

1. Wiedząc, że $L\{J_0(t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s) = \sqrt{s^2 + \alpha^2}$

2. Pokazać, że w przestrzeni dystrybucji D'_0 prawdziwa jest równość

$$t^k \delta^{(k)} = (-1)^k k! \delta.$$

3. Pokazać, że w przestrzeni dystrybucji D'_0 prawdziwa jest równość

$$(\sin at) \delta^{(1)} = -a\delta.$$

4. Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$D^3y + 3D^2y + 3Dy + y = \delta^{(4)}(t-1).$$

5. Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$tDy + 2y = 0.$$

6. Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$t^2 D^2y + 4tDy + 2y = \delta.$$

7. Przedyskutować szeregowy układ RLC w przypadku impulsu wejściowego $U(t) = U_0 \cdot 1_+(t)$.

8. Obliczyć pochodne w sensie dystrybucyjnym do rzędu drugiego włącznie, dla funkcji:

(a) $f(x) = 2|x-2| - 3|x+1|$;

(b) $f(x) = [x]$.

9. Udowodnić, że $[t \cdot 1_+(t)] * [e^t \cdot 1_+(t)] = (e^t - t - 1) \cdot 1_+(t)$.

10. Udowodnić, że $[1_+(t) \cdot \sin t] * [1_+(t) \cdot \cos t] = \frac{1}{2} 1_+(t) \cdot t \sin t$.

11. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = 1_+(t-a) - 1_+(t-b)$ dla $a < b$.

12. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = t^k e^{-at} 1_+(t)$.

13. Funkcję $f(x) = x^2 - 2x^4$ rozwinąć w przedziale $(0, 1)$ na szereg Fouriera-Bessela.

14. Funkcję $f(x) = 1 + x^4$ rozwinąć w przedziale $(0, 2)$ na szereg Fouriera-Bessela.

15. Wyznaczyć transformatę Mellina funkcji $f(x)$, jeśli:

(a) $f(x) = \frac{x^2}{1+2x^3}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$,

(c) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$.

16. Rozwiązać równania różnicowe:

(a) $x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 1, x_0 = -1, x_1 = 1$;

(b) $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 1, x_0 = 0, x_1 = 0, x_2 = 1$.

17. Niech $\tilde{f}_c(p)$ będzie tzw. skończonym przekształceniem cosinusowym określonym wzorem

$$\tilde{f}_c(p) = \int_0^a f(x) \cos \frac{p\pi x}{a} dx,$$

zaś $\tilde{f}_s(p)$ będzie skończonym przekształceniem sinusowym określonym wzorem

$$\tilde{f}_s(p) = \int_0^a f(x) \sin \frac{p\pi x}{a} dx.$$

Wyznaczyć $\tilde{f}_c(n)$ i $\tilde{f}_s(n)$, gdzie n jest liczbą naturalną, dla funkcji:

(a) $f(x) = 1$;

(b) $f(x) = x$;

(c) $f(x) = e^{kx}$;

(d) $f(x) = \cos kx$;

(e) $f(x) = \sin kx$.