Egzamin z TCiWdTD dn. 08.02.2010

....
Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Wiedząc, że

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}} \quad \text{dla } z \in \mathbb{C},\ \nu \in \mathbb{C},$$

wykazać, że

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z) \ \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

b) (za 5 pkt.)
Wiedząc, że $L\{J_0(t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s) = \sqrt{s^2+1}$.

Zad. 2. (za 10 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie

$$y'(t) + 4y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\,d\tau = e^{-t} \text{ dla } t > 0,\ y\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o różniczkowaniu splotu.

b) (za 5 pkt.)
Niech $f_1(t) = \sqrt{t}$, $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Wyznaczyć $(f_1 * f_2)'(t)$.

Zad. 4. a) (za 6 pkt.)
Rozwiązać w przestrzeni D_0' równanie

$$D^2y + 2Dy + y = \delta^{(4)}(t-2)$$

b) (za 4 pkt.)
Czy funkcja $s \sin s$ należy do przestrzeni obrazów dystrybucji z D_0'? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 5. a) (za 7 pkt.)
Podać definicję przekształcenia całkowego z jądrem fourierowskim. Podać przykłady takich przekształceń wraz z uzasadnieniem. Czy transformata Mellina jest takim przekształceniem?

b) (za 3 pkt)
Pokazać, że jeśli f jest bezwzględnie całkowalna na $\mathbb{R}$, to

$$\mathbb{F}[f(t)\sin\omega_0 t](\omega) = \frac{1}{2i}\left[F(\omega-\omega_0) - F(\omega+\omega_0)\right],$$

gdzie F oznacza transformatę Fouriera funkcji f.

Zad. 6. a) (za 6 pkt)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, \text{ gdzie } x_0 = x_1 = \pi.$$

b) (za 4 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenia o przesunięciach dla $Z-$transformaty.