Egzamin z TCiWdTD dn. 09.02.2011

....
Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Wyznaczyć transformatę Laplace'a funkcji $f(t) = \ln t$.

b) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o zachowaniu się transformaty Laplace'a w nieskończoności w przypadku klasycznym.

Zad. 2. (za 10 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie

$$y'(t) + 4y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\,d\tau = \sin t, \text{ dla } t > 0,\ y\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Podać warunki dostateczne istnienia splotu dwóch funkcji prawostronnych (tzn. równych tożsamościowo zero dla argumentów ujemnych).

b) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie Borela o splocie dla transformaty Laplace'a.

Zad. 4. (za 10 pkt.)
Niech $\widetilde{f}_\nu(p)$ będzie nieskończoną transformatą Hankela funkcji $f(x)$, zaś $\widetilde{g}_\nu(p)$ nieskończoną transformatą Hankela funkcji $g(x)$. Pokazać, że

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\,g(x)\,dx = \int_0^{+\infty} p\widetilde{f}_\nu(p)\,\widetilde{g}_\nu(p)\,dp.$$

Zad. 5. a) (za 6 pkt.)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = n, \text{ gdzie } x_0 = 0,\ x_1 = 1.$$

b) (za 4 pkt)
Podać definicję przekształcenia z jądrem fourierowskim oraz wyprowadzić warunek konieczny na to, aby funkcja $K(\alpha, x) = K(\alpha x)$ była jądrem fourierowskim.

Zad. 6. (za 10 pkt.)
Stosując klasyczną transformatę Fouriera rozwiązać zagadnienie (drgań struny)

$$\begin{cases} c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & \text{dla } x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

gdzie $u = u(x,t)$ jest funkcją niewiadomą, f jest funkcją daną całkowalną na $\mathbb{R}$, zaś c stałą dodatnią.