

Spis treści

Wstęp	ii
1 Pojęcia podstawowe	1
1.1 Przegląd wybranych równań i modeli fizycznych	1
1.1.1 Równania opisujące ruch falowy	1
1.1.2 Równania przewodnictwa cieplnego i dyfuzji	1
1.1.3 Zagadnienia prowadzące do równania Laplace'a i równania Poissona	2
1.2 Klasyfikacja prawie-liniowych r.r.cz. II rzędu dla $n=2$	2
1.3 Uwagi o klasyfikacji liniowych r.r.cz. II rzędu dla $n>2$	4
1.4 Zagadnienie Cauchy'ego dla równania liniowego	5
1.5 Zagadnienia graniczne poprawnie postawione	6
1.6 Zadania	6
2 Struna nieograniczona	14
2.1 Zagadnienie Cauchy'ego dla równania jednorodnego	14
2.2 Zagadnienie Cauchy'ego dla równania niejednorodnego	16
2.3 Stabilność rozwiązania	16
2.4 Struna jednostronnie ograniczona	17
2.4.1 Struna z zamocowanym końcem	17
2.4.2 Struna ze swobodnym poziomym końcem	18
2.5 Wzór Kirchoffa	18
3 Metoda Fouriera dla równań hiperbolicznych	19
3.1 Zagadnienie brzegowo-początkowe dla struny ograniczonej	19
3.1.1 Drgania swobodne struny zamocowanej	19
3.1.2 Drgania wymuszone struny zamocowanej	22
3.1.3 Przypadek ogólny	23
3.2 Równanie drgań membrany swobodnej	23
3.2.1 Membrana prostokątna	24
3.2.2 Membrana kołowa	25
3.2.3 Membrana nieograniczona	28
3.3 Drgania poprzeczne belki	30
3.4 Zadania	31
4 Równanie przewodnictwa cieplnego (I)	36
4.1 Zagadnienie Cauchy'ego dla pręta nieograniczonego	36
4.1.1 Uogólniona metoda Fouriera	36
4.1.2 Rozwiązanie podstawowe, całka Poissona	37
4.1.3 Przykłady	39

4.2	Rozkład temperatury w przecię półograniczonym	42
4.3	Zadania	44
5	Równanie przewodnictwa cieplnego (II)	45
5.1	Metoda Fouriera dla pręta ograniczonego	45
5.1.1	Pierwsze zagadnienie brzegowe dla pręta ograniczonego	45
5.1.2	Zasada maksimum dla równania przewodnictwa	49
5.1.3	Jednoznaczność rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego	50
5.1.4	Stabilność rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego	50
5.2	Przykłady radialnego rozkładu ciepła w walcu	51
5.2.1	Zagadnienie ostygnięcia walca	51
5.2.2	Zagadnienie nagrzewania powierzchni bocznej walca	52
5.3	Zadania	54
6	Funkcje harmoniczne	55
6.1	Tożsamości Greena, wzór podstawowy teorii funkcji harmonicznych	55
6.1.1	Przypadek funkcji dwóch zmiennych niezależnych	55
6.1.2	Przypadek dowolnej liczby zmiennych niezależnych	56
6.2	Własności funkcji harmonicznych	57
6.3	Zadania	59
7	Zagadnienia brzegowe dla równań eliptycznych	61
7.1	Metoda funkcji Greena	62
7.1.1	Funkcja Greena dla koła - metoda punktów symetrycznych	63
7.2	Metoda szeregów Fouriera dla koła	64
7.3	Metoda odwzorowań konforemnych	65
7.4	Jednoznaczność zagadnienia Dirichleta i Neumanna	66
7.5	Stabilność rozwiązania zagadnienia Dirichleta	67
7.6	Zadania	67
8	Dystrybucje, wiadomości wstępne (I)	69
8.1	Przestrzeń funkcji próbnych D , przestrzeń D'	69
8.1.1	Przykłady dystrybucji skończonego rzędu	73
8.2	Transformata Laplace'a dystrybucji	73
8.2.1	Przykłady transformaty Laplace'a dystrybucji	74
8.2.2	Najważniejsze własności L-transformaty dystrybucji	74
8.3	Zadania	78
9	Dystrybucje, wiadomości wstępne (II)	79
9.1	Splot dystrybucji z przestrzeni D'_0	79
9.1.1	Własności splotu dystrybucji	80
9.2	Przestrzeń dystrybucji temperowanych	81
9.2.1	Transformata Fouriera dystrybucji temperowanych	82
9.2.2	Najważniejsze własności i przykłady transformat Fouriera	83
9.3	Zadania	85
10	Informacja o przestrzeniach Hilberta	87
10.1	Przestrzeń unitarne, iloczyn skalarny	87
10.2	Przykłady przestrzeni Hilberta	89
10.2.1	Przestrzeń euklidesowa n -wymiarowa rzeczywista lub zespolona	89

10.2.2	Przestrzeń ciągów sumowalnych z kwadratem	89
10.2.3	Przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem	90
10.3	Ortogonalność, twierdzenie o rzucie ortogonalnym	90
10.4	Układy ortonormalne w przestrzeniach Hilberta	91
10.4.1	Przykłady układów ortonormalnych	92
10.5	Szeregi Fouriera względem układów ortonormalnych	93
10.5.1	Trygonometryczne szeregi Fouriera	94
10.5.2	Zbieżność punktowa trygonometrycznych szeregów Fouriera	94
10.6	Zadania	95
11	Informacja o przestrzeniach Sobolewa	97
11.1	Definicja przestrzeni Sobolewa	97
11.2	Ślady funkcji z przestrzeni Sobolewa na powierzchniach	98
11.3	Normy równoważne w przestrzeniach Sobolewa	100
12	Rozwiązania uogólnione (słabe)	102
12.1	Eliptyczne operatory różniczkowe rzędu parzystego	102
12.2	Wprowadzenie definicji słabego rozwiązania	104
12.2.1	Słabe rozwiązanie równania różniczkowego	104
12.2.2	Stabilne i niestabilne warunki brzegowe	105
12.2.3	Słabe rozwiązania zagadnień brzegowych	106
12.3	Istnienie słabych rozwiązań zagadnień brzegowych	109
12.4	Przykłady zagadnień brzegowych - analiza rozwiązalności	110
13	Elementy rachunku wariacyjnego	113
13.1	Przykładowe zagadnienia	113
13.2	Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału	114
13.2.1	Przypadki funkcjonałów szczególnej postaci	115
13.3	Twierdzenie o minimum funkcjonału kwadratowego	122
13.4	Zadania	125
14	Wstęp do metod przybliżonych	128
14.1	Wariacyjna definicja rozwiązań uogólnionych	128
14.2	Metoda szeregów ortonormalnych	130
14.3	Metoda Ritza	131
14.4	Metoda Galerkina	132
14.5	Metoda najmniejszych kwadratów	133
14.6	Metoda gradientów	135
14.7	Zadania	136
	Literatura	137

Wstęp

Poniższy tekst zawiera konspekt wykładu z równań różniczkowych cząstkowych i ich zastosowań podzielony na 14 jednostek. Konspekt ten powstał w trakcie przygotowywania wykładu dla doktorantów Politechniki Warszawskiej w semestrze letnim r. ak. 2002/2003, semestrze zimowym r. ak. 2003/2004 oraz semestrze zimowym r. ak. 2004/2005.

Poniższy konspekt nie zawiera pełnej treści wykładu - jest tylko skrótowym przedstawieniem omawianych zagadnień. Dla pełnego zrozumienia treści konieczny jest osobisty udział w zajęciach lub/i aktywne wykorzystanie podanej na końcu literatury.

Realizacja numeryczna niektórych omówionych w treści przykładów powstała dzięki uprzejmości Pana dr. Janusza Wąsowskiego z Wydziału Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, za co składam mu serdeczne podziękowania.

Marian Majchrowski

Temat 1

Pojęcia podstawowe

1.1 Przegląd wybranych równań i modeli fizycznych

Równaniem różniczkowym cząstkowym rzędu drugiego o n zmiennych niezależnych nazywamy równanie postaci

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, \dots, u_{x_nx_n}) = 0, \quad (1.1)$$

gdzie $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

1.1.1 Równania opisujące ruch falowy

Zjawiska drgań poprzecznych struny jednowymiarowej, drgań podłużnych prętów, drgań elektrycznych w przewodach opisane są równaniem

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (1.2)$$

które jest szczególnym przypadkiem równania (1.1) dla $n = 2$, $u = u(x, t)$.

Drgania poprzeczne membrany opisuje równanie

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy}) + f(x, t), \quad (1.3)$$

które spełnia funkcja $u = u(x, y, t)$ - wychylenie z położenia równowagi ($n = 3$), zaś równanie fali akustycznej jest postaci

$$u_{tt} = c^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

gdzie $u = u(x, y, z, t)$ oznacza tzw. potencjał prędkości ($n = 4$).

Wszystkie powyżej rozważane równania można jednolicie zapisać używając tzw. operatora Laplace'a $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ (względem zmiennych przestrzennych) w postaci

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + f(x_1, \dots, x_n, t). \quad (1.4)$$

1.1.2 Równania przewodnictwa cieplnego i dyfuzji

Zjawisko przewodnictwa cieplnego w pręcie jednowymiarowym opisane jest równaniem

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad (1.5)$$

gdzie funkcja $u = u(x, t)$ oznacza temperaturę w punkcie x , w chwili t , zaś f opisuje działające źródła ciepła. Również zjawisko dyfuzji gazu lub cieczy opisane jest równaniem (1.5), gdzie u oznacza stężenie obserwowanego składnika.

Rozchodzenie się ciepła w przestrzeni można opisać równaniem

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t),$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

1.1.3 Zagadnienia prowadzące do równania Laplace'a i równania Poissona

Stacjonarne (niezmienne w czasie) pole temperatur $u(x, y, z)$ spełnia *równanie Laplace'a*

$$\Delta u = 0, \tag{1.6}$$

co wynika bezpośrednio z równania (1.3), w którym $f \equiv 0$. Powyższe równanie spełnione jest także przez potencjał pola grawitacyjnego i elektrostatycznego w próżni.

Gdy gęstość masy (ładunków elektrostatycznych) wynosi ρ , to wówczas odpowiednie potencjały spełniają tzw. *równanie Poissona*

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

Szeroka klasa zagadnień związanych z drganiami ustalonymi prowadzi do tzw. *równania Helmholtza*

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

1.2 Klasyfikacja prawie-liniowych r.r.cz. II rzędu dla $n=2$

Szczególnie ważną rolę odgrywają *prawie-liniowe równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu*. Są to równania postaci

$$A(x, y) u_{xx} + 2B(x, y) u_{xy} + C(x, y) u_{yy} + M(x, y, u, u_x, u_y) = 0. \tag{1.7}$$

W szczególności, równania (1.2), (1.5) i (1.6) dla $n = 2$ są tej postaci.

Wprowadzamy wyróżnik $\Delta(x, y) = B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y)$ i w zależności od jego znaku mówimy, że równanie (1.7) jest w punkcie (x, y) typu:

- *hiperbolicznego* $\Leftrightarrow \Delta(x, y) > 0$,
- *parabolicznego* $\Leftrightarrow \Delta(x, y) = 0$,
- *eliptycznego* $\Leftrightarrow \Delta(x, y) < 0$.

Równanie (1.7) nazywamy hiperbolicznym (parabolicznym, eliptycznym) w obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$, jeśli jest ono hiperboliczne (paraboliczne, eliptyczne) w każdym punkcie obszaru D .

Założmy, że dane jest przekształcenie $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ określone dla $(x, y) \in D$. Zakładamy, że jest ono *nieosobliwe*, tzn. jego jacobian spełnia warunek

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.8}$$

T w i e r d z e n i e

Typ równania (1.7) jest niezmienniczy ze względu na nieosobliwą zamianę zmiennych (1.8).

Dowód twierdzenia wynika z faktu, że po dokonaniu zamiany zmiennych w równaniu jego „nowy” wyróżnik Δ' spełnia zależność

$$\Delta' = \left[\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right]^2 \Delta,$$

a zatem znaki wyrażeń Δ i Δ' są takie same. ■

Prawdziwe są następujące twierdzenia dotyczące poszczególnych typów równań prawie-liniowych postaci (1.7).

T w i e r d z e n i e

Jeśli równanie (1.7) jest hiperboliczne w obszarze D i $A \neq 0$ lub $C \neq 0$, to istnieje nieosobliwe przekształcenie $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $(x, y) \in D$ takie, że równanie (1.7) we współrzędnych ξ , η przybiera postać

$$u_{\xi\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \tag{1.9}$$

zwaną *pierwszą postacią kanoniczną* równania (1.7) w przypadku hiperbolicznym. Funkcje $\xi(x, y)$ i $\eta(x, y)$ są całkami pierwszymi układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{dy}{dx} = -m_1, \quad \frac{dy}{dx} = -m_2,$$

gdzie

$$m_{1,2}(x, y) = \frac{-B(x, y) \pm \sqrt{\Delta(x, y)}}{A(x, y)}.$$

■

T w i e r d z e n i e

Jeżeli równanie (1.7) jest paraboliczne w obszarze D i $A \neq 0$, to istnieje nieosobliwe przekształcenie $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $(x, y) \in D$ takie, że równanie (1.7) we współrzędnych ξ , η przybiera postać

$$u_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \tag{1.10}$$

zwaną *postacią kanoniczną* równania typu parabolicznego o dwóch zmiennych niezależnych. Funkcja $\xi(x, y)$ jest całką pierwszą równania różniczkowego zwyczajnego

$$\frac{dy}{dx} = -m, \text{ gdzie } m = -\frac{B(x, y)}{A(x, y)}.$$

Funkcję $\eta = \eta(x, y)$ przyjmujemy w sposób dowolny, ale tak, by para $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ tworzyła nieosobliwe przekształcenie obszaru D , tzn. aby był spełniony warunek (1.8). ■

T w i e r d z e n i e

Jeżeli równanie (1.7) jest eliptyczne w obszarze D i A, B, C są analityczne, to istnieje nieosobliwe przekształcenie $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, $(x, y) \in D$ takie, że równanie (1.7) we współrzędnych ξ , η przybiera postać

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0 \tag{1.11}$$

zwaną *postacią kanoniczną* równania typu eliptycznego o dwóch zmiennych niezależnych. Funkcje $\xi(x, y)$ i $\eta(x, y)$ określone są zależnościami $\xi(x, y) = \operatorname{Re}(\varphi(x, y))$, $\eta(x, y) = \operatorname{Im}(\varphi(x, y))$, gdzie $\varphi(x, y)$ jest całką pierwszą, równania różniczkowego zwyczajnego

$$\frac{dy}{dx} = -m, \text{ gdzie } m = \frac{-B(x, y) + i\sqrt{-\Delta(x, y)}}{A(x, y)}.$$

■

1.3 Uwagi o klasyfikacji liniowych r.r.cz. II rzędu dla $n > 2$

Dla prostoty rozważmy przypadek równania liniowego o współczynnikach rzeczywistych postaci

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0, \quad (a_{i,j} = a_{j,i}) \quad (1.12)$$

gdzie współczynniki a, b, c, f zależą od x_1, x_2, \dots, x_n .

Z równaniem tym związana jest forma kwadratowa zmiennych y_1, y_2, \dots, y_n

$$\sum_{i,j=1}^n \overset{\circ}{a}_{i,j} y_i y_j, \quad (1.13)$$

gdzie $\overset{\circ}{a}_{i,j}$ oznacza wartość współczynnika $a_{i,j}$ w pewnym punkcie $P(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$. Macierz $[\overset{\circ}{a}_{i,j}]$ formy (1.13) możemy sprowadzić do postaci kanonicznej, w której na przekątnej mogą znajdować się tylko liczby 1, -1 lub 0, zaś wszystkie elementy poza przekątną są równe zero. Zgodnie z twierdzeniem o bezwładności form kwadratowych liczba współczynników dodatnich, ujemnych i równych zero jest niezmiennicza względem przekształcenia liniowego sprowadzającego formę (1.13) do postaci kanonicznej (zauważmy, że postać kanoniczna formy kwadratowej nie jest jednoznacznie wyznaczona).

Niech $\bar{a}_{i,j}$ oznaczają współczynniki formy (1.13) w postaci kanonicznej. W zależności od zachowania się współczynników $\bar{a}_{i,i}$ wprowadzamy definicję typu równania (1.12).

D e f i n i c j a

Mówimy, że równanie (1.12) jest w punkcie $P(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ typu

- *eliptycznego*, jeżeli wszystkie współczynniki $\bar{a}_{i,i}$ dla $i = 1, 2, \dots, n$ mają ten sam znak;
- *hiperbolicznego*, jeżeli $n - 1$ współczynników $\bar{a}_{i,i}$ ma ten sam znak, zaś pozostały współczynnik ma znak przeciwny;
- *ultrahyperbolicznego*, jeżeli wśród współczynników $\bar{a}_{i,i}$ jest m współczynników jednego znaku ($m > 1$), a $n - m$ współczynników ma znak przeciwny;
- *parabolicznego*, jeżeli chociaż jeden ze współczynników $\bar{a}_{i,i}$ jest równy zero.

■

T w i e r d z e n i e

W zależności od typu równania w punkcie $P(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_n)$ można je sprowadzić w tym punkcie do jednej z następujących postaci kanonicznych:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \dots + u_{x_nx_n} + \Phi = 0; \quad (\text{typ eliptyczny})$$

$$u_{x_1x_1} - \sum_{i=2}^n u_{x_ix_i} + \Phi = 0; \quad (\text{typ hiperboliczny})$$

$$\sum_{i=1}^m u_{x_ix_i} - \sum_{i=m+1}^n u_{x_ix_i} + \Phi = 0 \quad (m > 1); \quad (\text{typ ultrahiperboliczny})$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_ix_i}) + \Phi = 0 \quad (m \geq 1). \quad (\text{typ paraboliczny})$$

■

1.4 Zagadnienie Cauchy'ego dla równania liniowego

Rozważmy liniowe r.r.cz. rzędu m postaci

$$u_{x_n \dots x_n}^{(m)} = \sum_{|\alpha| \leq m, a_n < m} a_\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) D^\alpha u + f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.14)$$

w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, który ma niepuste przecięcie z płaszczyzną $x_n = 0$.

Zagadnieniem Cauchy'ego (zagadnieniem początkowym) dla równania (1.14) nazywamy zagadnienie polegające na wyznaczeniu rozwiązania tego równania spełniającego jednocześnie następujące warunki początkowe

$$u_{x_n \dots x_n}^{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad \text{dla } (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) \in \Omega \quad (1.15)$$

i $k = 0, 1, \dots, m - 1$.

■

Następujące twierdzenie określa warunki wystarczające istnienia lokalnego rozwiązania powyższego zagadnienia początkowego.

T w i e r d z e n i e (*Cauchy'ego-Kowalewskiej*)

Jeżeli:

- 1° współczynniki a_α i wyraz wolny f w równaniu (1.14) są funkcjami analitycznymi w obszarze Ω ,
- 2° funkcje φ_k ($k = 0, 1, \dots, m - 1$) są analityczne w obszarze ω będącym przecięciem Ω i płaszczyzny $x_n = 0$,

to zagadnienie Cauchy'ego (1.14)-(1.15) ma dokładnie jedno rozwiązanie analityczne, określone w pewnym otoczeniu Ω' obszaru ω . Obszar Ω' zależy od obszaru analityczności danych funkcji.

■

1.5 Zagadnienia graniczne poprawnie postawione

Dla równań różniczkowych cząstkowych rozważamy zwykle tzw. *zagadnienia graniczne* polegające na znalezieniu rozwiązania równania spełniającego pewne dodatkowe warunki - *warunki początkowe* (określone w pewnej chwili czasu np. $t = 0$) lub/i *warunki brzegowe* (określone zwykle na brzegu rozważanego obszaru przestrzennego). Warunki te nazywamy ogólnie *warunkami granicznymi*.

Definicja

Mówimy, że zagadnienie graniczne jest *poprawnie postawione*, jeżeli:

- przy określonych warunkach granicznych istnieje rozwiązanie tego zagadnienia,
- rozwiązanie to jest jednoznaczne,
- rozwiązanie to zależy w sposób ciągły od zadanych warunków granicznych (jest *stabilne*).

Sens trzeciego warunku powyższej definicji polega na tym, że gdyby w modelu matematycznym opisującym zjawisko fizyczne nie było ciągłej zależności rozwiązania od warunków granicznych zadania, to praktycznie dwa jednakowe układy warunków (tj. takie, że różnice między nimi mieszczą się w granicach błędów pomiarowych) mogłyby odpowiadać dwóm istotnie różnym przebiegom zjawiska. Oznacza to, że zjawisko nie byłoby wyznaczalne fizycznie. ■

Nie każde zagadnienie graniczne dla równania różniczkowego cząstkowego jest poprawnie postawione. Przykładem zagadnienia, które nie jest zagadnieniem poprawnie postawionym może być np. następujące zagadnienie.

