0.1 Dystrybucje temperowane

Definicja 0.1.1 *Funkcja $f(t)$ jest szybkomalejąca* $\Leftrightarrow$

$$\forall n,k \in \mathbb{N}\, \exists c_{n,k} \quad \left| t^n \varphi^{(k)} \right| \leq c_{n,k}.$$

Zbiór funkcji szybkomalejących oznaczamy przez Φ.

Uwaga 0.1.1 *Zachodzi oczywista inkluzja $D \subset \Phi$, bowiem każda funkcja o nośniku zwartym jest szybkomalejąca. Co więcej, rozważając przykład funkcji $\varphi(t) = e^{-t^2} \in \Phi$ łatwo zauważyć, że $\varphi \notin D$, zatem $D \subsetneq \Phi$.*

Definicja 0.1.2 *Mówimy, że ciąg funkcji $\varphi_n \in \Phi$ zbiega do $\varphi \in \Phi \Leftrightarrow \forall m,k \in \mathbb{N}\ t^m \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows t^m \varphi^{(k)}$ (zb. jednostajna).*

Definicja 0.1.3 *Dystrybucją wolnorosnącą (temperowaną) nazywamy funkcjonał liniowy i ciągły na przestrzeni Φ. Zbiór dytrybucji wolnorosnących oznaczamy Φ'.*

Uwaga 0.1.2 *Oczywiście jeżeli $f \in \Phi'$, to $f \in D'$, zatem $\Phi' \subset D'$.*

Rozważmy następujący przykład:

Przykład 0.1.1

$$\langle T, e^{-t^2} \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2} e^{-n^2}.$$

Zatem $T \notin \Phi'$, $T \in D'$.

Przyjęcie powyższej definicji dystrybucji temperowanej jest uzasadnione tym, że w przypadku funkcji klasycznych (dystrybucji regularnych) mamy:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)\, dt,$$

gdzie $\varphi \in \Phi$. O ile zachodzi oszacowanie:

$$|f(t)| \leqslant Ct^n.$$

to całka powyższa istnieje dla każdej funkcji szybkomalejącej φ. Funkcje takie nazywamy wolnorosnącymi. Każda wolnorosnąca funkcja wyznacza dystrybucję temperowaną.

0.2 Transformata Fouriera dystrybucji

Przypomnijmy sobie równość Parsevala:
Jeśli $G_1 = \mathcal{F}[g_1]$ i $G_2 = \mathcal{F}[g_2]$, to:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(u) G_2(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(u) G_1(u)\, du.$$

Definicja 0.2.1

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi \rangle \stackrel{def}{=} \langle f, \mathcal{F}[\varphi] \rangle,$$

gdzie $\varphi \in \Phi$.

Uwaga 0.2.1 *Uzasadnienie powyższej definicji wynika z przedstawionej wyżej równości Parsevala.*

Twierdzenie 0.2.1 *Jeśli $\varphi \in \Phi$, to $\mathcal{F}[\varphi] \in \Phi$.*

Dowód Niech $F = \mathcal{F}[\varphi]$. Mamy:

$$F^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (it)^k e^{-i\omega t} \varphi(t)\, dt.$$

Dokonajmy oszacowania:

$$|(i\omega)^n F^{(k)}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d^n}{dt^n} \big((-it)^k \varphi(t)\big)\ dt \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d^n}{dt^n} \big((-it)^k \varphi(t)\big) \right| dt \leqslant C_{n.k} \Rightarrow F \in \Phi.$$

$\square$

Uwaga 0.2.2 *Przekształcenie: $\mathcal{F} : \Phi \longrightarrow \Phi$ jest ciągłe. Wystarczy pokazać ciągłość w zerze. Czyli, że jeśli $\varphi_n \to 0$, to $\mathcal{F}\varphi_n \to 0$.*

Uwaga 0.2.3 *Niech $f \in \Phi\prime$ oraz $\varphi_n \to 0$. Mamy*

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi_n \rangle = \langle f, \mathcal{F}\varphi_n \rangle \to \langle f, 0 \rangle = 0.$$

Stąd $\mathcal{F}[f]$ jest ciągłe.

0.2.1 Własności

Twierdzenie 0.2.2 (Własności transformaty Fouriera dystrybucji) *Niech $F = \mathcal{F}[f]$. Wtedy:*

1. $\mathcal{F}[(-it)^k f(t)] = F^{(k)}(\omega)$.
2. $\mathcal{F}[D^k f] = (i\omega)^k F(\omega)$.
3. $\mathcal{F}[f(t-\tau)] = e^{-i\omega\tau}\mathcal{F}$.
4. *Niech* $f = \delta^{(k)}(t-\tau)$.
   Wtedy:
   $\mathcal{F}[f] = (it)^k e^{-it\tau}$. *W szczególności:*
   - $\mathcal{F}[\delta] = 1$,
   - $\mathcal{F}[\delta(t-\tau)] = e^{-it\tau}$,
   - $\mathcal{F}[\delta^{(k)}] = (it)^k$.
5. $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta$.
6. $\mathcal{F}[e^{-it\tau}] = 2\pi\delta(\omega+\tau)$.
7. $\mathcal{F}[(it)^k] = (-1)^k 2\pi\delta^{(k)}$.
8. $\mathcal{F}[(it)^k e^{-it\tau}] = (-1)^k 2\pi\delta^{(k)}(\omega+\tau)$.
9. $\mathcal{F}[at^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0] = 2\pi[a_n i^n \delta^{(n)} + a_{n-1}(i)^{n-1}\delta^{(n-1)} + \ldots + a_0\delta]$.

