Egzamin z TCiWdTD dn. 10.02.2014

....

Nazwisko i imię, grupa

1	2	3	4	5	6	Egz	Ćw	$\sum$

Zad. 1. (za 10 pkt.)
Funkcję $f(x) = 1 - x^2$ rozwinąć na przedziale $(0,1)$ na szereg Fouriera-Bessela względem układu funkcji $(J_0(x_\nu))$, gdzie (x_ν) jest ciągiem dodatnich zer funkcji J_0.

Zad. 2. (za 10 pkt.)
Stosując transformatę Laplace'a rozwiązać równanie

$$y(t) = 2t + \int_0^t \sin(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

Zad. 3. a) (za 5 pkt.)
Wyznaczyć transformatę Mellina funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

b) (za 5 pkt.)
Podać i udowodnić warunek konieczny na to, aby funkcja $K(\alpha, x) = K(\alpha x)$ wyznaczała jądro fourierowskie.

Zad. 4. a) (za 6 pkt.)
Wyznaczyć pierwszą i drugą pochodną w sensie dystrybucyjnym funkcji

$$f(x) = |x| + 1_+(x-1).$$

b) (za 4 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenie Borela o splocie dla transformaty Laplace'a w przypadku dystrybucyjnym.

Zad. 5. a) (za 5 pkt.)
Podać najważniejsze własności transformaty Fouriera dystrybucji temperowanych.

b) (za 5 pkt)
Wykazać, że jeśli $f, f', \ldots, f^{(n)}$ są bezwzględnie całkowalne na $\mathbb{R}$, to

$$\mathbb{F}\left[f^{(n)}(t)\right](\omega) = (i\omega)^n F(\omega),$$

gdzie $\mathbb{F}$ oznacza transformatę Fouriera, $F = \mathbb{F}[f]$.

Zad. 6. a) (za 6 pkt)
Znaleźć rozwiązanie równania różnicowego

$$x_{n+3} - 2x_{n+2} - 4x_{n+1} + 8x_n = 3^n$$

z warunkami: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

b) (za 4 pkt.)
Sformułować i udowodnić twierdzenia o przesunięciu dla $Z-$transformaty.