Przykład

Wyznaczyć funkcję $u(x, y)$ spełniającą równanie Laplace'a

$$\Delta u = 0 \text{ z warunkami}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_y(x, 0) = \psi(x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}.$$

Z teorii funkcji zmiennej zespolonej wynika, że powyższe zagadnienie posiada jednoznaczne rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że funkcja

$$u(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \cosh \lambda y$$

dla dowolnej wartości parametru λ jest rozwiązaniem powyższego zagadnienia dla $\varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x$ i $\psi(x) = 0$. Ponieważ dla dużych wartości λ warunki graniczne różnią się dowolnie mało od zera, więc gdyby zagadnienie było stabilne, to również rozwiązanie powinno być bliskie zeru, ale tak nie jest. ■

Należy pamiętać, że mówiąc o stabilności zagadnienia trzeba najpierw precyzyjnie określić co to znaczy, że rozwiązanie zagadnienia zależy w sposób ciągły od warunków granicznych.

1.6 Zadania

1. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

3. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \quad \text{gdzie } \alpha, \beta, c \in \mathbb{R}.$$

4. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

5. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

6. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\operatorname{tg}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

7. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

8. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 4y \frac{\partial u}{\partial y} + 16x^4 u = 0.$$

9. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$(1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

10. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

11. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}.$$

12. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = -x + y$, $\zeta = 2x - 2y + z$ przekształcić równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

13. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = \frac{1}{2}(x + y + z)$, $\zeta = -\frac{1}{2}(3x + y - z)$ przekształcić równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

14. Stosując podstawienie $\xi = x + y$, $\eta = -x + y$, $\zeta = -x - y + z$ przekształcić równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

15. Stosując podstawienie $\xi = y + z$, $\eta = -y + z$, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{\sqrt{6}}{2}z$ przekształcić równanie

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - u = 0.$$

16. Stosując podstawienie $\xi = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, $\eta = -\frac{1}{2}(y + z)$, $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(y - z)$ przekształcić równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 8u = 0.$$

17. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(3x - y)$, $\zeta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(x + y - 4z)$ przekształcić równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} + 4u = 0.$$

18. Stosując podstawienie $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}x$, $\eta = \frac{3}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}y$, $\zeta = x + z$ przekształcić równanie

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 3u + y - 2z = 0.$$

19. Stosując podstawienie $\xi = y + z$, $\eta = -y - 2z$, $\zeta = x - z$ przekształcić równanie

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 4u = 0.$$

20. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = -2x + y$, $\zeta = -x + z$ przekształcić równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2u = 0.$$

21. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = -2x + y$, $\zeta = -3x + z$ przekształcić równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 12 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 4 \frac{\partial u}{\partial y} - 6 \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

22. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \varphi(x + y - \cos x) + \psi(x - y + \cos x)$.

23. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \varphi(3x - y) + \psi(2x - y)$.

24. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(3x + 2y)$.

25. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \varphi(y - x) + \psi(y - 2x) \exp\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

26. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{5}{16} u = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = [\varphi(x + 3y) + \psi(3x + y)] \exp\left(\frac{7x+y}{16}\right)$.

27. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - 4 \exp(x) = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = 2 \exp(x) + \exp\left(\frac{x+2y}{2}\right) [\varphi(x) + \psi(x + 2y)]$.

28. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 4 \exp\left(\frac{5x + 3y}{2}\right) = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \exp\left(\frac{x+y}{2}\right) [(2x + y) \exp(4x + y) + \varphi(2x + y) + \psi(4x + y)]$.

29. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{dla } x > 0, y > 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \varphi(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \psi(\sqrt{x} + \sqrt{y})$.

30. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \varphi(y - x) + \frac{1}{y-x} \psi(y^2 - x^2)$.

31. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + (\sin x - \cos x - 2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \varphi(y + 2x + \sin x) + \psi(y - 2x + \sin x) \exp\left(-\frac{y + 2x + \sin x}{4}\right).$

32. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\exp(-2x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \exp(-2y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \exp(-2x) \frac{\partial u}{\partial x} + \exp(-2y) \frac{\partial u}{\partial y} + 8 \exp(y) = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \exp(y) [\exp(2y) - \exp(2x)] + \varphi[\exp(y) + \exp(x)] + \psi[\exp(y) - \exp(x)].$

33. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}} \varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$

34. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 1 = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = x\varphi(y - x) + \psi(y - x) + \frac{1}{8}x^2.$

35. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \varphi(x, y) \ln y + \psi(xy).$

36. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Odp.: $u(x, y) = \frac{1}{x} [\varphi(x - y) + \psi(x + y)].$

Wsk.: Zastosować podstawienie $v(x, y) = xu(x, y).$

37. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$(x - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \frac{1}{x-y} (\varphi(x) - \psi(y)).$

Wsk.: Zastosować podstawienie $v(x, y) = (x - y)u(x, y).$

38. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + xyu = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) [\varphi(x) + \psi(y)].$

39. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{16}u - 16x \exp\left(-\frac{x+y}{16}\right) = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = [\varphi(y - 3x) + \psi(3y - x) - \frac{1}{8}x(y - 3x)(3y - x)] \exp\left(-\frac{x+y}{16}\right)$.

Wsk.: Po sprowadzeniu równania do postaci kanonicznej zastosować podstawienie:

$$v(\xi, \eta) = w(\xi, \eta) \exp\left(\frac{\xi-\eta}{32}\right).$$

40. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z} + z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2zx\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} = 0.$$

Odp.: $u(x, y, z) = (z - y)\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

Wsk.: Zastosować zamianę zmiennych: $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = \frac{z}{x}$, $\zeta = z - y$.

41. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{gdzie } b^2 = ac, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0.$$

Odp.: $u(x, y, t) = \varphi(x + t\sqrt{a}, y + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{a}, y - t\sqrt{c})$.

42. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x, 0) = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0.$$

Odp.: $u(x, y) = 3x^2 + y^2$.

43. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x, y)|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)|_{y=\sin x} = \sin x.$$

Odp.: $u(x, y) = x + \cos(x - y + \sin x)$.

44. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\exp(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x, 0) = -\frac{1}{2}x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = -\sin x.$$

Odp.: $u(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \cos[x - 1 + \exp(y)] - \cos x$.

45. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x, y)|_{y=\cos x} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)|_{y=\cos x} = \frac{1}{2} \exp(x).$$

$$\text{Odp.: } u(x, y) = \exp(x) \sinh\left[\frac{1}{2}(y - \cos x)\right] + \sin x \cos\left[\frac{1}{2}(y - \cos x)\right].$$

46. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + (2 - \sin x - \cos x) \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x, y)|_{y=\cos x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)|_{y=\cos x} = \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \cos x.$$

$$\text{Odp.: } u(x, y) = 2 \exp\left[-\frac{2x-y+\cos x}{4}\right] \cos x \sin\left[\frac{1}{2}(y - \cos x)\right].$$

47. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + \sin x + \cos x) \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x, y)|_{y=-\cos x} = 1 + 2 \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)|_{y=-\cos x} = \sin x.$$

$$\text{Odp.: } u(x, y) = 1 - \sin(y - x + \cos x) + \exp(y + \cos x) \sin(x + y + \cos x).$$

48. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \psi(x).$$

$$\begin{aligned} \text{Odp.: } u(x, y) &= \frac{3}{2} \varphi(x + y) \exp(-y) - \frac{1}{2} \varphi(x + 3y) + \\ &+ \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{x+3y}{2}\right) \int_{x+y}^{x+3y} [3\varphi(\alpha) + 2\psi(\alpha)] \exp\left(\frac{\alpha}{2}\right) d\alpha. \end{aligned}$$

49. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1 - y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2y}{1 + y^2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \psi(x).$$

$$\text{Odp.: } u(x, y) = \varphi\left(x - \frac{2}{3}y^3\right) - \frac{1}{2} \int_{x-(2/3)y^3}^{x+2y} \psi(\alpha) d\alpha.$$

50. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \exp(y) = 0,$$

$$u(0, y) = \varphi(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \psi(y).$$

$$\text{Odp.: } u(x, y) = [1 + 2x - \exp(2x)] \exp(y) + \varphi(y) + \frac{1}{2} \int_y^{2x+y} \psi(\alpha) d\alpha.$$

51. Rozwiązać zagadnienie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x, y)|_{y+x=0} = \varphi(x), \quad u(x, y)|_{y-x=0} = \psi(x), \quad \varphi(0) = \psi(0).$$

$$\text{Odp.: } u(x, y) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \varphi(0).$$

52. Rozwiązać zagadnienie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x, y)|_{y-x=0} = \varphi(x), \quad u(x, y)|_{y-5x=0} = \psi(x), \quad \varphi(0) = \psi(0).$$

$$\text{Odp.: } u(x, y) = \varphi\left(\frac{y-5x}{4}\right) + \psi\left(\frac{y-x}{4}\right) - \varphi(0).$$

Temat 2

Struna nieograniczona

2.1 Zagadnienie Cauchy'ego dla równania jednorodnego

Równanie drgań struny jednowymiarowej zapisać można w postaci

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \text{ dla } x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.1)$$

gdzie $u(x, t)$ oznacza wychylenie struny z położenia równowagi w punkcie x , w chwili czasu t . Funkcja $f(x, t)$ przedstawia gęstość siły zewnętrznej, działającej na strunę. Postać ta jest równoważna postaci (1.2). Dla powyższego równania rozważać będziemy zagadnienie początkowe w przypadku jednorodnym (drgania swobodne) i niejednorodnym (drgania wymuszone).

Założmy, że mamy do czynienia z drganiami swobodnymi, tzn. $f \equiv 0$. Rozważamy następujące zagadnienie.

Wyznaczyć funkcję u spełniającą równanie (2.1) i warunki początkowe

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \text{ dla } x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Zakładamy, że φ jest klasy C^2 , zaś ψ jest klasy C^1 .

Zagadnienie (2.1)-(2.2) rozwiążemy stosując metodę d'Alemberta.

Stosując w równaniu (2.1) zamianę zmiennych $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ sprowadzamy je do postaci kanonicznej

$$u_{\xi\eta} = 0$$

(porównaj (1.9)). Ogólne rozwiązanie tego równania wyraża się wzorem

$$u = F(\xi) + G(\eta),$$

gdzie F i G są dowolnymi funkcjami klasy C^2 . Wracając do zmiennych x i t otrzymujemy

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct). \quad (2.3)$$

Funkcje F i G należy dobrać w ten sposób, aby spełnione były warunki początkowe (2.2). Warunki (2.2) prowadzą do układu równań funkcyjnych

$$\begin{cases} F(x) + G(x) = \varphi(x) \\ cF'(x) - cG'(x) = \psi(x), \end{cases}$$

z których łatwo wyznaczamy wzory na funkcje szukane

$$F(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s)ds \text{ i } G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s)ds. \quad (2.4)$$

Podstawiając wzory (2.4) do (2.3) otrzymujemy tzw. *wzór d'Alemberta* dla struny swobodnej

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)ds. \quad (2.5)$$

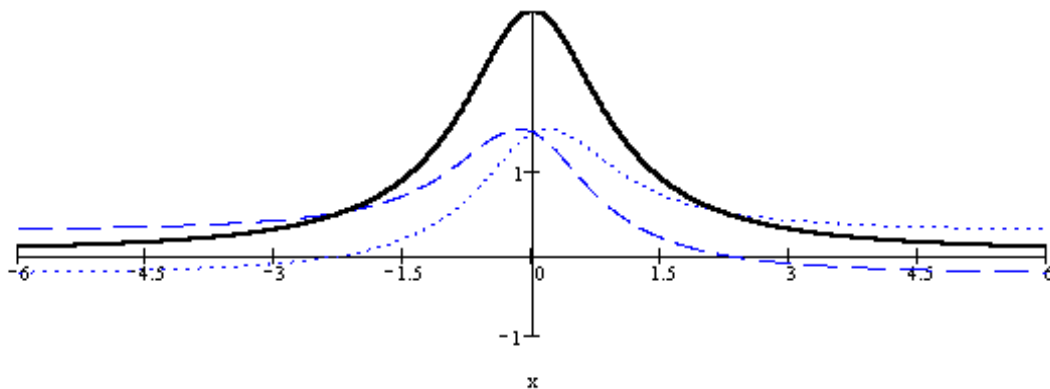
Z powyższych wzorów wynika, że zaburzenie kształtu struny spowodowane przez przyjęte warunki początkowe rozchodzi się ze skończoną prędkością wzdłuż osi Ox . Funkcja $G(x - ct)$ występująca we wzorze (2.3) przedstawia falę rozchodzącą się z prędkością c w dodatnim kierunku osi Ox , zaś funkcja $F(x + ct)$ - falę rozchodzącą się z prędkością c w ujemnym kierunku osi Ox . Rozwiązanie $u(x, t)$ jest sumą tych dwóch fal.

P r z y k ł a d 1

Rozwiązać zagadnienie (2.1)-(2.2) przyjmując $c = 1$, oraz

$$\varphi(x) = \frac{3}{1+x^2}, \quad \psi(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{dla } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Poniższy rysunek przedstawia kształt struny w chwili początkowej wraz z rozkładem na funkcje F (linia kropkowana) oraz G (linia kreskowana).

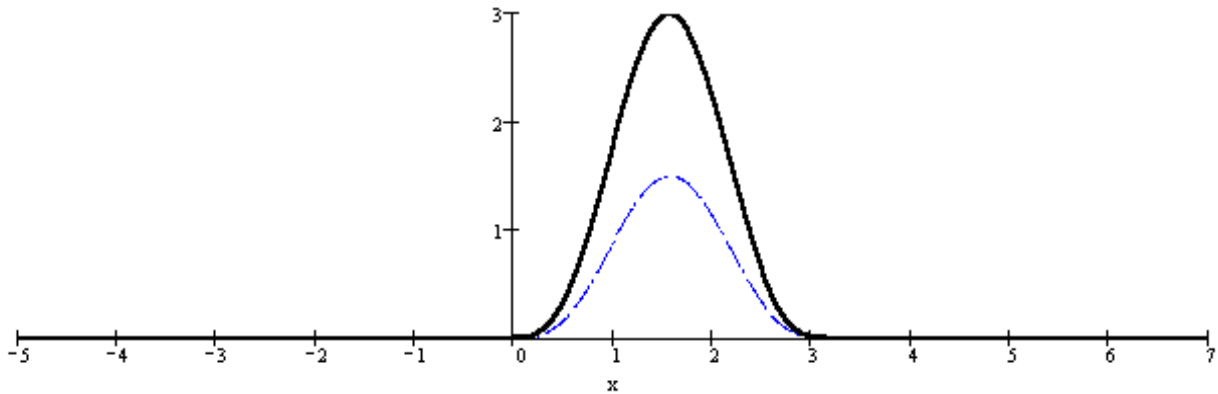


P r z y k ł a d 2

Rozwiązać zagadnienie (2.1)-(2.2) przyjmując $c = 1$, $\psi \equiv 0$ oraz

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3 \sin^3 x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, \pi]. \end{cases}$$

Następny rysunek przedstawia kształt struny w chwili początkowej wraz z rozkładem na funkcje F i G . W tym przypadku funkcje te są identyczne.



Rozdzielenie zaburzenia następuje w chwili $t = \frac{\pi}{2}$.

■

2.2 Zagadnienie Cauchy’ego dla równania niejednorodnego

Rozważmy teraz zagadnienie niejednorodne dla równania (2.1) z jednorodnymi warunkami początkowymi (2.2), tzn $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$. Rozważmy funkcję $u(x, t)$ określoną wzorem

$$u(x, t) = \frac{1}{2}c \int_0^t dr \int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(s, r) ds. \tag{2.6}$$

Poprzez bezpośrednie różniczkowanie łatwo sprawdzić, że funkcja u spełnia równanie (2.1) oraz, że $u(x, 0) = 0$. Ponieważ

$$u_t(x, t) = \int_0^t v_t(x, t; r) dr, \quad \text{gdzie } v(x, t; r) = \frac{1}{2}c \int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(s, r) ds,$$

więc również $u_t(x, 0) = 0$.

Wynika stąd, że rozwiązanie zagadnienia początkowego (2.1)-(2.2) można zapisać jako sumę rozwiązania danego wzorem d’Alemberta (2.5) i funkcji u określonej wzorem (2.6).

W ten sposób otrzymujemy *wzór d’Alemberta dla równania niejednorodnego*

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds + \frac{1}{2}c \int_0^t dr \int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(s, r) ds \tag{2.7}$$

2.3 Stabilność rozwiązania

Niech u_1 i u_2 będą rozwiązaniami zagadnienia (2.1)-(2.2) odpowiednio dla par funkcji danych (φ_1, ψ_1) i (φ_2, ψ_2) . Załóżmy, że dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ zachodzą nierówności

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta \quad \text{i} \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta. \tag{2.8}$$

Na mocy wzoru d'Alemberta (2.7) można napisać, że

$$u_i(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi_i(x - ct) + \varphi_i(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi_i(s) ds + \frac{1}{2c} \int_0^t dr \int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(s, r) ds \quad \text{dla } i = 1, 2.$$

Jeśli rozważać będziemy ewolucję kształtu struny w przedziale czasowym $[0, T_0]$, to korzystając z (2.8) różnicę pomiędzy rozwiązaniami u_1 i u_2 możemy oszacować następująco

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &< \frac{1}{2} |\varphi_1(x + ct) - \varphi_2(x + ct)| + \frac{1}{2} |\varphi_2(x - ct) - \varphi_2(x - ct)| + \\ &+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |\psi_1(s) - \psi_2(s)| ds < \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{2c} 2cT_0 \delta = \delta(1 + T_0). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ostatnia nierówność oznacza, że powyższe zagadnienie jest stabilne. O ile bowiem warunki początkowe zadania nie różnią się o więcej niż o δ , to również rozwiązania w dowolnym zadanym lecz ustalonym przedziale czasowym nie różnią się o więcej niż o liczbę $\delta(1 + T_0)$. Oznacza to ciągłą zależność rozwiązania od warunków początkowych, ponieważ $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \delta(1 + T_0) = 0$.

W takim razie zagadnienie Cauchy'ego dla równania struny jest poprawnie postawione.

2.4 Struna jednostronnie ograniczona

Rozważmy zagadnienie polegające na znalezieniu rozwiązania równania drgań półograniczonej struny swobodnej

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dla } x > 0, t > 0, \quad (2.10)$$

z warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{dla } x > 0. \quad (2.11)$$

2.4.1 Struna z zamocowanym końcem

W tym przypadku poszukujemy funkcji u spełniającej dodatkowy warunek $u(0, t) \equiv 0$. O funkcjach danych φ i ψ założymy, że spełniają one tzw. warunki zgodności

$$\varphi(0^+) = 0, \quad \psi(0^+) = 0. \quad (2.12)$$

Dodatkowo zakładamy, że φ' , φ'' , ψ' są ciągłe na półprostej $[0, +\infty)$.

W celu rozwiązania powyższego zagadnienia, funkcje φ i ψ przedłużamy do funkcji nieparzystych określonych na całej osi rzeczywistej. Warunki (2.12) gwarantują ciągłość otrzymanych przedłużeń. Następnie, dla tak określonych przedłużeń, stosujemy wzór d'Alemberta dla struny swobodnej (2.5)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x - ct) + \varphi(x + ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds. \quad (2.13)$$

Podstawiając $x = 0$ otrzymujemy

$$u(0, t) = \frac{1}{2} (\varphi(-ct) + \varphi(ct)) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} \psi(s) ds = \frac{1}{2} (-\varphi(ct) + \varphi(ct)) = 0$$

na mocy nieparzystości funkcji danych φ i ψ . Oznacza to, że u jest rozwiązaniem zagadnienia drgań struny z zamocowanym końcem.

2.4.2 Struna ze swobodnym poziomym końcem

Rozważamy zagadnienie polegające na wyznaczeniu rozwiązania u , spełniającego dodatkowo warunek $u_x(0, t) = 0$ (koniec struny może poruszać się swobodnie w pionie, np. w przewodnicy dla $x = 0$). O funkcjach danych φ i ψ założymy, że spełniają one tzw. warunki zgodności

$$\varphi'(0^+) = 0, \psi'(0^+) = 0. \quad (2.14)$$

Zakładamy również, że φ' , φ'' , ψ' są ciągłe na półprostej $[0, +\infty)$.

