Egzamin z TCiWdTD dn. 02.02.2011

....
Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Pokazać, że $J_0'(z) = -J_1(z)$ dla każdej liczby zespolonej z.

b) (za 5 pkt.)
Pokazać, że jeśli $J_\nu(z_0) = 0$, to $J_\nu'(z_0) \neq 0$ dla dowolnego $\nu \in \mathbb{C}$.

Zad. 2. a) (za 6 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać równanie

$$y(t) = 2t + \int_0^t \sin(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

b) (za 4 pkt.)
Czy funkcja $s \sin s$ należy do przestrzeni obrazów dystrybucji z D_0'? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 3. a) (za 6 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o ciągłości splotu.

b) (za 4 pkt.)
Niech $f_1(t) = t\sqrt{t}$, $f_2(t) = \frac{1}{t\sqrt{t}}$. Wyznaczyć $(f_1 * f_2)(t)$ i wynik przedstawić za pomocą funkcji elementarnych.

Zad. 4. (za 10 pkt.)
Niech $\widetilde{f}_\nu(p)$ będzie nieskończoną transformatą Hankela funkcji $f(x)$, zaś $\widetilde{g}_\nu(p)$ nieskończoną transformatą Hankela funkcji $g(x)$. Pokazać, że

$$\int_0^{+\infty} x f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^{+\infty} p \widetilde{f}_\nu(p)\, \widetilde{g}_\nu(p)\, dp.$$

Zad. 5. a) (za 7 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = 2\,\mathrm{sgn}(x-2) + |x|\, x.$$

b) (za 3 pkt)
Podać definicję dystrybucji temperowanej (wolnorosnącej) oraz definicję transformaty Fouriera dystrybucji.

Zad. 6. a) (za 7 pkt.)
Znaleźć rozwiązanie równania różnicowego

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - 4x_{n+1} + 8x_n = 3^n$$

z warunkami: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

b) (za 3 pkt.)
Sformułować twierdzenia o przesunięciu dla Z - transformaty.