Egzamin z TCiWdTD dn. 7.02.2013

....
Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Udowodnić wzór

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(\sigma)\,d\sigma,$$

gdzie $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ jest transformatą Laplace'a funkcji f, a droga całkowania jest tak dobrana, że $\operatorname{Re} s \to +\infty$.

b) (za 5 pkt.)
Wyznaczyć $\mathcal{L}[\operatorname{Si}(kt)](s)$, gdzie $\operatorname{Si}(kt) = \int_0^t \frac{\sin(k\tau)}{\tau} d\tau$ (tzw. sinus całkowy).

Zad. 2. a) (za 7 pkt.)
Znaleźć rozwiązanie równania: $y'' + 2y' + 2y = f(t)$ z warunkami początkowymi $y(0^+) = y'(0^+) = 0$, gdzie f oznacza funkcję daną posiadającą transformatę Laplace'a.

b) (za 3 pkt.)
Sformułować wykorzystane własności transformaty Laplace'a.

Zad. 3. a) (za 4 pkt.)
Wyprowadzić wzór na $\mathcal{L}^{-1}\{\ln s\}$ w sensie dystrybucyjnym.

b) (za 6 pkt.)
Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$t^2 D^2 y + 4tDy + 2y = \delta.$$

Zad. 4. a) (za 4 pkt.)
Wykazać, że $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ dla $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.

b) (za 6 pkt.)
Wykazać, że jeśli $J_\nu(a) = 0$, to $J_{\nu+1}(a) \neq 0$ dla $\nu \in \mathbb{C}$.

Zad. 5. a) (za 5 pkt.)
Sformułować i wyprowadzić wzór sumacyjny Poissona.

b) (za 5 pkt.)
Korzystając ze wzoru sumacyjnego Poissona dla funkcji $\varphi(x) = e^{-\alpha x^2}$ $(\alpha > 0)$ pokazać, że

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi^2 n^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2}.$$

Zad. 6. (za 10 pkt.)
Rozwiązać zagadnienie:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ dla } 0 < x, y < \pi,$$

z warunkami: $u'_x(0, y) = u'_x(\pi, y) = u'_y(x, 0) = 0$, $u'_y(x, \pi) = u_0 \neq 0$.