Egzamin z TCiWdTD dn. 30.01.2014

....

Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. (za 7 pkt.)
Wiedząc, że wielomiany Laguerre'a wyrażają się wzorem

$$L_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{n!} e^{\alpha t} \frac{d^n}{dt^n}\left(t^n e^{-\alpha t}\right),$$

wyznaczyć transformatę Laplace'a $\mathcal{L}\{L_{n,\alpha}\}(s)$.

b) (za 3 pkt.)
Sformułować wykorzystane własności transformaty Laplace'a.

Zad. 2. (za 7 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać zagadnienie

$$y'(t) + 4y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\, d\tau = e^{-t} \text{ dla } t > 0,\ y\left(0^+\right) = 1.$$

b) (za 3 pkt.)
Niech $f_1(t) = \sqrt{t}$, $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Wyznaczyć $(f_1 * f_2)'(t)$.

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Czy funkcje $F(s) = \frac{1}{s^2}\cos s$ i $F(s) = \ln s$ należą do przestrzeni obrazów klasycznej transformaty Laplace'a? Odpowiedź uzasadnić.

b) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o jednoznaczności dla klasycznej transformaty Laplace'a.

Zad. 4. a) (za 6 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = 2\,\mathrm{sgn}\,(x-2) + 2|x|\,x.$$

b) (za 4 pkt)
Podać definicję dystrybucji temperowanej (wolnorosnącej) oraz definicję transformaty Fouriera dystrybucji temperowanej.

Zad. 5. (za 10 pkt.)
Stosując jedną z transformat skończonych znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \text{dla } x \in (0;\pi),\ t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \text{dla } x = 0,\ x = \pi,\ t > 0 \\ v = x(\pi - x) & \text{dla } t = 0, \end{cases}$$

gdzie $v = v(x,t)$ jest funkcją niewiadomą, $k > 0$.

Zad. 6. a) (za 6 pkt)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = n, \text{ gdzie } x_0 = 0,\ x_1 = 1.$$

b) (za 4 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenia o przesunięciu dla $Z-$transformaty.