Egzamin z TCiWdTD dn. 31.01.2012

....

Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. (za 10 pkt.)

Wiedząc, że

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)2^{\nu+2k}} \quad \text{dla } z \in \mathbb{C},\ \nu \in \mathbb{C},$$

wyrazić funkcję $J_{-\frac{3}{2}}(z)$ za pomocą funkcji elementarnych zmiennej z.

Zad. 2. a) (za 5 pkt.)

Sformułować i udowodnić twierdzenie Borela o splocie dla transformaty Laplace'a.

b) (za 5 pkt.)

Udowodnić, że $[t^2 \cdot 1_+(t)] * [e^t \cdot 1_+(t)] = (2e^t - t^2 - 2t - 2) \cdot 1_+(t)$.

Zad. 3. a) (za 7 pkt.)

Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = |x-2| + 1_+(x).$$

b) (za 3 pkt.)

Podać definicję nośnika dystrybucji, równości dystrybucji na zbiorze otwartym, definicję dystrybucji temperowanej (wolnorosnącej).

Zad. 4. a) (za 7 pkt.)

Rozwiązać w przestrzeni D_0' równanie

$$D^2y + 2Dy + y = \delta^{(4)}$$

b) (za 3 pkt.)

Czy funkcja $\frac{1}{s}\sin s$ należy do przestrzeni obrazów dystrybucji z D_0'? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 5. a) (za 8 pkt)

Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = n^2, \text{ gdzie } x_0 = 0,\ x_1 = 0.$$

b) (za 2 pkt.)

Sformułować twierdzenia o przesunięciu dla $Z-$transformaty.

Zad. 6. (za 10 pkt.)

Stosując jedną z transformat skończonych znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \text{dla } x \in (0;\pi),\ t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \text{dla } x = 0,\ x = \pi,\ t > 0 \\ v = f(x) & \text{dla } t = 0, \end{cases}$$

gdzie $v = v(x,t)$ jest funkcją niewiadomą, a $f(x)$ daną funkcją ciągłą, $k > 0$.