Egzamin z TCiWdTD dn. 01.02.2010

....
Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 6 pkt.)
Wiedząc, że wielomiany Laguerre'a wyrażają się wzorem

$$L_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{n!} e^{\alpha t} \frac{d^n}{dt^n} \left(t^n e^{-\alpha t}\right),$$

wyznaczyć transformatę Laplace'a $\mathcal{L}\{L_{n,\alpha}\}(s)$.

b) (za 4 pkt.)
Sformułować wykorzystane własności transformaty Laplace'a.

Zad. 2. (za 10 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać równanie

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-t} \text{ dla } t > 0, \text{ z warunkami } y\left(0^+\right) = y'\left(0^+\right) = y''\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie Borela o splocie dla transformaty Laplace'a.

b) (za 5 pkt.)
Udowodnić, że $[t \cdot 1_+(t)] * [e^t \cdot 1_+(t)] = (e^t - t - 1) \cdot 1_+(t)$.

Zad. 4. a) (za 6 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = |x-2| + 2[x]$$

b) (za 4 pkt.)
Podać definicję nośnika dystrybucji, równości dystrybucji na zbiorze otwartym, definicję dystrybucji temperowanej (wolnorosnącej).

Zad. 5. a) (za 7 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o zachowaniu się transformaty Laplace'a w nieskończoności.

b) (za 3 pkt)
Niech $\mathcal{H}_\nu\{f(r)\}(p) = \widetilde{f}_\nu(p)$ oznacza nieskończoną transformatę Hankela funkcji $f(r)$ w punkcie p. Pokazać, że dla $a > 0$ zachodzi wzór

$$\mathcal{H}_\nu\{f(ar)\}(p) = \frac{1}{a^2}\widetilde{f}_\nu\left(\frac{p}{a}\right).$$

Zad. 6. a) (za 8 pkt)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 1, \text{ gdzie } x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1.$$

b) (za 2 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o splocie dla $Z-$transformaty.