W celu rozwiązania powyższego zagadnienia, funkcje φ i ψ przedłużamy do funkcji parzystych określonych na całej osi rzeczywistej (wówczas pochodna φ' jest nieparzysta). Stosując podobnie jak poprzednio, wzór d'Alemberta (2.5) przedstawiamy rozwiązanie u w postaci (2.13).

Wynika stąd, że

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi'(x - ct) + \varphi'(x + ct)) + \frac{1}{2c} (\psi(x + ct) - \psi(x - ct))$$

oraz

$$u_x(0, t) = \frac{1}{2} (\varphi'(-ct) + \varphi'(ct)) + \frac{1}{2c} (\psi(ct) - \psi(-ct)) = 0$$

na mocy nieparzystości funkcji φ' i parzystości funkcji ψ . Oznacza to, że u jest rozwiązaniem rozważanego zagadnienia.

2.5 Wzór Kirchhoffa

Rozważmy funkcję $u = u(x, y, z, t)$ spełniającą równanie falowe w przypadku trzech zmiennych przestrzennych, tzn. równanie

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = -f(x, y, z, t). \quad (2.15)$$

Niech punkt $M_0(x_0, y_0, z_0)$ należy do obszaru V ograniczonego powierzchnią S .

Wówczas można udowodnić, że wartość szukanej funkcji $u(M_0, t_0)$ daje się zapisać za pomocą następującego wzoru Kirchhoffa

$$u(M_0, t_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{1}{r_{MM_0}} \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] - [u] \frac{\partial u}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) + \frac{1}{cr_{MM_0}} [u_t] \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n} \right\} dS_M + \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{[f]}{r_{MM_0}} dV_M,$$

gdzie:

- r_{MM_0} jest odległością punktów M i M_0 ,
- $\frac{\partial}{\partial n}$ oznacza pochodną normalną zewnętrzną,
- symbol $[F]$ oznacza, że wartość funkcji w nawiasach brana jest dla wartości $t = t_0 - \frac{r_{MM_0}}{c}$.

Temat 3

Metoda Fouriera dla równań hiperbolicznych

3.1 Zagadnienie brzegowo-początkowe dla struny ograniczonej

Rozważać będziemy następujące zagadnienie.

Znaleźć funkcję $u(x, t)$ spełniającą równanie

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \text{ dla } x \in [0; l], l > 0, t > 0 \quad (3.1)$$

wraz z warunkami brzegowymi

$$u(0, t) = \alpha(t), u(l, t) = \beta(t) \text{ dla } t > 0 \quad (3.2)$$

i warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x) \text{ dla } x \in [0; l]. \quad (3.3)$$

Zakładamy, że φ jest klasy C^2 , ψ , α , β są klasy C^1 . Zakładamy ponadto, że spełnione są tzw. warunki zgodności, tzn. $\varphi(0) = \alpha(0)$, $\varphi(l) = \beta(0)$, $\psi(0) = \alpha'(0)$, $\psi(l) = \beta'(0)$.

Zagadnienie (3.1)-(3.3) rozwiążemy w kilku etapach, stosując tzw. *metodę Fouriera* zwaną także *metodą separacji zmiennych*.

3.1.1 Drgania swobodne struny zamocowanej

Założmy, że struna jest zamocowana w punktach końcowych, tzn. spełnione są jednorodne warunki brzegowe postaci

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \text{ dla } t > 0, \text{ tzn. } \alpha \equiv 0 \text{ i } \beta \equiv 0 \quad (3.4)$$

oraz $f \equiv 0$ (brak siły zewnętrznej wymuszającej ruch).

Najpierw rozwiążemy pewne zagadnienie pomocnicze.

Znaleźć rozwiązanie równania (3.1) nie równe tożsamościowo zero, spełniające warunki brzegowe (3.4) i przedstawić w postaci $u(x, t) = X(x)T(t)$, gdzie funkcje X i T zależą tylko od jednej zmiennej.

Podstawiając $u(x, t) = X(x)T(t)$ do równania (3.1), gdzie $f \equiv 0$, otrzymujemy

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}. \quad (3.5)$$

Ponieważ równość (3.5) zachodzić musi dla wszystkich x i t z rozważanego zakresu, więc obie strony tej równości muszą być stałe. Oznaczając tę stałą przez $-\lambda$ dostajemy równość

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

która prowadzi do układu równań

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (3.6)$$

$$T''(t) + c^2 \lambda T(t) = 0 \quad (3.7)$$

Z warunków brzegowych (3.4) wynika, że $X(0) = X(l) = 0$ (w przeciwnym razie $T(t) \equiv 0$ i $u \equiv 0$).

Dla funkcji $X(x)$ otrzymaliśmy tzw. *zagadnienie Sturm-Liouville'a* polegające na wyznaczeniu takich wartości λ , zwanych *wartościami własnymi*, przy których istnieją niezerowe rozwiązania równania (3.6), zwane funkcjami własnymi, spełniające warunki $X(0) = X(l) = 0$.

W celu wyznaczenia wartości własnych zagadnienia należy rozważyć trzy następujące przypadki.

1° $\lambda < 0$. Wówczas rozwiązaniem równania (3.6) jest funkcja postaci $X(x) = C_1 e^{x\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{-\lambda}}$. Z warunków $X(0) = X(l) = 0$ wynika, że $C_1 = C_2 = 0$, zatem $X(x) \equiv 0$ i $u \equiv 0$.

2° $\lambda = 0$. Wówczas $X(x) = ax + b$ i warunki $X(0) = X(l) = 0$ znów implikują, że $a = b = 0$, zatem $X(x) \equiv 0$ i $u \equiv 0$.

3° $\lambda > 0$. Teraz $X(x) = C_1 \cos x\sqrt{\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{\lambda}$ i dla

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

istnieją niezerowe funkcje

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (3.9)$$

będące rozwiązaniami równania (3.6) z warunkami $X(0) = X(l) = 0$. Liczby λ_n są wartościami własnymi rozważanego zagadnienia.

Z równania (3.7) dla $\lambda = \lambda_n$ otrzymujemy, że

$$T_n = A_n \cos \frac{\pi n c}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n c}{l} t. \quad (3.10)$$

W takim razie rozwiązaniem zagadnienia pomocniczego (3.1), (3.4) są funkcje

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n c}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n c}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.11)$$

Aby skonstruować rozwiązanie spełniające także zadane warunki początkowe (3.3) tworzymy szereg

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n c}{l} t + B_n \sin \frac{\pi n c}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.12)$$

którego współczynniki, zgodnie z teorią szeregów Fouriera, określone są wzorami

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n s}{l} ds, \quad B_n = \frac{2}{n \pi c} \int_0^l \psi(s) \sin \frac{\pi n s}{l} ds. \quad (3.13)$$

T w i e r d z e n i e

Jeżeli φ jest klasy C^2 , $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, ψ jest klasy C^1 , $\psi(0) = \psi(l) = 0$, to szereg (3.12) ze współczynnikami określonymi wzorami (3.13) jest rozwiązaniem zagadnienia (3.1) dla $f \equiv 0$, z warunkami (3.3)-(3.4). ■

P r z y k ł a d 1

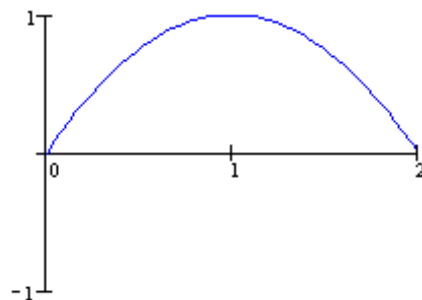
Rozwiązać omówione powyżej zagadnienie dla $l = 2$, $c = 1$, $\varphi(x) = x(2 - x)$, $\psi(x) = 0$. Ze wzorów (3.13) wynika, że

$$A_n = \frac{16}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n], \quad B_n = 0,$$

tak więc rozwiązanie określone jest wzorem

$$u(x, t) = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n^3} \sin \pi \frac{nx}{2} \cos \pi \frac{nt}{2}.$$

Funkcja $u(x, t)$ jest funkcją okresową w czasie, o okresie 4. Poniższy rysunek przedstawia kształt początkowy struny.



Struna wyprostowuje się w chwilach $t = 1, 3, 5, \dots$

P r z y k ł a d 2

Rozwiązać omówione powyżej zagadnienie dla $l = 2$, $c = 1$, $\varphi(x) = x^2(2 - x)$, $\psi(x) = 0$.

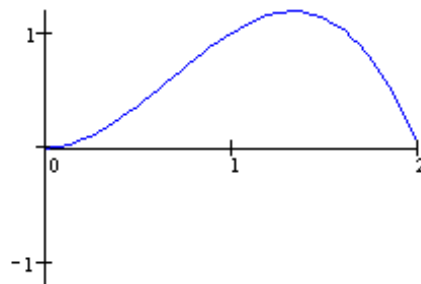
Z podanych wzorów wynika, że

$$A_n = \frac{32}{n^3 \pi^3} [2(-1)^{n+1} - 1], \quad B_n = 0$$

tak więc rozwiązanie określone jest wzorem

$$u(x, t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[2(-1)^{n+1} - 1]}{n^3} \sin \pi \frac{nx}{2} \cos \pi \frac{nt}{2}.$$

Funkcja $u(x, t)$ jest funkcją okresową w czasie, o okresie 4. Poniższy rysunek przedstawia kształt początkowy struny.



3.1.2 Drgania wymuszone struny zamocowanej

Rozważmy teraz zagadnienie (3.1), (3.3), (3.4) polegające na wyznaczeniu funkcji $u(x, t)$ spełniającej równanie (3.1), z dowolnymi warunkami początkowymi i jednorodnymi warunkami brzegowymi. Rozwiązanie tego zagadnienia może być zapisane w postaci sumy dwóch funkcji, z których jedna jest rozwiązaniem równania jednorodnego ($f \equiv 0$) z dowolnymi warunkami początkowymi (zagadnienie to zostało omówione w poprzednim punkcie), zaś druga funkcja jest rozwiązaniem równania niejednorodnego ($f \not\equiv 0$), ale z jednorodnymi warunkami początkowymi ($\varphi \equiv 0, \psi \equiv 0$) i jednorodnymi warunkami brzegowymi.

Wystarczy zatem wyznaczyć funkcję u spełniającą równanie

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t) \quad \text{dla } x \in [0; l], \quad l > 0, \quad t > 0 \quad (3.14)$$

z warunkami

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad \text{dla } x \in [0; l], \quad (3.15)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad \text{dla } t > 0. \quad (3.16)$$

W tym celu założmy, że funkcja dana $f(x, t)$ dla $x \in [0; l]$ może być zapisana w postaci sinusowego szeregu Fouriera względem zmiennej x

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.17)$$

gdzie

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(s, t) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Rozwiązania zagadnienia (3.14)-(3.16) poszukujemy w postaci

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.18)$$

gdzie $T_n(t)$ są niewiadomymi funkcjami. Zakładając, że dozwolone jest różniczkowanie szeregu (3.18) wyraz po wyrazie, z równania (3.14) i przedstawienia (3.17) otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t)) \sin \frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{+\infty} c^2 f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

a zatem

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = c^2 f_n(t), \quad \text{gdzie } \omega_n = \frac{\pi n c}{l}. \quad (3.19)$$

Z warunków (3.15) wynika ponadto, że

$$T_n(0) = T_n'(0) = 0 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Rozwiązanie zagadnienia (3.19)-(3.20) można przedstawić w postaci

$$T_n(t) = \frac{2c}{\pi n} \int_0^t \left[\int_0^l f(s, r) \sin \frac{\pi n}{l} s ds \right] \sin \omega_n(t-r) dr \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \quad (3.21)$$

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcja f jest klasy C^2 oraz $f(0, t) = f(l, t) = 0$ dla każdego $t \geq 0$, to szereg (3.18) ze współczynnikami określonymi wzorami (3.21) jest rozwiązaniem zagadnienia (3.14)-(3.16). ■

3.1.3 Przypadek ogólny

Rozważmy teraz ogólne zagadnienie (3.1)-(3.3). W celu rozwiązania tego zagadnienia wprowadzamy funkcję pomocniczą

$$w(x, t) = \alpha(t) + [\beta(t) - \alpha(t)] \frac{x}{l} \quad (3.22)$$

i poszukujemy rozwiązania zagadnienia w postaci $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$.

Ponieważ ze wzoru (3.22) wynika, że $w(0, t) = \alpha(t)$ i $w(l, t) = \beta(t)$, więc $v(0, t) = v(l, t) = 0$, tzn. funkcja $v(x, t)$ jest rozwiązaniem pewnego zagadnienia postaci (3.1), (3.3), (3.4) z jednorodnymi warunkami brzegowymi. Zagadnienie wyznaczenia takiej funkcji $v(x, t)$ zostało omówione w poprzednim punkcie.

3.2 Równanie drgań membrany swobodnej

Rozważmy jednorodne równanie drgań płaskiej membrany

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \text{ gdzie } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.23)$$

rozważane dla $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $t > 0$. Załóżmy, że spełnione są warunki początkowe

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y) \quad \text{dla } (x, y) \in D \quad (3.24)$$

oraz, że φ jest klasy C^2 , ψ jest klasy C^1 .

3.2.1 Membrana prostokątna

Założmy teraz, że D jest prostokątem, $D = (0; A) \times (0; B)$ oraz, że membrana jest zamocowana na brzegu, tzn.

$$u(0, y, t) = u(A, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, B, t) = 0 \quad \text{dla } t \geq 0. \quad (3.25)$$

W celu rozwiązania tego zagadnienia postępujemy analogicznie jak w przypadku drgań swobodnych struny zamocowanej. Stosując metodę separacji zmiennych w postaci

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t),$$

otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie zagadnienia (3.23)-(3.25) w postaci sumy szeregu podwójnego

$$u(x, y, t) = \sum_{k,n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi k}{A} x \sin \frac{\pi n}{B} y (a_{k,n} \cos \omega_{k,n} t + b_{k,n} \sin \omega_{k,n} t), \quad (3.26)$$

gdzie

$$\omega_{k,n} = \pi \sqrt{\frac{k^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2}} \quad \text{dla } k, n = 1, 2, \dots,$$

o współczynnikach $a_{k,n}$ i $b_{k,n}$ określonych wzorami

$$a_{k,n} = \frac{4}{AB} \int_0^A dx \int_0^B dy \varphi(x, y) \sin \frac{\pi k}{A} x \sin \frac{\pi n}{B} y, \quad (3.27)$$

$$b_{k,n} = \frac{4}{AB\omega_{k,n}c} \int_0^A dx \int_0^B dy \psi(x, y) \sin \frac{\pi k}{A} x \sin \frac{\pi n}{B} y. \quad (3.28)$$

P r z y k ł a d

Rozwiązać zagadnienie drgań membrany prostokątnej dla $A = B = 1$, $c = 1$, $\varphi(x, y) = (x - x^2)(y - y^2)$, $\psi(x, y) = 0$.

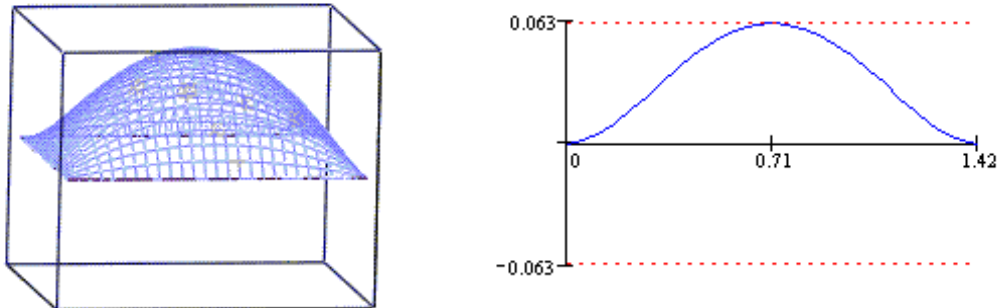
Zgodnie ze wzorami (3.27), (3.28), całkując przez części wyznaczamy współczynniki $a_{k,n}$ i $b_{k,n}$

$$a_{k,n} = 16 \frac{(1 + (-1)^{k+1})(1 + (-1)^{n+1})}{k^3 n^3 \pi^6}, \quad b_{k,n} = 0,$$

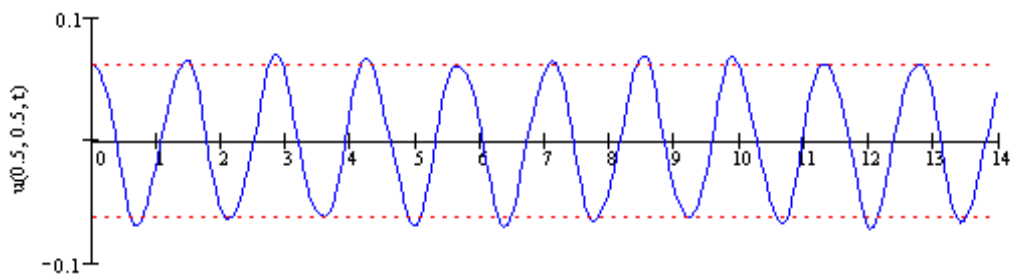
a zatem rozwiązanie zagadnienia jest postaci

$$u(x, y, t) = \frac{16}{\pi^6} \sum_{k,n=1}^{+\infty} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{k^3} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n^3} \sin k\pi x \sin n\pi y \cos \left(t\pi \sqrt{k^2 + n^2} \right).$$

Poniższy rysunek przedstawia wygląd membrany i kształt jej przekroju wzdłuż przekątnej kwadratu D w chwili $t = 0$.



Kolejny rysunek przedstawia drgania punktu środkowego ($x = y = 0,5$) membrany jako funkcję zmiennej t .



3.2.2 Membrana kołowa

Założmy teraz, że D jest kołem, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\}$ oraz, że membrana jest zamocowana na brzegu, tzn.

$$u(x, y, t) = 0 \text{ dla } x^2 + y^2 = a^2, \text{ dla } t \geq 0. \quad (3.29)$$

Założmy, że funkcje φ i ψ opisujące warunki początkowe (3.24) spełniają zależność

$$\varphi(x, y) = \varphi(r), \quad \psi(x, y) = \psi(r), \quad \text{gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (3.30)$$

tzn. warunki te są kołowo symetryczne. O funkcjach danych założmy, że φ jest klasy C^2 , pochodna φ''' istnieje i jest przedziałami ciągła, $\varphi(a) = 0$, ψ jest klasy C^1 , pochodna ψ'' istnieje i jest przedziałami ciągła, $\psi(a) = 0$.

Z symetrii równania i warunków wynika, że rozwiązanie u może być poszukiwane w postaci $u = u(r, t)$. Przechodząc do współrzędnych biegunowych (r, θ) , przekształcamy wyjściowe równanie do postaci (przyjmujemy, że u nie zależy od θ)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (3.31)$$

Stosując metodę Fouriera (separacji zmiennych) dla $u(r, t) = R(r)T(t)$ otrzymujemy dwa równania

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \frac{T''(t)}{c^2T(t)} = -\lambda = \text{const.}$$

Z warunków brzegowych wynika, że stały parametr może przyjmować wartości

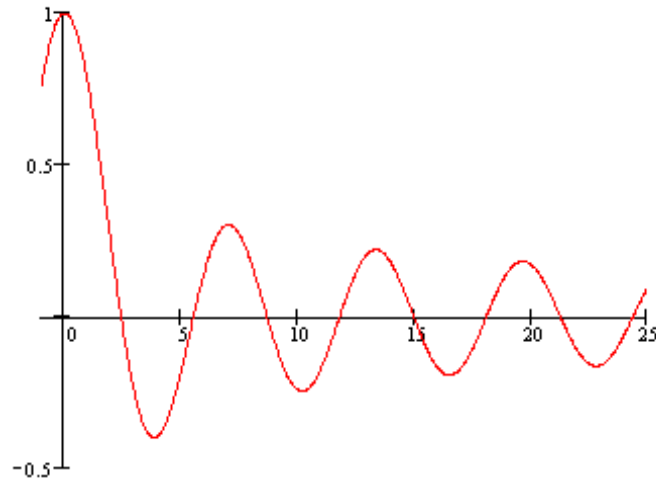
$$\lambda = \lambda_n = \frac{x_n^2}{a^2}, \text{ dla } n = 1, 2, \dots$$

gdzie (x_n) jest ciągiem dodatnich zer funkcji Bessela J_0 .

Funkcje Bessela J_k określone są wzorem

$$J_k(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+k},$$

a ich zera (x_n) są stabelaryzowane. Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji J_0 .



