Egzamin z TCiWdTD dn. 3.02.2014

....
Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. a) (za 5 pkt.)
Pokazać, że $J_0'(z) = -J_1(z)$ dla każdej liczby zespolonej z.

b) (za 5 pkt.)
Pokazać, że jeśli $J_\nu(z_0) = 0$, to $J_\nu'(z_0) \neq 0$ dla dowolnego $\nu \in \mathbb{C}$.

Zad. 2. (za 10 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać równanie

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 6e^{-t} \text{ dla } t > 0, \text{ z warunkami } y\left(0^+\right) = y'\left(0^+\right) = y''\left(0^+\right) = 0.$$

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie Borela o splocie dla transformaty Laplace'a.

b) (za 5 pkt.)
Czy funkcja $F(s) = \sqrt{s^2+1}$ należy do przestrzeni obrazów transformaty Laplace'a dystrybucji z przestrzeni D_0'? Odpowiedź uzasadnić.

Zad. 4. a) (za 6 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = |x-2| + 1_+(x).$$

b) (za 4 pkt.)
Podać definicję nośnika dystrybucji, równości dystrybucji na zbiorze otwartym, definicję dystrybucji temperowanej (wolnorosnącej).

Zad. 5. a) (za 5 pkt.)
Pokazać, że jeśli f jest bezwzględnie całkowalna na $\mathbb{R}$, to

$$\mathbb{F}\left[f(t)\sin\omega_0 t\right](\omega) = \frac{1}{2i}\left[F(\omega-\omega_0) - F(\omega+\omega_0)\right],$$

gdzie F oznacza transformatę Fouriera funkcji f.

b) (za 5 pkt)
Niech $\mathcal{H}_\nu\{f(r)\}(p) = \widetilde{f}_\nu(p)$ oznacza nieskończoną transformatę Hankela funkcji $f(r)$ w punkcie p. Pokazać, że dla $a > 0$ zachodzi wzór

$$\mathcal{H}_\nu\{f(ar)\}(p) = \frac{1}{a^2}\widetilde{f}_\nu\left(\frac{p}{a}\right).$$

Zad. 6. a) (za 8 pkt)
Rozwiązać równanie różnicowe

$$x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 1, \text{ gdzie } x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1.$$

b) (za 2 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie o splocie dla $Z-$transformaty.