Dowód [Własność 1] Weźmy $k = 1$:

$$\langle F\prime, \varphi\rangle = -\langle F, \varphi\prime\rangle = \langle f, \mathcal{F}(\varphi\prime)\rangle = -\langle f, \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi\prime(\omega)\, d\omega\rangle . = \langle f, -\int\limits_{-\infty}^{\infty} (-it)e^{-i\omega t}\varphi(\omega)\, d\omega\rangle =$$

$$-\langle f, it\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi(\omega)\, d\omega\rangle = \langle -it\cdot f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = \langle \mathcal{F}[it\cdot f], \varphi\rangle .$$

□

Dowód [Własność 2]

$$\langle \mathcal{F}[D^k f], \varphi\rangle = \langle D^k f, \mathcal{F}[\varphi]\rangle = (-1)^k\langle f, \frac{d^k}{d\omega^k}\mathcal{F}[\varphi]\rangle = (-1)^k\langle f, \mathcal{F}[(-it)^k\varphi(t)]\rangle = \langle \mathcal{F}[f], (it)^k\varphi(t)\rangle =$$

$$= \langle \mathcal{F}[f](it)^k, \varphi\rangle .$$

□

Dowód [Własność 4]

$$\langle \mathcal{F}[f], \varphi\rangle = \langle \delta^{(k)}(t-\tau), \mathcal{F}\varphi\rangle = (-1)^k(\mathcal{F}\varphi)^{(k)}(\tau) = (-1)^k\mathcal{F}[(-it)^k\varphi(t)](\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau}(it)^k\varphi(t)\, dt =$$

$$= \langle e^{-it\tau}(it)^k, \varphi\rangle .$$

□

Dowód [Własność 5]

$$\langle \mathcal{F}[1], \varphi\rangle = \langle 1, \mathcal{F}\varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} 1\, d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi(t)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\cdot 0}\, d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\varphi(t)\, dt =$$

$$= 2\pi\varphi(0) = \langle 2\pi\delta, \varphi\rangle .$$

□

Lemat 0.2.1 *Zachodzi następująca tożsamość:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\lambda} = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\lambda - 2n\pi).$$

Dowód

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda}|\varphi(\lambda)\right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda}\varphi(\lambda)\, d\lambda = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-in\lambda}\varphi(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \lambda - 2k\pi = r \\ d\lambda = dr \end{array} \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{-in(r+2k\pi)}\varphi(r + 2k\pi)\, dr =$$

$$= |\text{niech } \varphi_k(r) = \varphi(r + 2k\pi)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-in2k\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{-inr}\varphi_k(r)\, dr =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)}c_n(\varphi_k)$$

gdzie $c_n(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} e^{-inr}\varphi_k(r)\,dr$ są współczynnikami Fouriera funkcji φ_k.

Wyrażenie $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)}c_n(\varphi_k)$ jest wartością sumy szeregu Fouriera tej funkcji w punkcie $r_k = -2k\pi$, a zatem z okresowości tej sumy mamy

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)}c_n(\varphi_k) = \varphi_k(-2k\pi) = \varphi_k(0) = \varphi(2k\pi).$$

Wynika stąd, że

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)}c_n(\varphi_k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2k\pi) = \left\langle 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - 2k\pi)\,|\varphi \right\rangle$$

co kończy dowód. □

0.2.2 Wzór sumacyjny Poissona

Twierdzenie 0.2.3 (Wzór sumacyjny Poissona) *Jeżeli $F = \mathcal{F}[\varphi]$, to zachodzi wzór:*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2n\pi).$$

Dowód

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - n), \mathcal{F}\varphi\rangle = \langle \mathcal{F}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - n)\right), \varphi\rangle =$$

$$\langle \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-in\lambda}, \varphi\rangle = \langle 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\lambda - 2n\pi), \varphi\rangle = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(2n\pi).$$

□

0.2.3 Tożsamość Jacobiego

Twierdzenie 0.2.4 (Tożsamość Jacobiego) *Jeżeli $\varphi(t) = e^{-tx^2}$, dla $t\rangle 0$, to $F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{\frac{-x^2}{4t}}$.*

Uwaga 0.2.4 *Dokonując podstawienia $t = \frac{\tau}{4\pi^2}$ otrzymujemy następującą postać powyższej tożsamości:*

$$\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\pi^2 n^2}{\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\tau n^2}.$$