Egzamin z TCiWdTD dn. 26.01.2013

....

Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. (za 7 pkt.)
Wiedząc, że wielomiany Laguerre'a wyrażają się wzorem

$$L_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{n!} e^{\alpha t} \frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-\alpha t}\right),$$

wyznaczyć transformatę Laplace'a $\mathcal{L}\{L_{n,\alpha}\}(s)$.

b) (za 3 pkt.)
Sformułować wykorzystane własności transformaty Laplace'a.

Zad. 2. (za 7 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie

$$y'(t) + 4y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\,d\tau = e^{-t} \text{ dla } t > 0,\ y\left(0^+\right) = 1.$$

b) (za 3 pkt.)
Niech $f_1(t) = \sqrt{t}$, $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Wyznaczyć $(f_1 * f_2)'(t)$.

Zad. 3. a) (za 7 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o zachowaniu się transformaty Laplace'a w nieskończoności.

b) (za 3 pkt)
Niech $\mathcal{H}_\nu\{f(r)\}(p) = \widetilde{f}_\nu(p)$ oznacza nieskończoną transformatę Hankela funkcji $f(r)$ w punkcie p. Pokazać, że dla $a > 0$ zachodzi wzór

$$\mathcal{H}_\nu\{f(ar)\}(p) = \frac{1}{a^2}\widetilde{f}_\nu\left(\frac{p}{a}\right).$$

Zad. 4. a) (za 7 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = 2\,\mathrm{sgn}(x-2) + |x|\,x.$$

b) (za 3 pkt)
Podać definicję dystrybucji temperowanej (wolnorosnącej) oraz definicję transformaty Fouriera dystrybucji.

Zad. 5. (za 10 pkt.)
Podać definicję przekształcenia całkowego z jądrem fourierowskim. Podać przykłady takich przekształceń wraz z uzasadnieniem. Czy transformata Mellina jest takim przekształceniem?

Zad. 6. a) (za 7 pkt)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = n, \text{ gdzie } x_0 = 0,\ x_1 = 1.$$

b) (za 3 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenia o przesunięciu dla $Z-$transformaty.