W takim razie funkcja

$$u_n(x, t) = J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) \left[A_n \cos\left(x_n \frac{ct}{a}\right) + B_n \sin\left(x_n \frac{ct}{a}\right) \right] \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

i dowolnych stałych A_n, B_n jest rozwiązaniem rozważanego równania (3.31) spełniającym jednocześnie warunek brzegowy (3.29).

Pełnym rozwiązaniem zagadnienia, spełniającym także warunki początkowe (3.30), jest funkcja $u(r, t)$ określona jako suma szeregu

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) \left[A_n \cos\left(x_n \frac{ct}{a}\right) + B_n \sin\left(x_n \frac{ct}{a}\right) \right] \quad (3.33)$$

gdzie stałe A_n i B_n wyznaczone są za pomocą wzorów

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(x_n)} \int_0^a r \varphi(r) J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) dr, \quad B_n = \frac{2}{a x_n c J_1^2(x_n)} \int_0^a r \psi(r) J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) dr \quad (3.34)$$

dla $n = 1, 2, \dots$, $J_1(x) = -J_0'(x)$.

Przykład

Rozwiązać zagadnienie drgań membrany kołowej dla $a = 1$, $\varphi(r) = 1 - r^2$, $\psi(r) = 0$.

Z danych zadania wynika, że

$$B_n = 0, \quad A_n = \frac{2}{J_1^2(x_n)} \int_0^1 r(1 - r^2) J_0(x_n r) dr \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

Korzystając z własności funkcji Bessela

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$$

i wzoru rekurencyjnego

$$J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x) = \frac{2k}{x} J_k(x)$$

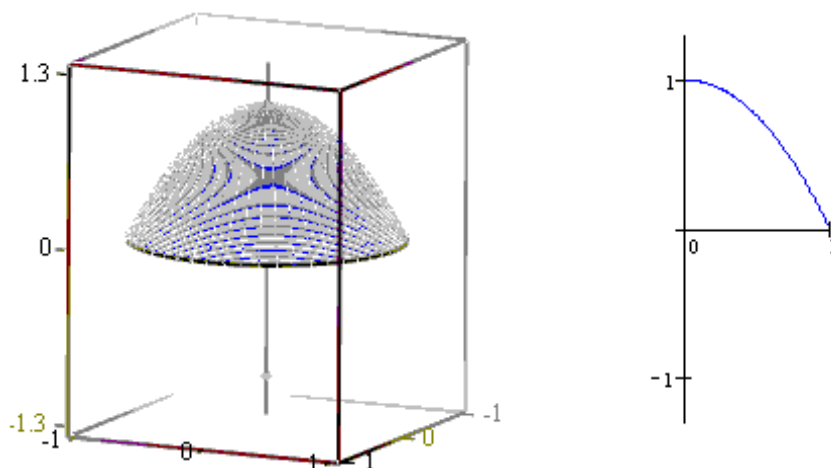
oraz stosując wzór na całkowanie przez części otrzymujemy ostatecznie

$$A_n = \frac{4J_2(x_n)}{x_n^2 J_1^2(x_n)} = \frac{8}{x_n^3 J_1(x_n)},$$

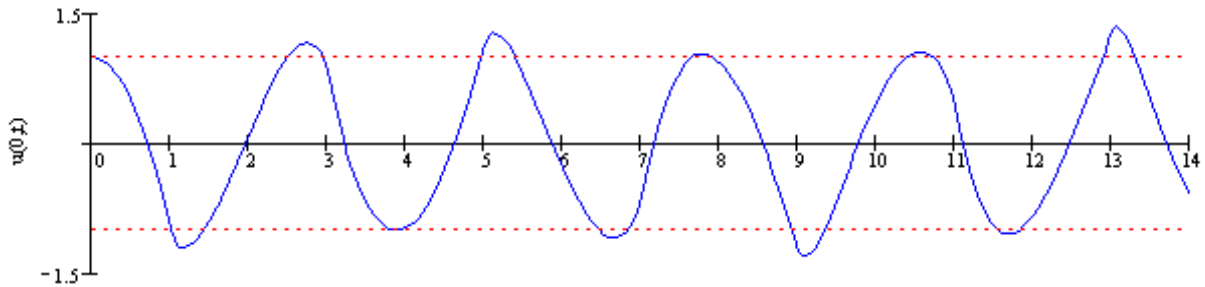
a zatem rozwiązanie zagadnienia wyraża się wzorem

$$u(r, t) = 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^3 J_1(x_n)} J_0(x_n r) \cos(x_n c t).$$

Poniższy rysunek przedstawia wygląd membrany i kształt jej przekroju osiowego w chwili $t = 0$.



Kolejny rysunek przedstawia drgania punktu położonego na osi symetrii membrany jako funkcję zmiennej t .



3.2.3 Membrana nieograniczona

Założmy teraz, że rozważamy równanie drgań membrany (3.23) dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Oznacza to, że dane są tylko warunki początkowe opisujące początkowy kształt membrany i prędkość początkową drgań (3.24), nie ma zaś warunków brzegowych.

Następujące twierdzenie określa warunki dostateczne dla istnienia rozwiązania i podaje jego postać (tzw. wzór Poissona).

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcje φ i ψ są odpowiednio klasy C^3 i C^2 , to funkcja u postaci

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi c} \iint_{K_{ct}} \frac{\psi(p, q) dpdq}{\sqrt{c^2 t^2 - (p-x)^2 - (q-y)^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi c} \iint_{K_{ct}} \frac{\varphi(p, q) dpdq}{\sqrt{c^2 t^2 - (p-x)^2 - (q-y)^2}} \right]$$

gdzie K_{ct} jest kołem o środku w punkcie (x, y) i promieniu ct , jest rozwiązaniem rozważanego zagadnienia. ■

P r z y k ł a d

Rozwiązać zagadnienie drgań membrany nieograniczonej dla danych:

$$c = 1, \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}, \quad \psi(x, y) = 0.$$

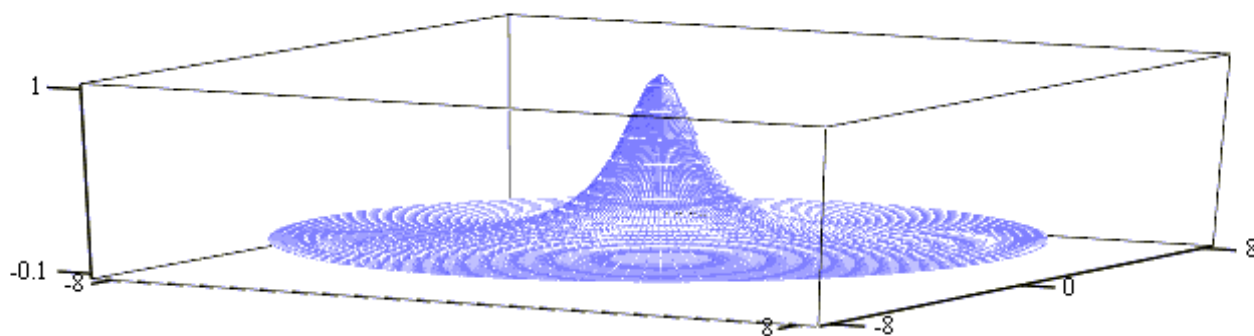
Stosując we wzorze Poissona zamianę zmiennych w całce podwójnej

$$p = x + r \cos \alpha, \quad q = y + r \sin \alpha$$

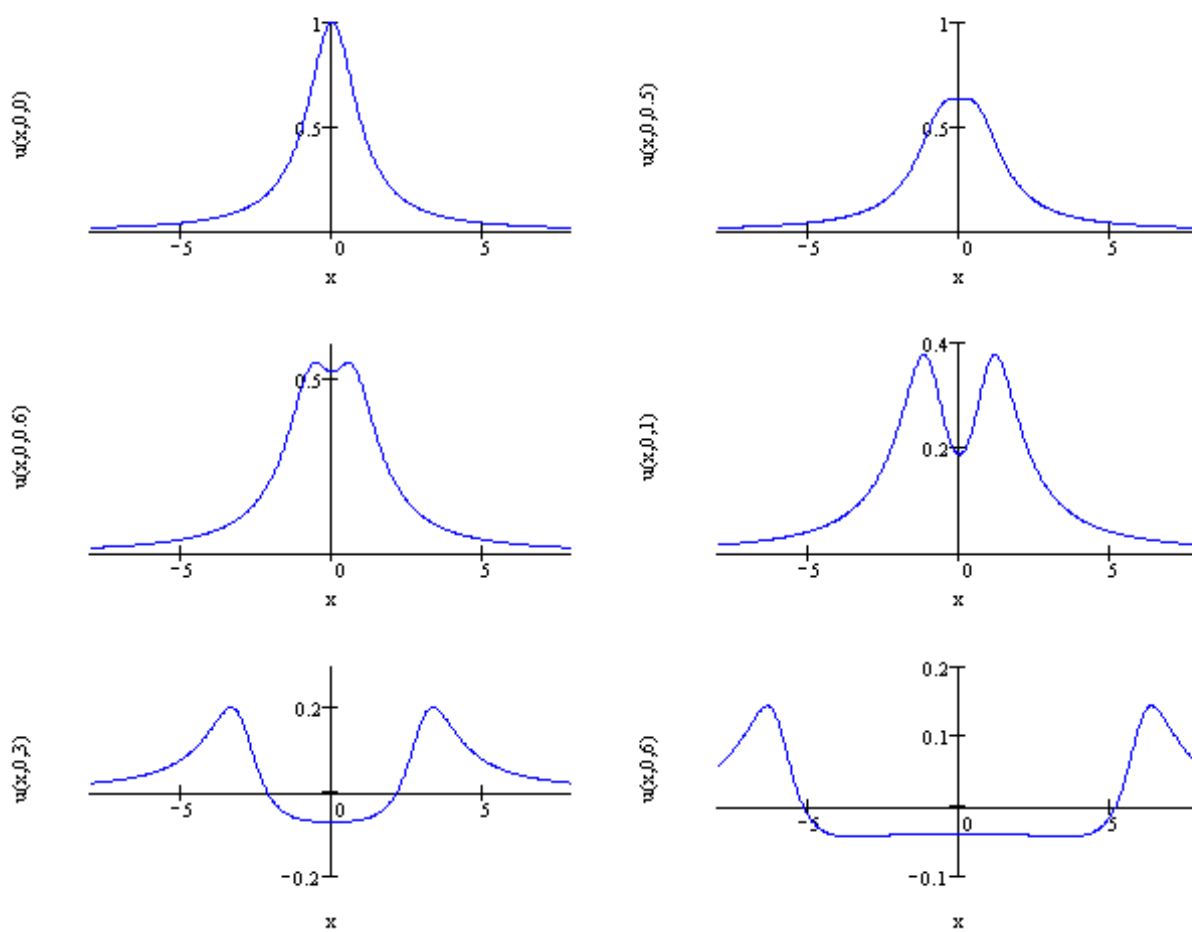
otrzymujemy wzór na funkcję u w postaci

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \varphi(x + r \cos \alpha, y + r \sin \alpha) \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\alpha \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{1}{1 + x^2 + y^2 + r^2 + 2xr \cos \alpha + 2yr \sin \alpha} \frac{r}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\alpha \right] \end{aligned}$$

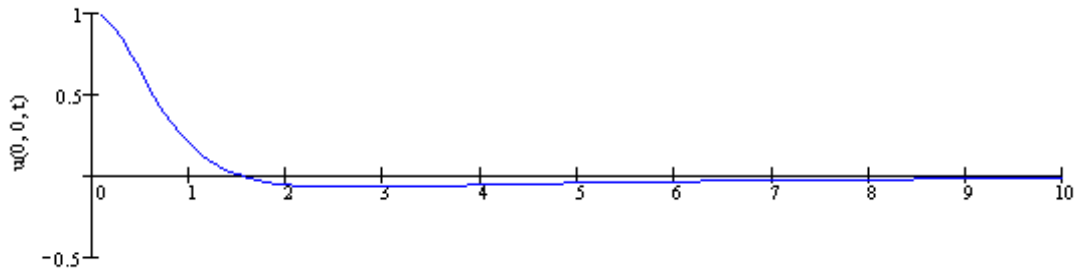
Poniższy rysunek przedstawia wygląd membrany w chwili $t = 0$.



Na następnym rysunku widoczne są kształty przekrojów osiowych membrany dla $t = 0, t = 0,5, t = 0,6, t = 1, t = 3, t = 6$.



Kolejny rysunek przedstawia drgania punktu położonego na osi symetrii membrany jako funkcję zmiennej t .



3.3 Drgania poprzeczne belki

Metoda separacji zmiennych może być stosowana do rozwiązywania zagadnień granicznych dla równań różniczkowych cząstkowych rzędu wyższego niż drugi. Przykładem takiego zagadnienia jest zagadnienie drgającej belki opisane równaniem rzędu czwartego

$$u_{tt} + c^2 u_{xxxx} = 0, \quad \text{dla } x \in (0; l), t > 0 \quad (3.35)$$

z warunkami początkowymi

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3.36)$$

opisującymi kształt początkowy belki i początkową prędkość drgań oraz warunkami brzegowymi postaci

$$u(0, t) = u(l, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(l, t) = 0. \quad (3.37)$$

Podobnie jak w przypadku struny, poszukujemy niezerowych rozwiązań równania (3.35) spełniających jednocześnie warunki brzegowe (3.37), w postaci $u(x, t) = X(x)T(t)$. Prowadzi to do problemu wyznaczenia wartości własnych λ , dla których istnieją niezerowe funkcje $X(x)$ spełniające równanie

$$\frac{X^{(4)}(x)}{X(x)} = -\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.38)$$

z warunkami

$$X(0) = X(l) = X''(0) = X''(l) = 0. \quad (3.39)$$

Z rozważań analogicznych do przypadku omówionego dla struny jednowymiarowej wynika, że jedyne liczby λ o tej własności są liczby

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

którym odpowiadają funkcje

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad T_n(t) = A_n \sin \left[c \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 t \right] + B_n \cos \left[c \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 t \right].$$

Rozwiązanie zagadnienia (3.35)-(3.37) możemy zatem zapisać w postaci

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n(x) T_n(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ A_n \sin \left[c \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 t \right] + B_n \cos \left[c \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 t \right] \right\} \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.40)$$

gdzie współczynniki A_n i B_n szeregu (3.40) wyznaczamy z warunków początkowych

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n c \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

skąd wynika ostatecznie, że

$$A_n = \frac{2l}{cn^2\pi^2} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad B_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

3.4 Zadania

1. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = b \sinh x$$

przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

2. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = bx(x-l)$$

przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

3. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t^2 x(x-l)$$

przy jednorodnych warunkach początkowych i brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0.$$

4. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2h \frac{\partial u}{\partial t} - b^2 u = 0$$

przy jednorodnych warunkach początkowych oraz przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = A, \quad u(l, t) = 0.$$

5. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

przy jednorodnych warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

i warunkach początkowych

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin \frac{2\pi}{l} x.$$

6. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$$

i warunkach początkowych

$$u(x, 0) = \sin \frac{5\pi}{2l} x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l} x.$$

7. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$$

i warunkach początkowych

$$u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2l} x + \sin \frac{3\pi}{2l} x.$$

8. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

przy warunkach brzegowych

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$$

i warunkach początkowych

$$u(x, 0) = x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1.$$

9. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \exp(-t) \sin \frac{\pi}{l} x$$

przy jednorodnych warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

i jednorodnych warunkach początkowych

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

10. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = Ax \exp(-t)$$

przy jednorodnych warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

i jednorodnych warunkach początkowych

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

11. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A \sin t$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$$

i jednorodnych warunkach początkowych

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

12. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = t^2, \quad u(\pi, t) = t^3$$

i warunkach początkowych

$$u(x, 0) = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

13. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = \exp(-t), \quad u(\pi, t) = t$$

i warunkach początkowych

$$u(x, 0) = \sin x \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1.$$

14. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = t, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 1$$

i warunkach początkowych

$$u(x, 0) = \sin \frac{1}{2}x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 1.$$

15. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin 2t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{2}{a} \sin \frac{2l}{a} \sin 2t$$

i warunkach początkowych

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -2 \cos \frac{2x}{a}.$$

16. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

i warunku początkowym

$$u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 < x \leq \frac{1}{2}l \\ l - x & \text{dla } \frac{1}{2}l < x < l. \end{cases}$$

17. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

i warunku początkowym

$$u(x, 0) = \frac{cx(l-x)}{l^2}.$$

18. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

i warunku początkowym

$$u(x, 0) = Ax.$$

19. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

i warunku początkowym

$$u(x, 0) = A(l-x).$$

20. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0$$

i warunku początkowym

$$u(x, 0) = U = \text{Const.}$$

21. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach brzegowych

$$u(0, t) = T, \quad u(l, t) = U$$

i warunku początkowym

$$u(x, 0) = 0.$$

Temat 4

Równanie przewodnictwa cieplnego (I)

4.1 Zagadnienie Cauchy'ego dla pręta nieograniczonego

Rozkład temperatury w jednowymiarowym nieograniczonym pręcie opisuje funkcja $u = u(x, t)$, spełniająca jednorodne równanie przewodnictwa cieplnego

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (4.1)$$

Funkcja u przedstawia temperaturę pręta w punkcie x , w chwili czasu t .

Zakładamy, że dany jest początkowy rozkład temperatury

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

gdzie φ jest funkcja daną.

Zagadnienie polegające na znalezieniu rozwiązania równania (4.1) spełniającego warunek (4.2) nazywamy *zagadnieniem Cauchy'ego* (*zagadnieniem początkowym*) dla równania przewodnictwa.

4.1.1 Uogólniona metoda Fouriera

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych $u(x, t) = X(x)T(t)$ do równania (4.1) otrzymujemy równość

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = \text{const.}$$

Wynika stąd, że dla dowolnej wartości rzeczywistej parametru λ funkcja postaci

$$u_\lambda(x, t) = \exp(-a^2 \lambda^2 t) [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] \quad (4.3)$$

spełnia równanie (4.1) - być może bez zadanego warunku początkowego (4.2). Wyrażenia $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ są w tym momencie dowolnymi funkcjami zmiennej λ .

Zastosujemy teraz następujące twierdzenie pomocnicze.

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcja $U(x, t, \alpha)$ dla każdej wartości rzeczywistej parametru α spełnia względem zmiennych (x, t) liniowe równanie różniczkowe $LU = 0$, to całka postaci

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, t, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha \quad (4.4)$$

jest także rozwiązaniem tego równania, o ile można obliczyć pochodne występujące w równaniu $LU = 0$ przez różniczkowanie pod znakiem całki. ■

Stosując powyższe twierdzenie do funkcji $U(x, t, \lambda) = u_\lambda(x, t)$ przedstawiamy rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego w postaci

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-a^2 \lambda^2 t) [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (4.5)$$

Podstawiając $t = 0$ i uwzględniając warunek początkowy (4.2) otrzymujemy

$$\varphi(x) = u(x, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda. \quad (4.6)$$

Z równości (4.6) należy wyznaczyć niewiadome funkcje $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$.

Zadanie to jest równoważne przedstawieniu danej funkcji φ w postaci tzw. *całki Fouriera*. Korzystając z teorii szeregów Fouriera, dowodzi się prawdziwości następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest sumą swojego szeregu Fouriera w każdym przedziale postaci $(-l, l)$ oraz jest bezwzględnie całkowalna na osi rzeczywistej, tzn. zbieżna jest całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)| dx$, to funkcję $\varphi(x)$ przedstawić można w postaci całki Fouriera

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (4.7)$$

gdzie

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \cos \lambda \tau d\tau, \quad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \sin \lambda \tau d\tau. \quad (4.8)$$

Z powyższego twierdzenia wynika bezpośrednio, że wzór (4.5), w którym funkcje $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ określone są wzorami (4.8) przedstawia rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (4.1)-(4.2). ■

4.1.2 Rozwiązanie podstawowe, całka Poissona

W celu dalszego przekształcenia wzoru (4.5) wykorzystamy następujący lemat rachunkowy.

