.)
Podać definicję przekształcenia całkowego z jądrem fourierowskim. Podać przykłady takich przekształceń wraz z uzasadnieniem. Czy transformata Mellina jest takim przekształceniem?

Zad. 6. a) (za 7 pkt)
Znaleźć rozwiązanie równania różnicowego

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - 4x_{n+1} + 8x_n = 3^n$$

z warunkami: $x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2.$

b) (za 3 pkt.)
Wyznaczyć odwrotną Z - transformatę funkcji $F(z) = \frac{z^3}{(z-1)^3(z+2)}$.