L e m a t

Zachodzi tożsamość

$$\int_0^{+\infty} \exp[-a^2 \lambda^2 t] \cos \lambda(\tau - x) d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(\tau - x)^2}{4a^2 t}\right]. \quad (4.9)$$

Dla dowodu wzoru, przekształcamy całkę po lewej stronie równości (4.9) jak następuje.

$$\int_0^{+\infty} \exp[-a^2 \lambda^2 t] \cos \lambda(\tau - x) d\lambda = \left| \begin{array}{l} a\lambda\sqrt{t} = z, \quad \lambda(\tau - x) = \mu z \\ d\lambda = \frac{dz}{a\sqrt{t}}, \quad \mu = \frac{\tau - x}{a\sqrt{t}} \end{array} \right| = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} \exp[-z^2] \cos \mu z dz. \quad (4.10)$$

Oznaczmy $\Phi(\mu) = \int_0^{+\infty} \exp[-z^2] \cos \mu z dz$. Wtedy

$$\Phi'(\mu) = - \int_0^{+\infty} \exp[-z^2] z \sin \mu z dz = \frac{1}{2} \exp[-z^2] \sin \mu z \Big|_0^{+\infty} - \frac{\mu}{2} \int_0^{+\infty} \exp[-z^2] \cos \mu z dz = -\frac{\mu}{2} \Phi(\mu).$$

Mamy więc

$$\Phi'(\mu) + \frac{\mu}{2} \Phi(\mu) = 0,$$

skąd wynika, że $\Phi(\mu) = C \exp\left[-\frac{\mu^2}{4}\right]$.

Ponieważ $C = \Phi(0)$, więc

$$C = \int_0^{+\infty} \exp[-z^2] dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

W takim razie $\Phi(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left[-\frac{\mu^2}{4}\right]$ i ze wzoru (4.10) wynika, że

$$\int_0^{+\infty} \exp[-a^2 \lambda^2 t] \cos \lambda(\tau - x) d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \Phi(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{(\tau - x)^2}{4a^2 t}\right],$$

co kończy dowód lematu. ■

Podstawiając wzory (4.8) do (4.5) i stosując pewne elementarne wzory trygonometryczne otrzymujemy

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \exp(-a^2 \lambda^2 t) \cos \lambda(\tau - x) d\tau \right] d\lambda.$$

Zamieniając w powyższym wzorze kolejność całkowania i stosując poprzedni lemat - wzór (4.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \exp(-a^2 \lambda^2 t) \cos \lambda(\tau - x) d\lambda \right] \varphi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \exp\left[-\frac{(\tau - x)^2}{4a^2 t}\right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$F(x, t, \tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{(\tau - x)^2}{4a^2 t} \right] \quad (4.12)$$

możemy wzór (4.11) zapisać w prostszej postaci

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) F(x, t, \tau) d\tau. \quad (4.13)$$

Funkcję $F(x, t, \tau)$ określoną wzorem (4.12) nazywamy *rozwiązaniem podstawowym równania przewodnictwa cieplnego*, zaś wzór (4.13) opisujący rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego - *całką Poissona*.

4.1.3 Przykłady

Przykład 1

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe (4.1)-(4.2) dla $a = 1$ oraz φ określonej wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } |x| < 1 \\ 1.5 & \text{dla } |x| = 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Ze wzorów (4.8) wynika, że

$$A(\lambda) = \frac{3 \sin \lambda}{\lambda \pi}, \quad B(\lambda) = 0,$$

zatem zgodnie ze wzorem (4.5)

$$u(x, t) = \frac{6}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^2 t) \frac{\sin \lambda \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda$$

lub w postaci równoważnej (4.11)

$$u(x, t) = \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{+1} \exp \left[-\frac{(\tau - x)^2}{4t} \right] d\tau.$$

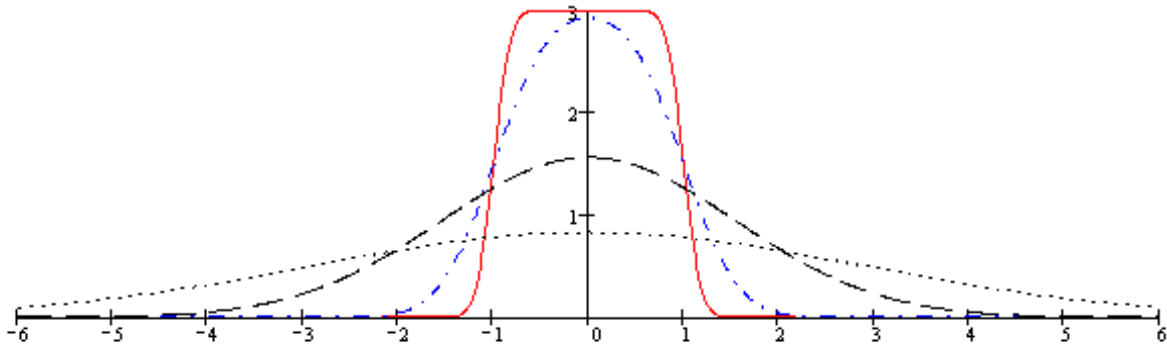
Następny rysunek przedstawia wykresy temperatury w różnych chwilach czasu. Poszczególne rodzaje linii odpowiadają czasom:

linia czerwona ciągła - $t = 0,01$;

linia niebieska „kreska-kropka” - $t = 0,1$;

linia czarna „kreska-kreska” - $t = 1$;

linia czarna „kropka-kropka” - $t = 4$.



Dla wartości t bliskich zeru wykres przybliża funkcję φ , która jest w tym przykładzie nieciągła, dla dużych t następuje wyrównywanie temperatury wewnątrz pręta.

Przykład 2

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1$ oraz φ określonej wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3(1 - |x|) & \text{dla } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio, wyznaczamy $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $u(x, t)$

$$A(\lambda) = \frac{3(1 - \cos \lambda)}{\lambda^2 \pi}, \quad B(\lambda) = 0,$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{6}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^2 t) \frac{(1 - \cos \lambda) \cos \lambda x}{\lambda^2} d\lambda = \\ &= \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{+1} (1 - |r|) \exp\left[-\frac{(r-x)^2}{4t}\right] dr. \end{aligned}$$

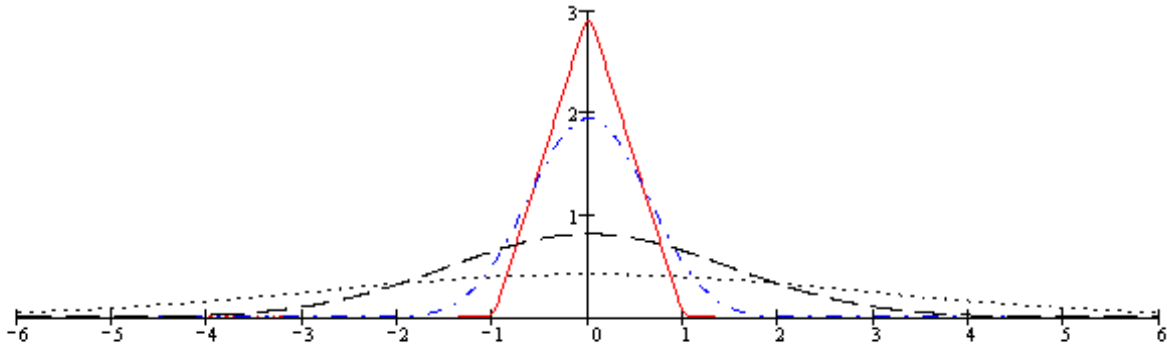
Kolejny rysunek przedstawia wykresy temperatury w różnych chwilach czasu. Poszczególne rodzaje linii odpowiadają czasom:

linia czerwona ciągła - $t = 0,001$;

linia niebieska „kreska-kropka” - $t = 0,1$;

linia czarna „kreska-kreska” - $t = 1$;

linia czarna „kropka-kropka” - $t = 4$.



Podobnie jak w przykładzie poprzednim, dla $t = 0.001$ otrzymujemy wykres przybliżający funkcję φ , zaś dla dużych t następuje wyrównywanie temperatury wewnątrz pręta.

Przykład 3

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1$ oraz φ określonej wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{dla } x > 0 \\ T_2 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

W celu rozwiązania tego zagadnienia skorzystamy bezpośrednio ze wzoru (4.11), który pozostaje prawdziwy nawet wówczas, gdy funkcja φ nie spełnia wszystkich założeń wymaganych dla przedstawienia jej za pomocą całki Fouriera.

Korzystając z faktu, że $\int_{-\infty}^0 \exp(-s^2) ds = \int_0^{+\infty} \exp(-s^2) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{T_2}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}\right] d\tau + \frac{T_1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}\right] d\tau = \\ &= \left| \frac{\tau-x}{2\sqrt{t}} = s, \quad d\tau = 2\sqrt{t}ds \right| = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{t}}} \exp(-s^2) ds + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \exp(-s^2) ds = \\ &= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^0 \exp(-s^2) ds \right] + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^0 \exp(-s^2) ds \right] = \\ &= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} \exp(-s^2) ds. \end{aligned}$$

Rozważmy teraz przypadek szczególny $T_1 = 3$, $T_2 = 0$.

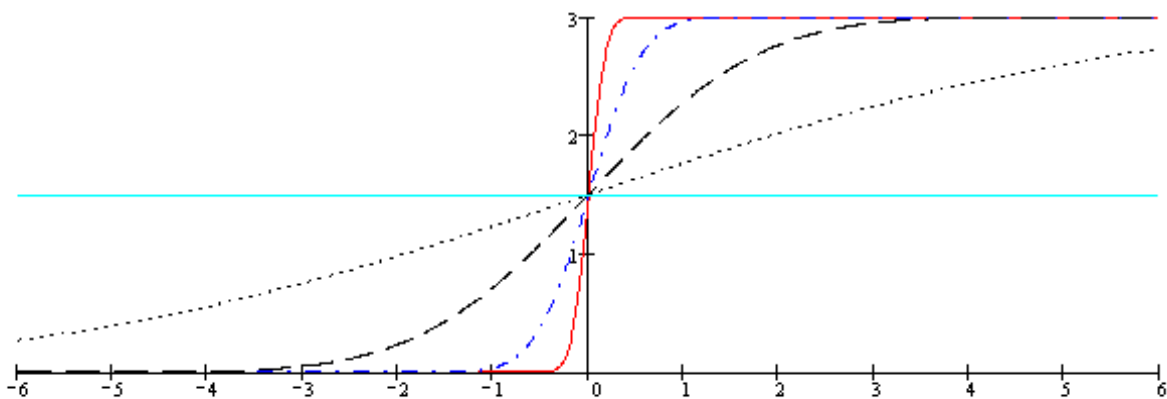
Oto wykresy temperatury. Poszczególne linie odpowiadają różnym wartościom t .

linia czerwona ciągła - $t = 0,01$;

linia niebieska „kreska-kropka” - $t = 0,1$;

linia czarna „kreska-kreska” - $t = 1$;

linia czarna „kropka-kropka” - $t = 10$.



4.2 Rozkład temperatury w pręcie półograniczonym

Rozkład temperatury w jednowymiarowym półograniczonym pręcie, w którym nie występują wewnętrzne źródła ciepła, opisuje funkcja $u = u(x, t)$, spełniająca jednorodne równanie przewodnictwa cieplnego (4.1).

Zakładamy, że dany jest początkowy rozkład temperatury

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \geq 0, \quad (4.14)$$

gdzie φ jest pewną daną funkcją ograniczoną, oraz stan temperatury na końcu pręta w dowolnej chwili czasu t

$$u(0, t) = \alpha(t), \quad t > 0. \quad (4.15)$$

Rozwiązanie $u(x, t)$ zagadnienia (4.1), (4.14), (4.15) przedstawiamy w postaci

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

gdzie u_1 i u_2 są rozwiązaniami rozważanego jednorodnego równania przewodnictwa spełniającymi warunki

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= \varphi(x), & u_1(0, t) &= 0, \\ u_2(x, 0) &= 0, & u_2(0, t) &= \alpha(t). \end{aligned}$$

Korzystając z własności rozwiązania podstawowego równania przewodnictwa, analogicznie jak w punkcie poprzednim, można wyprowadzić wzory

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2 t} \right] \right\} \varphi(\tau) d\tau, \quad (4.16)$$

$$u_2(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\alpha(r)}{\sqrt{(t-r)^3}} \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2 (t-r)} \right] dr. \quad (4.17)$$

P r z y k ł a d

Rozwiązać powyższe zagadnienie dla $a = 1$, $\alpha(t) = 0$, $\varphi(x) = T > 0$ (chłodzenie pręta o ustalonej jednorodnej temperaturze początkowej).

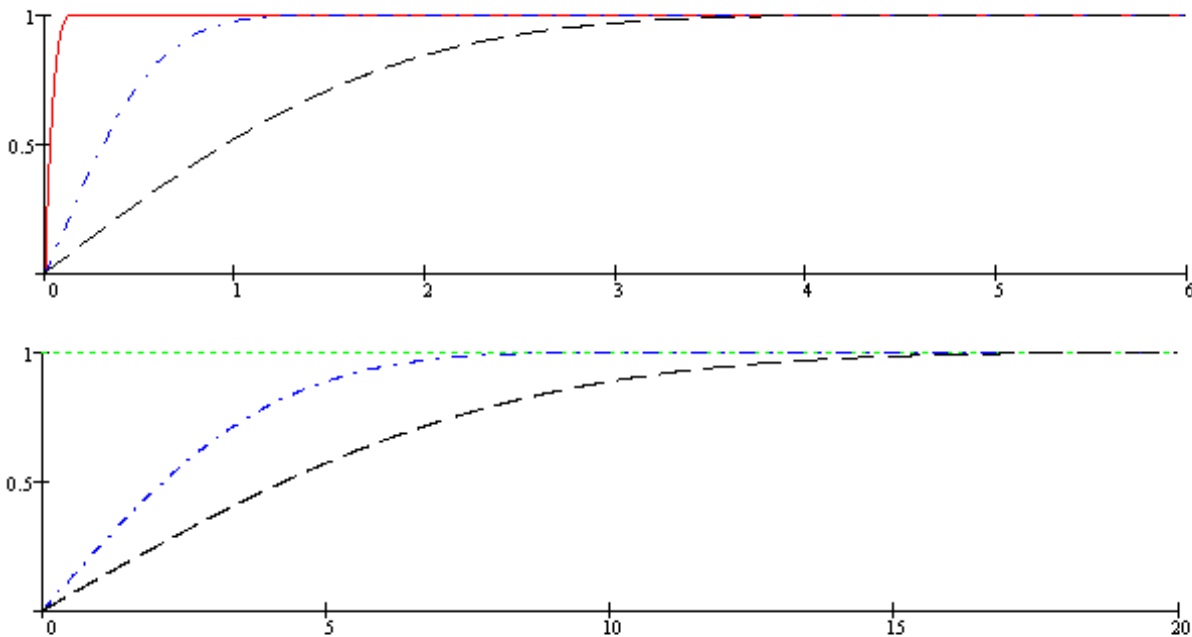
Z przedstawionych warunków oraz ze wzoru (4.17) wynika, że $u_2(x, t) = 0$, zaś

$$u(x, t) = u_1(x, t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp \left[-\frac{(x-\tau)^2}{4t} \right] - \exp \left[-\frac{(x+\tau)^2}{4t} \right] \right\} d\tau = T\Phi \left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right),$$

gdzie

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-x^2) dx.$$

Poniższy rysunek przedstawia wykresy temperatury w różnych chwilach czasu ($t = 0,001$, $t = 0,1$, $t = 1$, $t = 5$, $t = 20$) i przedziałach zmienności x dla $T = 1$.



Wraz z upływem czasu następuje obniżenie temperatury we wszystkich punktach pręta.

4.3 Zadania

1. Funkcję $\varphi(x)$ określoną wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{dla } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{dla } x \notin (0; 2) \end{cases}$$

przetawić w postaci cosinusowej całki Fouriera.

$$\text{Odp.: } \varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{2 \cos s - \cos 2s - 1}{s^2} \cos sx ds.$$

2. Dana jest funkcja $\varphi(x) = e^{-kx}$, dla $k > 0$. Wyznaczyć sinusowe i cosinusowe przedstawienia funkcji φ dla $x > 0$.

$$\text{Odp.: } e^{-kx} = \int_0^{+\infty} \frac{k}{k^2 + s^2} \cos sx ds, \quad e^{-kx} = \int_0^{+\infty} \frac{s}{k^2 + s^2} \sin sx ds.$$

3. Wyprowadzić wzory (4.16) i (4.17).

Temat 5

Równanie przewodnictwa cieplnego (II)

5.1 Metoda Fouriera dla pręta ograniczonego

5.1.1 Pierwsze zagadnienie brzegowe dla pręta ograniczonego

Poszukujemy rozwiązania równania przewodnictwa

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{dla } x \in (0; l), t > 0, \quad (5.1)$$

spełniającego warunki brzegowe

$$u(0, t) = \alpha(t), u(l, t) = \beta(t) \quad \text{dla } t > 0 \quad (5.2)$$

i warunek początkowy

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{dla } x \in (0; l). \quad (5.3)$$

Rozwiązanie zagadnienia (5.1)-(5.3) można znaleźć metodą Fouriera, podobnie jak w przypadku struny skończonej.

Podstawienie

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v(x, t) + w(x, t), \quad \text{gdzie} \\ w(x, t) &= \alpha(t) + [\beta(t) - \alpha(t)] \frac{x}{l} \end{aligned}$$

sprowadza problem do przypadku jednorodnych warunków brzegowych, tak więc wystarczy umieć rozwiązać zadanie dla $\alpha(t) \equiv 0, \beta(t) \equiv 0$.

Przedstawiamy szukaną funkcję v w postaci

$$v(x, t) = v_1(x, t) + v_2(x, t),$$

gdzie v_1 i v_2 są rozwiązaniami zagadnień

$$\begin{aligned} (v_1)_t &= a^2 (v_1)_{xx} \quad \text{dla } x \in (0; l), t > 0, \\ v_1(x, 0) &= \varphi(x) - w(x, 0), v_1(0, t) = v_1(l, t) = 0 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} (v_2)_t &= a^2 (v_2)_{xx} + f(x, t) - w_t(x, t) \quad \text{dla } x \in (0; l), t > 0, \\ v_2(x, 0) &= 0, v_2(0, t) = v_2(l, t) = 0. \end{aligned}$$

Przedstawiając $v_1(x, t) = X(x)T(t)$ i rozdzielając zmienne, po przeprowadzeniu dyskusji wartości własnych odpowiedniego zagadnienia Sturm-Liouville'a, otrzymujemy wzór na postać funkcji $v_1(x, t)$

$$v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \text{gdzie} \quad (5.4)$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l [\varphi(s) - w(s, 0)] \sin \frac{n\pi}{l} s ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

Analogicznie, jak w przypadku struny, otrzymujemy przedstawienie funkcji v_2 w postaci szeregu

$$v_2(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n(t) \sin \pi \frac{nx}{l}, \quad \text{gdzie} \quad (5.6)$$

$$d_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \left\{ \int_0^l [f(s, \tau) - w_\tau(s, \tau)] \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right\} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

Założenia, które należy przyjąć o funkcjach danych są analogiczne do założeń dla odpowiedniego zagadnienia dla struny skończonej.

P r z y k ł a d 1

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1$, $l = 1$, $f(x, t) = 0$, $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 0$, $\varphi(x) = 1$ (chłodzenie pręta o ustalonej jednorodnej temperaturze początkowej).

Z przedstawionych warunków wynika, że

$$w(x, t) \equiv 0, \quad v_2(x, t) \equiv 0, \quad v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x,$$

gdzie

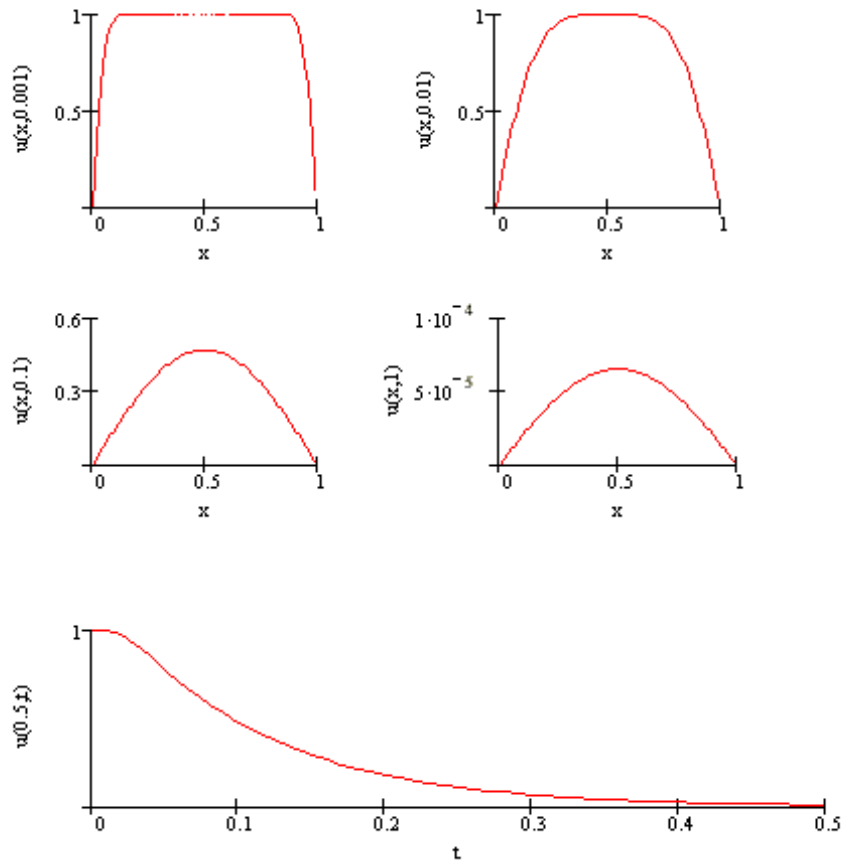
$$c_n = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

zatem

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x.$$

Następny rysunek przedstawia zmiany wykresu temperatury pręta w czasie $t = 0,001$, $t = 0,01$, $t = 0,1$, $t = 1$.

Najniższy wykres przedstawia temperaturę w punkcie środkowym pręta dla $x = 0,5$.



W miarę upływu czasu następuje obniżenie temperatury we wszystkich punktach pręta.

P r z y k ł a d 2

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1, l = 1, f(x, t) = 0, \alpha(t) = 0, \beta(t) = 0, \varphi(x) = 2x(1 - x)$.

Z warunków zadania wynika, że

$$w(x, t) \equiv 0, \quad v_2(x, t) \equiv 0, \quad v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x,$$

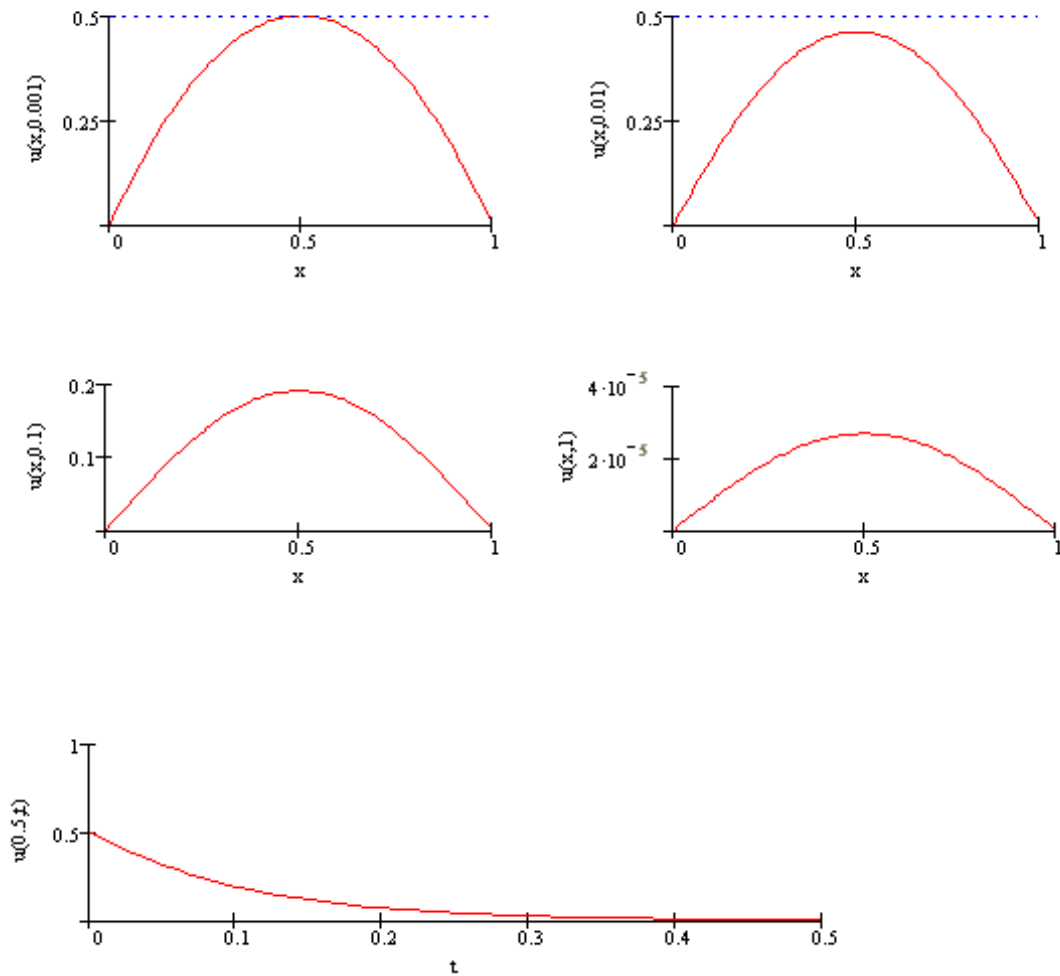
gdzie

$$c_n = \frac{8}{(\pi n)^3} [1 - (-1)^n] \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

zatem

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x.$$

Następny rysunek przedstawia zmiany wykresu temperatury pręta w czasie $t = 0, 001, t = 0, 01, t = 0, 1, t = 1$ oraz temperaturę w punkcie środkowym pręta.



P r z y k ł a d 3

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1, l = 1, f(x, t) = 0, \alpha(t) = 0, \beta(t) = 1, \varphi(x) = 0$ (podgrzewanie pręta od prawego końca).

Z warunków zadania wynika, że

$$w(x, t) = x, \quad v_2(x, t) \equiv 0, \quad v_1(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x,$$

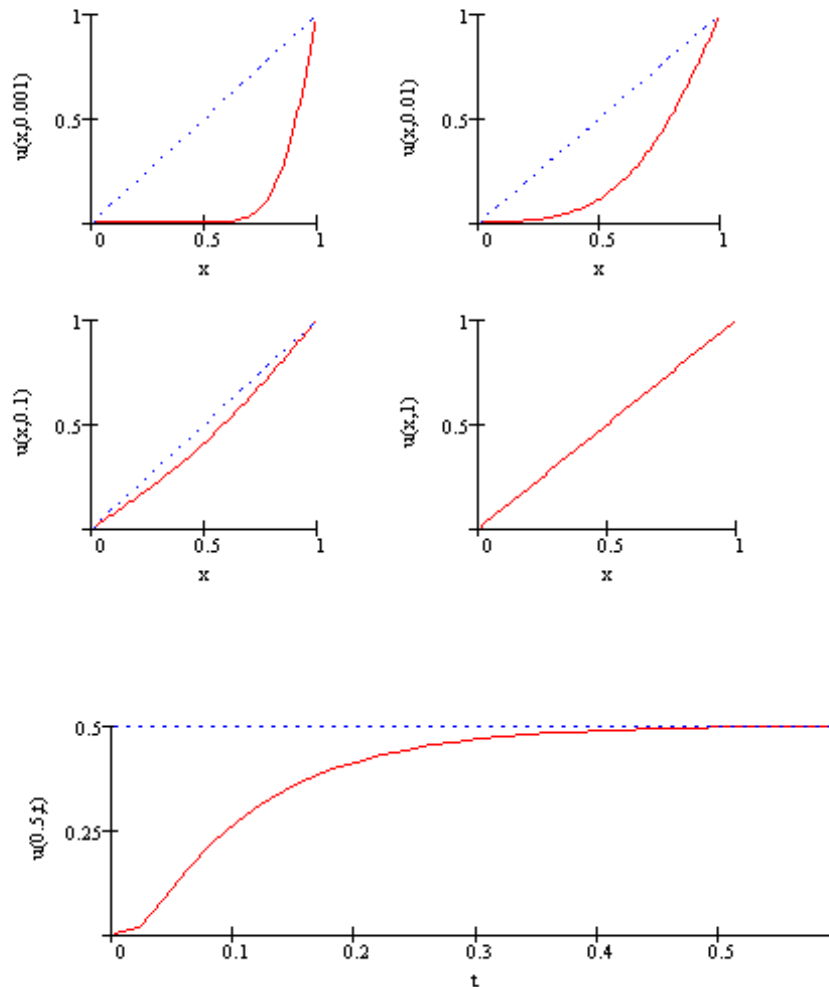
gdzie

$$c_n = \frac{2}{\pi n} (-1)^n \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

zatem

$$u(x, t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x.$$

Następny rysunek przedstawia zmiany wykresu temperatury pręta w czasie $t = 0,001, t = 0,01, t = 0,1, t = 1$ oraz temperaturę w punkcie środkowym pręta.



W miarę upływu czasu temperatura zbliża się do wartości funkcji liniowej $y = x$ we wszystkich punktach pręta.

5.1.2 Zasada maksimum dla równania przewodnictwa

Założmy, że $u(x, t)$ jest rozwiązaniem jednorodnego równania przewodnictwa

$$u_t = a^2 u_{xx} \text{ dla } 0 < x < l, 0 < t \leq T. \tag{5.8}$$

Zachodzi następujące twierdzenie zwane *zasadą maksimum dla równania przewodnictwa cieplnego*.

T w i e r d z e n i e (zasada maksimum)

Jeśli funkcja $u(x, t)$ określona i ciągła w obszarze $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq l$ spełnia jednorodne równanie przewodnictwa (5.8) w punktach obszaru $0 < t \leq T, 0 < x < l$, to osiąga ona swoje kresy w chwili początkowej $t = 0$ lub dla $x = 0$ lub dla $x = l$. ■

Sens fizyczny tego twierdzenia jest następujący: jeśli temperatura na brzegu pręta nie przekracza pewnej wartości M i początkowa temperatura także nie przekracza M , to wewnątrz pręta, przy braku źródeł ciepła, nie może pojawić się temperatura wyższa niż M .

5.1.3 Jednoznaczność rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego

Niech $u_1(x, t)$ i $u_2(x, t)$ będą dwoma rozwiązaniami pierwszego zagadnienia brzegowego (5.1)-(5.3). Wówczas funkcja

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

spełnia jednorodne równanie (5.8) oraz jednorodne warunki brzegowe $v(0, t) = v(l, t) = 0$ i początkowe $v(x, 0) = 0$. Z zasady maksimum wynika więc, że kres górny i dolny funkcji $v(x, t)$ są równe zero. Oznacza to, że $v(x, t) \equiv 0$, a zatem $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$, tzn. zagadnienie jest jednoznacznie rozwiązywalne.

5.1.4 Stabilność rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego

Z zasady maksimum wynika bezpośrednio następujący wniosek.

Wniosek

Jeśli $u_1(x, t)$ i $u_2(x, t)$ są dwoma rozwiązaniami równania (5.1) i spełnione są warunki

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &\leq u_2(x, 0) \quad \text{dla } x \in [0; l] \\ u_1(0, t) &\leq u_2(0, t), \quad u_1(l, t) \leq u_2(l, t) \quad \text{dla } t \in [0; T], \end{aligned}$$

to dla dowolnych $x \in [0; l]$, $t \in [0; T]$ zachodzi nierówność

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t).$$

Dowód

Rozważając funkcję $v(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$ stwierdzamy, że spełnia ona równanie (5.8), a ponadto warunki

$$v(x, 0) \geq 0, \quad v(0, t) \geq 0, \quad v(l, t) \geq 0.$$

Z zasady maksimum wynika, że $v(x, t) \geq 0$ dla wszystkich (x, t) z rozważanego obszaru, zatem $u_1(x, t) \leq u_2(x, t)$. ■

Twierdzenie

Jeśli $u_1(x, t)$ i $u_2(x, t)$ są rozwiązaniami równania (5.1) takimi, że warunki brzegowe i początkowe spełniają nierówność

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon \quad \text{dla } t = 0, x = 0, x = l, \tag{5.9}$$

to

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \varepsilon \quad \text{dla wszystkich } (x, t) \in [0; l] \times [0; T]$$

(powyższa nierówność oznacza stabilność rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego).

Dowód

Warunek (5.9) można zapisać w postaci

$$-\varepsilon \leq u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq \varepsilon \quad \text{dla } t = 0, x = 0, x = l.$$

Oznaczając $v_1(x, t) = -\varepsilon$, $v_2(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ i stosując wniosek otrzymujemy nierówność $-\varepsilon \leq u_1(x, t) - u_2(x, t)$ dla wszystkich $(x, t) \in [0; l] \times [0; T]$.

Podstawiając z kolei $v_1(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ i $v_2(x, t) = \varepsilon$ otrzymujemy nierówność $u_1(x, t) - u_2(x, t) \leq \varepsilon$ co kończy dowód twierdzenia. ■

5.2 Przykłady radialnego rozkładu ciepła w walcu

5.2.1 Zagadnienie ostygnięcia walca

Rozważamy walec o promieniu a , którego osią jest Oz . Niech $u = u(r, t)$ oznacza temperaturę punktu walca oddalonego od jego osi o r , w chwili t . Funkcja ta spełnia równanie przewodnictwa (we współrzędnych biegunowych) postaci

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = \frac{1}{k}u_t \quad \text{dla } r \in [0, a), t > 0, k > 0. \quad (5.10)$$

Założmy, że powierzchnia boczna walca utrzymywana jest w temperaturze 0, a więc spełniony jest jednorodny warunek brzegowy

$$u(r, t) = 0 \quad \text{dla } r = a, t > 0. \quad (5.11)$$

Zakładamy również spełnianie osiowosymetrycznego warunku początkowego

$$u(r, 0) = \varphi(r) \quad \text{dla } 0 \leq r < a, \quad (5.12)$$

gdzie φ jest funkcją daną, która może być przedstawiona w postaci szeregu Fouriera - Bessela.

Stosując metodę Fouriera (rozdzielenia zmiennych) dla $u(r, t) = R(r)T(t)$ otrzymujemy dwa równania

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda = \text{const.}$$

Z warunku brzegowego wynika, że stały parametr λ może przyjmować wartości

$$\lambda = \lambda_n = \frac{x_n^2}{a^2}, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots,$$

gdzie (x_n) jest ciągiem dodatnich zer funkcji Bessela J_0 . W takim razie funkcja

$$u_n(r, t) = C_n J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) e^{-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2 kt} \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

i dowolnej stałej C_n jest rozwiązaniem rozważanego równania spełniającym jednocześnie jednorodny warunek brzegowy $u_n(a, t) = 0$.

Pełnym rozwiązaniem zagadnienia (5.10)-(5.12), spełniającym także warunek początkowy, jest funkcja $u(r, t)$ określona jako suma szeregu

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) e^{-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2 kt} \quad (5.13)$$

gdzie stałe C_n wyznaczone są za pomocą wzorów

$$C_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(x_n)} \int_0^a r \varphi(r) J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) dr, \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

P r z y k ł a d

Rozwiązać zagadnienie ostygnięcia walca dla $a = 1$, $\varphi(r) = 1 - r^2$.

Zgodnie za wzorem (5.14)

$$C_n = \frac{2}{J_1^2(x_n)} \int_0^1 r(1 - r^2) J_0(x_n r) dr \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

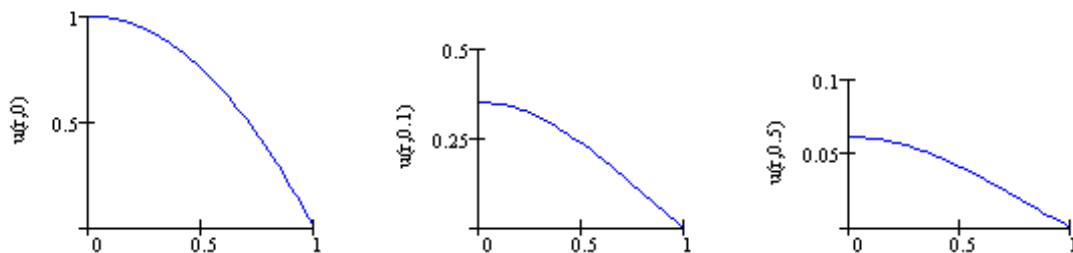
Korzystając z własności funkcji Bessela oraz stosując wzór na całkowanie przez części otrzymujemy ostatecznie

$$C_n = \frac{4J_2(x_n)}{x_n^2 J_1^2(x_n)} = \frac{8}{x_n^3 J_1(x_n)},$$

a zatem zgodnie ze wzorem (5.13) rozwiązanie $u(r, t)$ zagadnienia wyraża się wzorem

$$u(r, t) = 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^3 J_1(x_n)} J_0(x_n r) e^{-x_n^2 t}.$$

Poniższy rysunek przedstawia wykresy temperatury $u(r, t)$ dla $t = 0$, $t = 0.1$, $t = 0.5$. W miarę upływu czasu następuje obniżenie temperatury we wszystkich punktach walca.



5.2.2 Zagadnienie nagrzewania powierzchni bocznej walca

Rozważamy walec o promieniu a , którego osią jest Oz . Niech $u = u(r, t)$ oznacza temperaturę punktu walca oddalonego od jego osi o r , w chwili t . Funkcja ta spełnia równanie przewodnictwa postaci (5.10).

Założmy, że powierzchnia boczna walca utrzymywana jest w temperaturze V_0 , a więc spełniony jest warunek brzegowy

$$u(r, t) = V_0 > 0 \quad \text{dla } r = a, t > 0. \tag{5.15}$$

Zakładamy również spełnianie jednorodnego warunku początkowego

$$u(r, 0) = 0 \quad \text{dla } 0 \leq r < a. \tag{5.16}$$

Niech $Y(r, s)$ będzie transformatą Laplace'a funkcji $u(r, t)$ względem zmiennej t . Wtedy $Y(r, s)$ spełnia równanie

$$Y_{rr} + \frac{1}{r} Y_r - \frac{s}{k} Y = 0. \tag{5.17}$$

Warunek brzegowy (5.15) implikuje równość

$$Y(a, s) = \frac{V_0}{s}. \tag{5.18}$$

Rozwiązaniem równania (5.17) spełniającym jednocześnie warunek brzegowy (5.18) jest funkcja

$$Y(r, s) = \frac{V_0}{s} \frac{J_0(qr)}{J_0(qa)}, \quad \text{gdzie } q = \sqrt{-\frac{s}{k}}.$$

Odwracając transformatę Laplace'a np. za pomocą twierdzenia o residuach, otrzymujemy ostatecznie wzór na rozwiązanie zagadnienia

$$u(r, t) = V_0 \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right)}{x_n J_1(x_n)} e^{-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2 kt} \right], \tag{5.19}$$

gdzie (x_n) jest ciągiem dodatnich zer funkcji Bessela J_0 .

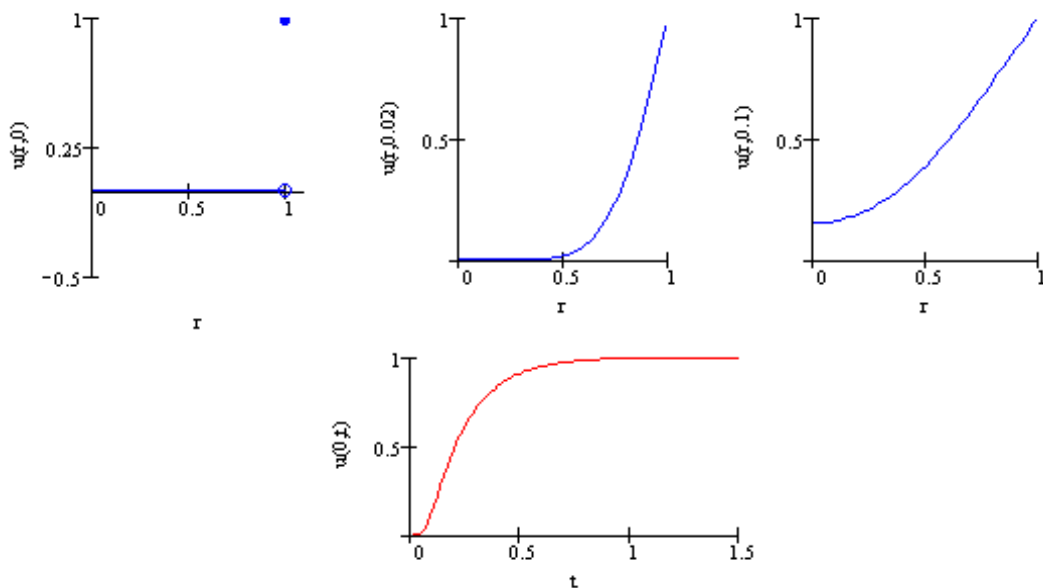
P r z y k ł a d

Rozwiązać powyższe zagadnienie dla $a = 1, k = 1, V_0 = 1$.

Na podstawie wzoru (5.19) możemy napisać, że

$$u(r, t) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{J_0(x_n r)}{x_n J_1(x_n)} e^{-x_n^2 t}.$$

Linie w kolorze niebieskim są wykresami funkcji $u(r, t)$ dla $t = 0, t = 0,2, t = 0,1$, zaś linia czerwona jest wykresem temperatury jako funkcji czasu w punkcie położonym na osi walca ($x = 0$). W miarę upływu czasu następuje wzrost temperatury do wartości $V_0 = 1$ we wszystkich punktach walca.



5.3 Zadania

1. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 < x \leq \frac{1}{2}l \\ l - x & \text{dla } \frac{1}{2}l < x < l. \end{cases}$$

2. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = \frac{cx(l-x)}{l^2}.$$

3. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = Ax.$$

4. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = A(l-x).$$

5. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = U = \text{Const.}$$

6. Rozwiązać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

przy warunkach

$$u(0, t) = T, \quad u(l, t) = U, \quad u(x, 0) = 0.$$

7. Rozwiązać zagadnienie ostygnięcia walca dla $a = 1$, $\varphi(r) = 1 - r^4$.

Temat 6

Funkcje harmoniczne

Ważną rolę odgrywają tzw. *funkcje harmoniczne*. Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja

Funkcję $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy harmoniczną w obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasy C^2 oraz

$$\Delta u = 0, \quad (6.1)$$

gdzie $\Delta u = u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n}$ jest operatorem Laplace'a. ■

W przypadku $n = 2$ można wykazać, że lokalnie każda funkcja harmoniczna jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficzej.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $u(x, y)$ jest harmoniczna w kole $K \subset \mathbb{R}^2$, to istnieje funkcja harmoniczna $v(x, y)$ określona wzorem

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y(\xi, \eta) d\xi + u_x(\xi, \eta) d\eta \quad (6.2)$$

taka, że $f = u + iv$ jest funkcją holomorficzną.

Dowód polega na sprawdzeniu, że spełnione są tzw. równania Cauchy'ego-Riemanna gwarantujące holomorficzną funkcji f . Równania te są postaci: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. ■

6.1 Tożsamości Greena, wzór podstawowy teorii funkcji harmonicznych

6.1.1 Przypadek funkcji dwóch zmiennych niezależnych

Rozważmy teraz przypadek $n = 2$. Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym krzywą gładką ∂D .

Rozważmy znany wzór Greena w postaci

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy \quad (6.3)$$

dla funkcji P i Q klasy C^2 . Podstawiając $u \equiv Q$, $v \equiv -P$ otrzymujemy

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} [u \cos(x, n) + v \cos(y, n)] ds, \quad (6.4)$$

gdzie n oznacza wektor normalny zewnętrzny do ∂D .

Zastępując we wzorze (6.4) u przez $u \frac{\partial v}{\partial x}$ i v przez $u \frac{\partial v}{\partial y}$, dostajemy tzw. *pierwszą tożsamość Greena*

$$\iint_D \left(u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds. \quad (6.5)$$

Zamieniając rolami u i v we wzorze (6.5) i odejmując otrzymany wzór od (6.5) otrzymujemy tzw. *drugą tożsamość Greena*

$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (6.6)$$

Niech teraz $P_0(x_0, y_0)$ będzie ustalonym punktem, zaś $P(x, y)$ zmiennym. Wprowadzając funkcję

$$E(P) = \frac{1}{2\pi} \ln |PP_0| \quad (6.7)$$

można pokazać, że zachodzi równość

$$u(P_0) = \int_{\partial D} u(P) \frac{\partial}{\partial n} E(P) ds_P - \int_{\partial D} \frac{\partial u(P)}{\partial n} E(P) ds_P + \iint_D \Delta u(P) E(P) dx dy. \quad (6.8)$$

Równość (6.8) zwana jest *trzecią tożsamością Greena* lub *wzorem podstawowym teorii funkcji harmonicznych*. Funkcję $E(P)$ określoną wzorem (6.7) nazywamy *rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a*.

6.1.2 Przypadek dowolnej liczby zmiennych niezależnych

W przypadku $n > 2$ można wyprowadzić odpowiednik wzoru (6.8). Wprowadzając rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a wzorem

$$E(P) = -\frac{1}{(n-2)\theta_n |PP_0|^{n-2}} \quad \text{dla } n > 2, \quad (6.9)$$

gdzie $P, P_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, θ_n oznacza miarę powierzchni kuli jednostkowej w \mathbb{R}^n

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2)} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \frac{2 \cdot (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2)} & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \end{cases} \quad (6.10)$$

można wyprowadzić wzór podstawowy dla $n > 2$, postaci

$$u(P_0) = \int_{\partial \Omega} u(P) \frac{\partial}{\partial n} E(P) d\sigma_P - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial u(P)}{\partial n} E(P) d\sigma_P + \iint_{\Omega} \Delta u(P) E(P) dP. \quad (6.11)$$

Jest to odpowiednik wzoru (6.8).

6.2 Własności funkcji harmonicznyc

Podamy teraz podstawowe własności funkcji harmonicznyc. Rozważymy najpierw przypadek $n = 2$.

T w i e r d z e n i e 1

Jeśli funkcja u jest harmoniczna w pewnym ograniczonym obszarze $D_1 \supset \bar{D}$, to

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Dowód wynika z pierwszej tożsamości Greena (6.5), w którym należy podstawić w miejsce funkcji u funkcję stałą równą 1, a w miejsce funkcji v funkcję u . ■

T w i e r d z e n i e 2

Jeśli funkcja u jest klasy C^2 w obszarze ograniczonym D oraz

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

dla każdego gładkiego i zamkniętego łuku Γ ograniczającego obszar $D_0 \subset D$, to u jest harmoniczna w D .

D o w ó d

Stosując wzór (6.5) dla $u = 1$ i $v = u$ otrzymujemy, że

$$\iint_{D_0} \Delta u dx dy = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

dla dowolnego $D_0 \subset D$, zatem $\Delta u = 0$ dla $(x, y) \in D_0$. ■

T w i e r d z e n i e 3

Niech u będzie funkcją harmoniczną w ograniczonym obszarze D i klasy C^1 w \bar{D} . Jeśli $u|_{\partial D} = 0$, to $u \equiv 0$ w D . Jeśli $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0$, to $u \equiv \text{const}$ w D .

D o w ó d

Podstawiając $u = v$ w pierwszej tożsamości Greena (6.5) otrzymujemy

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

skąd wynika natychmiast, że $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ w D . W takim razie u jest stała, lub stała i równa zero, w zależności od przyjętego założenia. ■

Założmy teraz, że $n \geq 2$. Można wykazać prawdziwość następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e 4 (*tw. Gaussa o wartości średniej funkcji harmonicznej*)

Jeśli u jest funkcją harmoniczną w kuli $K(a, R)$, klasy C^2 w $\overline{K}(a, R)$, to w środku tej kuli przyjmuje ona wartość równą średniej wartości na powierzchni kuli. Zależność tę opisuje wzór

$$u(a) = \frac{1}{\theta_n R^{n-1}} \int_{\partial K} u(y) d\sigma_y, \quad (6.12)$$

gdzie θ_n oznacza miarę powierzchni kuli jednostkowej w \mathbb{R}^n określoną wzorem (6.10). ■

W przypadku $n = 2$ dla $a = (x_0, y_0)$ wzór (6.12) przybiera postać

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial K} u(P) d\sigma_P, \quad (6.13)$$

zaś dla $n = 3$ i $a = (x_0, y_0, z_0)$ mamy

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K} u(P) d\sigma_P. \quad (6.14)$$

U w a g a

W przypadku $n = 2$ łatwo pokazać, że

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_K u(x, y) dx dy, \quad (6.15)$$

a więc wartość funkcji harmonicznej w środku koła równa jest średniej wartości tej funkcji w całym kole. ■

Ważnym wnioskiem wynikającym z twierdzenia Gaussa o wartości średniej funkcji harmonicznej, jest tzw. *zasada maksimum dla funkcji harmonicznych*.

T w i e r d z e n i e 5 (*zasada maksimum*)

Niech u będzie funkcją harmoniczną w obszarze D (ograniczonym lub nie) przyjmującą wartości rzeczywiste. Jeżeli u nie jest tożsamościowo równa stałej, to nie może ona przyjmować w żadnym punkcie obszaru D swego kresu górnego ani dolnego. ■

Bezpośrednio z zasady maksimum można wyprowadzić dwa ważne wnioski.

W n i o s e k 1

Jeżeli u_1, u_2 są harmoniczne w D , ciągłe w \overline{D} oraz

$$u_{1|\partial D} \leq u_{2|\partial D},$$

to $u_1 \leq u_2$ w D .

Dowód wynika z zastosowania zasady maksimum do funkcji harmonicznej $u_2 - u_1$. ■

Wniosek 2

Jeżeli u_1, u_2 są harmoniczne w D , ciągłe w \bar{D} oraz

$$|u_1| \leq u_2 \text{ na } \partial D,$$

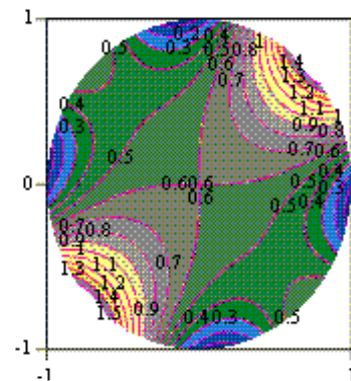
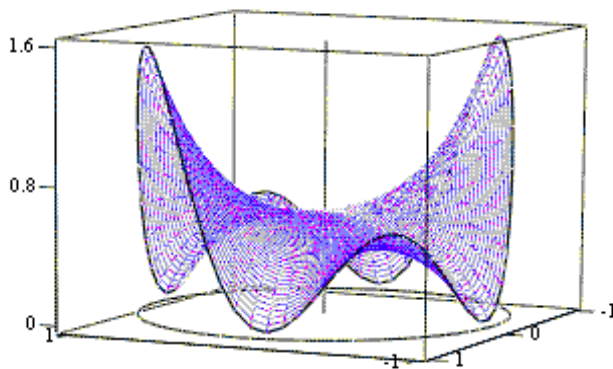
to $|u_1| \leq u_2$ w D .

Dowód wynika z zastosowania wniosku 1 do par funkcji $-u_2, u_1$ oraz u_1, u_2 . ■

Poniższy rysunek ilustruje pewne charakterystyczne cechy funkcji harmonicznych. Przedstawia on powierzchnię opisaną wzorem

$$u(x, y) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 3x^2y^2 + xy,$$

która jest przykładem funkcji harmonicznej dwóch zmiennych. Powierzchnia jest widoczna dla (x, y) należących do koła jednostkowego $x^2 + y^2 \leq 1$. Widoczny jest także plan warstwiczny.



6.3 Zadania

1. Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ wiedząc, że:

- (a) $u = x^3 - 3xy^2$
- (b) $u = x^2 - y^2 + 2x$
- (c) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$
- (d) $u = \frac{x}{x^2+y^2} - 2y$
- (e) $u = 2xy + 3x$
- (f) $v = -\frac{y}{(x+1)^2+y^2}$
- (g) $v = \exp(x)(y \cos y + x \sin y) + x + y$
- (h) $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, x > 0$
- (i) $u = \exp(x^2 - y^2)(x \cos 2xy - y \sin 2xy)$
- (j) $u = \exp(x)[(x^2 - y^2 + 1) \cos y - 2xy \sin y]$

(k) $v = \ln(x^2 + y^2)$

2. Znaleźć punkty, w których funkcja $u(x, y)$ osiąga swój kres górny i dolny w zbiorze D , jeżeli:

(a) $u(x, y) = x^2 - y^2, D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(b) $u(x, y) = x + y, D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

3. Udowodnić wzór (6.15) wykorzystując twierdzenie Gaussa o wartości średniej w przypadku $n = 2$.

4. Udowodnić, że funkcja harmoniczna o wartościach rzeczywistych, nie będąca stałą, nie może posiadać ekstremów lokalnych w żadnym punkcie obszaru, w którym jest określona.

5. Załóżmy, że funkcja $u(\xi, \eta)$ jest harmoniczna, a funkcja $f(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ jest holomorficzną, tzn. spełniony jest układ równań Cauchy'ego-Riemanna $\xi_x = \eta_y, \xi_y = -\eta_x$. Pokazać, że złożenie $(u \circ f)(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$ jest funkcją harmoniczną (zakładamy wykonalność złożenia).

Temat 7

Zagadnienia brzegowe dla równań eliptycznych

Rozważmy płaski obszar $D \subset \mathbb{R}^2$ ograniczony krzywą ∂D . Dla równania Laplace'a (Poissona) stawia się trzy podstawowe zagadnienia brzegowe.

Zagadnienie Dirichleta (tzw. *zagadnienie brzegowe pierwszego rodzaju*)

Znaleźć funkcję u spełniającą warunki

$$\Delta u = 0 \quad (\text{lub } \Delta u = f), \quad \text{dla } (x, y) \in D, \quad (7.1)$$

$$u|_{\partial D} = g(x, y), \quad (7.2)$$

gdzie g jest funkcją daną określoną na ∂D . Warunek (7.2) rozumiany jest w sensie przejścia granicznego jako $\lim_{D \ni P \rightarrow P_0 \in \partial D} u(P) = g(P_0)$.

Zagadnienie Neumanna (tzw. *zagadnienie brzegowe drugiego rodzaju*)

Znaleźć funkcję u spełniającą warunki

$$\Delta u = 0 \quad (\text{lub } \Delta u = f), \quad \text{dla } (x, y) \in D, \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = g(x, y), \quad (7.4)$$

gdzie g jest funkcją daną określoną na ∂D , n jest wektorem normalnym zewnętrznym. Warunek (7.4) również należy rozumieć w sensie przejścia do granicy od wnętrza obszaru.

Zagadnienie Robina (tzw. *zagadnienie brzegowe trzeciego rodzaju*)

Znaleźć funkcję u spełniającą warunki

$$\Delta u = 0 \quad (\text{lub } \Delta u = f), \quad \text{dla } (x, y) \in D, \quad (7.5)$$

$$\left(a \frac{\partial u}{\partial n} + bu \right)|_{\partial D} = g(x, y), \quad (7.6)$$

gdzie a, b, g są danymi funkcjami określonymi na ∂D , $a^2 + b^2 > 0$, n jest wektorem normalnym zewnętrznym. Warunek (7.6) również należy rozumieć w sensie przejścia granicznego.

Postawione zagadnienia są tzw. *zagadnieniami wewnętrznymi*. Stawia się ponadto *zagadnienia zewnętrzne* dla obszarów D nieograczonych, zewnętrznych względem danych krzywych początkowych.

W tym przypadku należy dodatkowo przyjąć, że poszukiwana funkcja spełnia pewien warunek dotyczący zachowania się jej dla punktów odległych od początku układu, tzw. „warunek w nieskończoności”.

Dla równania Laplace’a nie stawia się zagadnienia Cauchy’ego, poza jednym przypadkiem, gdy poszukuje się lokalnie rozwiązań w klasie funkcji analitycznych przy analitycznych danych początkowych. Powodem tego jest fakt, że zagadnienie Cauchy’ego dla równania Laplace’a nie jest poprawnie postawione (patrz przykład z wykładu 1).

7.1 Metoda funkcji Greena

Skorzystamy teraz z podstawowego wzoru teorii funkcji harmonicznycch (6.8)

$$u(P_0) = \int_{\partial D} u(P) \frac{\partial}{\partial n} E(P) ds_P - \int_{\partial D} \frac{\partial u(P)}{\partial n} E(P) ds_P + \iint_D \Delta u(P) E(P) dx dy, \quad (7.7)$$

gdzie, zgodnie z (6.7)

$$E(P) = \frac{1}{2\pi} \ln |PP_0| = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|PP_0|}.$$

Założmy, że u jest funkcją harmoniczną, zatem $\Delta u = 0$. Powyższy wzór przybiera wówczas postać

$$u(P_0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|PP_0|} - \ln \frac{1}{|PP_0|} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right] ds_P. \quad (7.8)$$

W zagadnieniach Dirichleta i Neumanna dla równania Laplace’a wartości brzegowe funkcji u lub jej pochodnej normalnej $\frac{\partial}{\partial n} u$ mogą być zadawane osobno lecz nie jednocześnie razem. W celu uzyskania rozwiązania zagadnienia Dirichleta (7.1)-(7.2) lub Neumanna (7.3)-(7.4) należy tak przekształcić wzór (7.8), aby wyeliminować z niego niewiadome wartości brzegowe. Można to zrobić przez wprowadzenie pojęcia funkcji Greena.

Założmy teraz, że v jest pewną funkcją harmoniczną, tzn. $\Delta v = 0$. Z drugiej tożsamości Greena (6.6) otrzymujemy

$$\int_{\partial D} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds - \iint_D v \Delta u dx dy = 0. \quad (7.9)$$

Dodając stronami (7.7) i (7.9), po pogrupowaniu odpowiadających sobie wyrazów, otrzymujemy wzór

$$u(P_0) = \int_{\partial D} \left[G(P, P_0) \frac{\partial u(P)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} G(P, P_0) u(P) \right] ds_P - \iint_D G(P, P_0) \Delta u(P) dx dy, \quad (7.10)$$

gdzie

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|PP_0|} + v. \quad (7.11)$$

Funkcja G spełnia równanie $\Delta u = 0$ w D za wyjątkiem punktu $P = P_0$. Funkcję v występującą we wzorze (7.11) wybieramy w ten sposób, aby

$$v|_{\partial D} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|PP_0|} \quad \text{dla } P \in \partial D, \quad (7.12)$$

a to oznacza, że $G|_{\partial D} = 0$.

Funkcja G dana wzorem (7.11) i spełniająca warunek brzegowy (7.12) nazywana jest *funkcją Greena zagadnienia Dirichleta* dla równania Laplace'a.

Jeśli funkcja ta jest znana, to wzór (7.10) przedstawia rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a (7.1)-(7.2) w postaci

$$u(P_0) = - \int_{\partial D} g(P) \frac{\partial}{\partial n} G(P, P_0) ds_P. \quad (7.13)$$

Aby wyznaczyć funkcję Greena $G(P, P_0)$, należy rozwiązać szczególne zagadnienie Dirichleta z warunkiem brzegowym (7.12). Jest ono jednak znacznie łatwiejsze do rozwiązania niż rozważane zagadnienie wyjściowe, ponieważ w warunku brzegowym występuje konkretna funkcja.

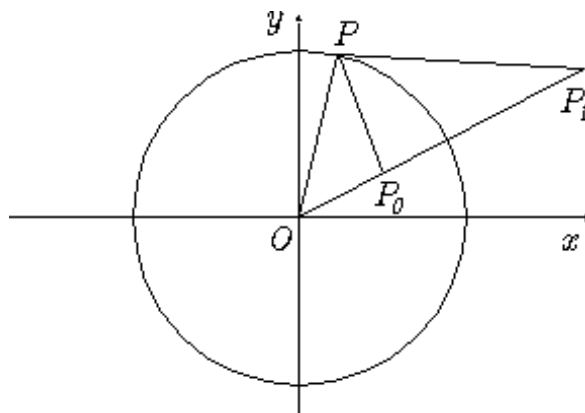
Analogicznie można wyprowadzić wzór przedstawiający rozwiązanie zagadnienia Neumanna.

7.1.1 Funkcja Greena dla koła - metoda punktów symetrycznych

Niech teraz D będzie kołem o środku w $O(0, 0)$ i promieniu a , ∂D jego brzegiem, tzn. okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = a^2$. Niech $P_0 \in D$ będzie dowolnym punktem. Z O wyprowadzamy półprostą przechodzącą przez P_0 . Na tej półprostej wybieramy punkt P_1 taki, że

$$\rho_0 \rho_1 = a^2, \quad \rho_0 = |OP_0|, \quad \rho_1 = |OP_1|.$$

Punkt P_1 nazywamy punktem symetrycznym (*harmonicznie sprzężonym*) do P względem okręgu $\partial D : x^2 + y^2 = a^2$.



Rozważmy funkcję

$$v(P) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{a}{\rho_0} \frac{1}{|PP_1|} \right).$$

Łatwo sprawdzić, że jest ona harmoniczna w kole D .

Gdy $P \in \partial D$, to z podobieństwa trójkątów $\triangle OPP_0$ i $\triangle OPP_1$ (jeden kąt wspólny oraz $|OP_0| : |OP| = |OP| : |OP_1|$) wynika, że

$$\frac{a}{\rho_0} \frac{1}{|PP_1|} = \frac{1}{|PP_0|},$$

zatem

$$v|_{\partial D} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|PP_0|},$$

a to oznacza, że spełniony jest warunek (7.12) z definicji funkcji Greena.

Zatem funkcja Greena zagadnienia Dirichleta dla koła dana jest wzorem

$$G(P, P_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|PP_0|} - \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{a}{\rho_0} \frac{1}{|PP_1|} \right). \quad (7.14)$$

Dowodzi się, że pochodna $\frac{\partial}{\partial n} G$ dla $P \in \partial D$ może być obliczona ze wzoru

$$\frac{\partial G}{\partial n}|_{\partial D} = -\frac{1}{2\pi a} \frac{a^2 - \rho_0^2}{|PP_0|^2}.$$

W takim razie rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta (7.1)-(7.2) na podstawie wzoru (7.13) jest funkcja

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{\partial D} g(P) \frac{a^2 - \rho_0^2}{|PP_0|^2} ds_P. \quad (7.15)$$

Wzór (7.15) we współrzędnych biegunowych można zapisać jako

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\varphi - \theta) + r^2} d\varphi, \quad (7.16)$$

gdzie współrzędne biegunowe punktu P_0 oznaczone są przez (r, θ) a współrzędne punktu P na okręgu przez (a, φ) . Wzór (7.16) nosi nazwę *wzoru całkowego Poissona* dla funkcji harmoniczej w kole.

7.2 Metoda szeregów Fouriera dla koła

Rozważamy równanie Laplace'a (7.1) z funkcją niewiadomą $u = u(x, y)$

$$\Delta u = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\} \quad (7.17)$$

z warunkiem brzegowym

$$u|_{\partial D} = \varphi(\alpha) \quad \text{dla } \alpha \in [0, 2\pi],$$

gdzie φ jest daną funkcją ciągłą, która może być przedstawiona w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera.

Jedną z metod rozwiązania opartą jest na przedstawieniu niewiadomej funkcji harmoniczej u w postaci części rzeczywistej pewnej funkcji holomorficzej w kole D

$$u(r, \alpha) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n (a_n \cos n\alpha - b_n \sin n\alpha), \quad (7.18)$$

gdzie

$$z = re^{i\alpha}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|, \quad \alpha = \arg z, \quad c_n = a_n + ib_n.$$

Z warunku brzegowego otrzymujemy, że dla $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ musi zachodzić równość

$$\varphi(\alpha) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n (a_n \cos n\alpha - b_n \sin n\alpha) \quad \text{dla } \alpha \in [0, 2\pi].$$

Z własności trygonometrycznych szeregów Fouriera wynika stąd, że

$$a_n = \frac{1}{2\pi a^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \cos n\alpha d\alpha, \quad b_n = -\frac{1}{2\pi a^n} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \quad (7.19)$$

dla $n = 0, 1, 2, \dots$

Otrzymane rozwiązanie należy ostatecznie zapisać w postaci jawnej $u = u(x, y)$.

Przykład

Rozwiązać zagadnienie Dirichleta (7.17) dla $a = 1$, $\varphi(x, y) = \varphi(\alpha) = 0,6 - 0,5 \cos 4\alpha + 0,5 \sin \alpha$.

Ze wzorów (7.19) wynika, że

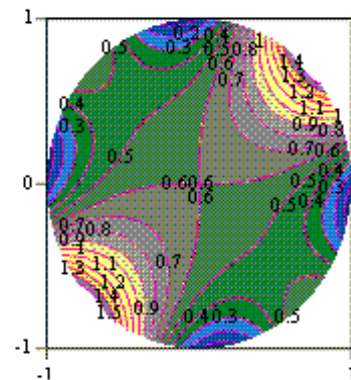
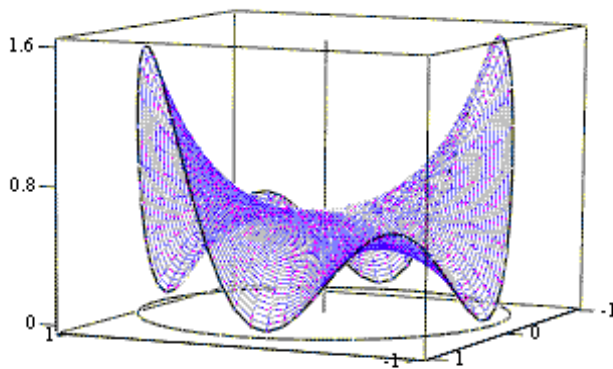
$$a_0 = \frac{6}{10}, \quad a_4 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{2}$$

zaś pozostałe współczynniki są równe zero.

W takim razie rozwiązanie zagadnienia wyraża się wzorem

$$u(x, y) = \frac{3}{5} - \frac{1}{4} r^4 \cos 4\alpha + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha = \frac{6}{10} - \frac{1}{2} (x^4 + y^4) + 3x^2 y^2 + xy.$$

Poniższy rysunek przedstawia wykres rozwiązania $u(x, y)$ oraz jego plan warstwiczny.



7.3 Metoda odwzorowań konforemnych

Rozważmy zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a w półpłaszczyźnie

$$\Delta u = 0 \quad \text{dla } (x, y) \in D = \{(x, y) : y > 0\}. \quad (7.20)$$

Założmy, że szukana funkcja $u(x, y)$ jest ciągła dla $y \geq 0$, ograniczona w nieskończoności i spełnia warunek brzegowy

$$u(x, 0) = \alpha(x), \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}, \quad (7.21)$$

gdzie $\alpha(x)$ jest daną funkcją ograniczoną w nieskończoności.

Z teorii funkcji zmiennych zespolonych wiadomo, że funkcja

$$w = f(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

jest odwzorowaniem konforemnym półpłaszczyzny $y > 0$ w koło jednostkowe $|w| < 1$, przy którym brzeg półpłaszczyzny (tzn. prosta $y = 0$) przechodzi na okrąg $|w| = 1$, a punkt z_0 w punkt $w = 0$. Wówczas funkcja U określona jako $U(w) = u(z)$, gdzie $z = x + iy$, jest funkcją harmoniczną w kole $|w| < 1$ taką, że

$$U_{|w|=1} = u(x, 0) = \alpha(x) =: A(\psi),$$

gdzie $w = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (patrz zadanie 5 z poprzedniego wykładu).

Z twierdzenia Gaussa o wartości średniej dla funkcji harmonicznym wynika, że

$$U(0) = u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(e^{i\psi}) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A(\psi) d\psi. \quad (7.22)$$

Ponieważ

$$e^{i\psi} = \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0}, \quad \text{więc } d\psi = \frac{2y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx.$$

Zamieniając zmienne w całce (7.22), otrzymujemy

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} \alpha(x) dx. \quad (7.23)$$

Wzór (7.23) przedstawia rozwiązanie zagadnienia (7.20)-(7.21).

7.4 Jednoznaczność zagadnienia Dirichleta i Neumanna

Niech u_1 i u_2 będą dwoma rozwiązaniami zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a (Poissona). Wówczas różnica $u = u_1 - u_2$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\Delta u = 0, \quad \text{dla } x \in D, \quad u|_{\partial D} = 0.$$

Z własności 3 funkcji harmonicznym wynika, że $u \equiv 0$, zatem $u_1 \equiv u_2$ w D .

W przypadku zagadnienia Neumanna różnica $u = u_1 - u_2$ dwóch rozwiązań tego zagadnienia jest rozwiązaniem problemu

$$\Delta u = 0, \quad \text{dla } x \in D, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = 0.$$

Na mocy własności 3 funkcji harmonicznym wnioskujemy, że $u = \text{Const}$. O ile więc nie przyjmiemy jakiegoś dodatkowego założenia, to nie możemy twierdzić, że rozwiązanie zagadnienia Neumanna, o ile istnieje, jest jedyne. Zwykle takim dodatkowym założeniem gwarantującym jednoznaczność rozwiązania jest podanie wartości u w jakimś punkcie obszaru D .

U w a g a

Z pierwszej tożsamości Greena (6.5) dla $u = 1$, $v = u$ wynika, że

$$\iint_D \Delta u(x, y) dx dy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Oznacza to, że w zagadnieniu Neumanna nie można zadać wartości pochodnej $\frac{\partial u}{\partial n}$ na brzegu ∂D w sposób dowolny. W szczególności funkcje dane muszą spełniać warunek

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\partial D} g(s) ds. \quad (7.24)$$

Jest to warunek konieczny rozwiązalności tego zagadnienia.

7.5 Stabilność rozwiązania zagadnienia Dirichleta

Założmy, że u_1 i u_2 są rozwiązaniami zagadnienia Dirichleta dla równania Poissona

$$\Delta u_i = f \quad \text{dla } (x, y) \in D, \quad i = 1, 2$$

z warunkami brzegowymi

$$u_i|_{\partial D} = g_i, \quad i = 1, 2.$$

W takim razie funkcja $u = u_1 - u_2$ jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a

$$\Delta u = 0 \quad \text{w } D, \quad u|_{\partial D} = g_1 - g_2.$$

Przypuśćmy, że dla każdego $P \in \partial D$ zachodzi nierówność

$$|g_1(P) - g_2(P)| \leq \varepsilon.$$

Ponieważ funkcja stała równa ε , jest funkcją harmoniczną, więc na mocy wniosku 2 z zasady maksimum dla funkcji harmoniczych (patrz poprzedni wykład), zachodzi nierówność

$$|u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leq \varepsilon$$

dla dowolnych punktów $(x, y) \in D$, co dowodzi stabilności rozwiązania.

7.6 Zadania

1. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x, y)$ w obszarze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ spełniającą warunek brzegowy $u|_{\partial D} = x + xy$.
2. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x, y)$ w obszarze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$ spełniającą warunek brzegowy $u|_{\partial D} = x^2 - 2xy + 2y^2$.
3. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x, y)$ w obszarze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2\}$ spełniającą warunek brzegowy $u|_{\partial D} = 3x^2 + xy - 3y^2 + x - y - 2$, $a > 0$.
4. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x, y)$ w obszarze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$ spełniającą warunek brzegowy $u|_{\partial D} = x + 3xy - x^2y$.

5. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x, y)$ w obszarze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ spełniającą warunek brzegowy $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = x + y$ i taką, że $u(0, 0) = 0$.
6. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x, y)$ w obszarze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ spełniającą warunek brzegowy $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = x^3 - y^3$ i taką, że $u(0, 0) = 3$.
7. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x, y)$ w obszarze $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ spełniającą warunek brzegowy $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = x^2$ i taką, że $u(0, 0) = 0$.
8. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a $\Delta u = 0$ w prostokącie $D = [0, a] \times [0, b]$, jeżeli na brzegu prostokąta określone są warunki $u(0, y) = \varphi_0(y)$, $u(a, y) = \varphi_1(y)$, $u(x, 0) = \psi_0(x)$, $u(x, b) = \psi_1(x)$ oraz funkcje dane spełniają odpowiednie warunki zgodności. Rozwiązać powyższe zagadnienie w przypadku szczególnym

$$\varphi_0(y) = Ay(b - y), \quad \psi_0(x) = B \sin \frac{\pi x}{a}, \quad \varphi_1(y) = \psi_1(x) = 0.$$

9. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a $\Delta u = 0$ w prostokącie $D = [0, a] \times [0, b]$, jeżeli na brzegu prostokąta określone są warunki $u(0, y) = A$, $u(a, y) = Ay$, $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, b) = 0$.
10. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a $\Delta u = 0$ w prostokącie $D = [0, a] \times [0, b]$, jeżeli na brzegu prostokąta określone są warunki $u(0, y) = A$, $u_x(a, y) = 0$, $u_y(x, 0) = T \sin \frac{\pi x}{2a}$, $u(x, b) = 0$.

Temat 8

Dystrybucje, wiadomości wstępne (I)

Wielkości fizyczne opisujemy najczęściej przyporządkowując im funkcje (np. zależne od czasu). Inną drogą opisu tych wielkości jest przyporządkowanie im funkcjonałów określonych na odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych rzeczywistych lub zespolonych. Funkcjonały takie nazywamy *dystrybucjami*. Dystrybucje mogą być określone na różnych przestrzeniach funkcyjnych. Zmieniając odpowiednią przestrzeń funkcyjną zmieniamy klasę dystrybucji.

Poniżej przedstawimy podstawowe pojęcia dotyczące dystrybucji.

8.1 Przestrzeń funkcji próbnych D , przestrzeń D'

Przyjmujemy następującą definicję.

D e f i n i c j a

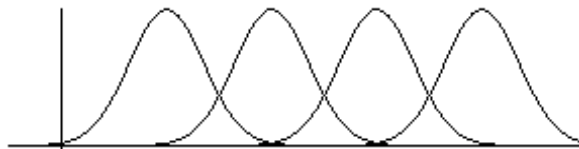
D (zbiór funkcji próbnych) = $C_0^\infty(R)$ lub $C_0^\infty(R^n)$.

Oznacza to, że $\varphi \in D \Leftrightarrow \varphi \in C^\infty$ oraz $\text{supp } \varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$ (nośnik funkcji) jest zwarty (φ może być funkcją o wartościach rzeczywistych lub zespolonych).

W przestrzeni funkcji próbnych definiujemy *zbieżność ciągu funkcyjnego* w sposób następujący.

D e f i n i c j a

$\varphi_n \rightarrow \varphi$ w $D \Leftrightarrow \forall k \in N \quad \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows \varphi^{(k)}$ oraz nośniki $\text{supp } \varphi_n$ są wspólnie ograniczone.



(to jest kontrprzykład na zbieżność - brak wspólnej ograniczoności nośników).

T w i e r d z e n i e

Każda funkcja ciągła $f(t)$ o nośniku ograniczonym może być jednostajnie przybliżona przez funkcje z przestrzeni D .

Dla dowodu twierdzenia należy rozważyć funkcję

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |t| \geq 1 \\ e^{\frac{1}{t^2-1}} & \text{dla } |t| < 1, \end{cases}$$

następnie zauważyć, że jest ona klasy C^∞ i utworzyć kolejną funkcję pomocniczą określoną wzorem

$$g_\alpha(t) = \frac{\xi\left(\frac{t}{\alpha}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \xi\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(t) dt = 1$$

dla $\alpha > 0$. Funkcja g_α jest tożsamościowo równa zero poza przedziałem $(-\alpha, \alpha)$.

Niech

$$\varphi_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g_\alpha(t - \tau) d\tau, \quad \varphi_\alpha \in D.$$

Funkcja φ_α jest żądanym przybliżeniem, ponieważ

$$|f(t) - \varphi_\alpha(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t) - f(\tau)] g_\alpha(t - \tau) d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(\tau)| g_\alpha(t - \tau) d\tau.$$

Dobierając α tak małe, by dla $|t - \tau| < \alpha$ na mocy jednostajnej ciągłości funkcji f zachodziła nierówność $|f(t) - f(\tau)| < \varepsilon$ otrzymujemy tezę, gdyż

$$|f(t) - \varphi_\alpha(t)| \leq \varepsilon \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} g_\alpha(t - \tau) d\tau = \varepsilon$$

■

Definicja

Przestrzenią dystrybucji D' nazywamy przestrzeń funkcjonałów liniowych i ciągłych na D (względem zbieżności określonej w poprzedniej definicji).

W przestrzeni D' określamy zbieżność jak następuje. Niech $T_n, T \in D'$ (oznaczamy równoważnie $T(\varphi) = \langle T | \varphi \rangle$).

Definicja

$$T_n \rightarrow T \text{ w } D' \Leftrightarrow \forall \varphi \in D \Rightarrow T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi)$$

Twierdzenie

Przestrzeń D' jest domknięta ze względu na zbieżność (tzn. granica funkcjonału liniowego i ciągłego jest funkcjonałem liniowym i ciągłym).

■

Spośród wszystkich dystrybucji szczególnie wyróżniamy tzw. dystrybucje regularne. Są to dystrybucje wyznaczone przez funkcje lokalnie całkowalne. Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na \mathbb{R} , a więc funkcją, dla której istnieje całka oznaczona po dowolnym przedziale skończonym z funkcji $|f(t)|$.

Definicja

Dystrybucją regularną wyznaczoną przez lokalnie całkwalną funkcję f nazywamy dystrybucję określoną wzorem

$$\langle f|\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

dla $\varphi \in D$.

Poprawność tej definicji (ciągłość funkcjonału) wynika z oszacowania

$$|\langle f|\varphi \rangle - \langle f|\varphi_n \rangle| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt = \int_K |f(t)| |\varphi(t) - \varphi_n(t)| dt \leq M_K \cdot \varepsilon$$

gdzie K jest zbiorem zwartym, w którym zawarte są nośniki wszystkich funkcji φ_n, φ .

Wiele własności dystrybucji i pojęć z nimi związanych wprowadza się w ten sposób, by były one uogólnieniem własności dystrybucji regularnych. Dotyczy to przede wszystkim różniczkowania dystrybucji, pojęcia równości dystrybucji na zbiorze otwartym (mimo, że dystrybucja nie jest funkcją mającą określoną wartość w każdym punkcie) oraz pojęcia nośnika dystrybucji.

Rozważmy na początek funkcję lokalnie całkwalną f , której pochodna f' jest także funkcją lokalnie całkwalną. Niech $\varphi \in D$ będzie taka, że $\text{supp } \varphi \subset K = [a, b]$ - zwarty. Wówczas ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = \int_{a-1}^{b+1} f'(t) \varphi(t) dt = \underbrace{f(t) \varphi(t)}_0 \Big|_{a-1}^{b+1} - \int_{a-1}^{b+1} f(t) \varphi'(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt$$

co pozwala przyjąć następującą definicję różniczkowania w przestrzeni D' .

Definicja

Pochodną dystrybucji $T \in D'$ nazywamy dystrybucję $T' = DT$ określoną wzorem

$$\langle T'|\varphi \rangle = - \langle T|\varphi' \rangle \quad (8.1)$$

dla $\varphi \in D$ (w ten sposób każda dystrybucja, a więc i każda funkcja lokalnie całkwalna, ma pochodną). Pochodną tą nazywamy pochodną w sensie dystrybucyjnym.

W przypadku wielowymiarowym powyższą definicję modyfikujemy do wzoru

$$\langle D^\alpha T|\varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T|D^\alpha \varphi \rangle \quad (8.2)$$

gdzie α jest wielowskazyńnikiem $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, zaś

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \varphi. \quad (8.3)$$

D e f i n i c j a

Dystrybucje $T_1, T_2 \in D'$ są równe na zbiorze otwartym $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek

$$\forall \varphi \in D \text{ supp } \varphi \subset A \Rightarrow \langle T_1 | \varphi \rangle = \langle T_2 | \varphi \rangle.$$

D e f i n i c j a

Nośnikiem dystrybucji $T \in D'$ nazywamy najmniejszy zbiór domknięty $F \subset \mathbb{R}$ taki, że $T = 0$ na F' w sensie poprzedniej definicji.

Spośród wszystkich dystrybucji wyróżniamy tzw. dystrybucje skończonego rzędu będące pochodnymi dystrybucyjnymi funkcji ciągłych.

D e f i n i c j a

Dystrybucję $T \in D'$ nazywamy *dystrybucją skończonego rzędu* wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $h(t)$ ciągła na \mathbb{R} oraz liczba naturalna k taka, że $T = D^k h$. Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy rzędem dystrybucji T .

T w i e r d z e n i e

Każda dystrybucja $T \in D'$ jest lokalnie dystrybucją skończonego rzędu tzn., że dla ustalonego ograniczonego lecz dowolnego przedziału $(a, b) \subset \mathbb{R}$ istnieje $h \in C(a, b)$, $k \geq 0$ taka, że $\forall \varphi \in D$ $\text{supp } \varphi \subset (a, b)$ zachodzi

$$\langle T | \varphi \rangle = (-1)^k \int_a^b h(t) \varphi^{(k)}(t) dt = (-1)^k \int_R h(t) \varphi^{(k)}(t) dt = \langle D^k h | \varphi \rangle \quad (8.4)$$

(dla dystrybucji skończonego rzędu równość powyższa zachodzi dla wszystkich $\varphi \in D$ - bez żadnych dodatkowych ograniczeń co do nośnika φ). ■

T w i e r d z e n i e

Niech f będzie lokalnie całkowna na \mathbb{R} . Niech $h(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$. Wówczas $f = Dh$ (w sensie dystrybucyjnym).

W teorii całki Lebesgue'a dowodzi się, że $h(t)$ jest różniczkowalna prawie wszędzie (tzn. ewentualnie poza zbiorem miary zero) i prawie wszędzie $h'(t) = f(t)$. W takim razie mamy na mocy wzoru na całkowanie przez części

$$\begin{aligned} \langle Dh | \varphi \rangle &= - \langle h | \varphi' \rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \varphi'(t) dt = \underbrace{-h(t) \varphi(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt = \\ &= \langle f | \varphi \rangle \quad \text{a więc } Dh = f. \end{aligned}$$

Ponieważ h jest ciągła, więc f jest skończonego rzędu (0 - gdy f ciągła, 1 - w przeciwnym razie). ■

8.1.1 Przykłady dystrybucji skończonego rzędu

Przykład 1

Niech $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$. Wówczas $Dh = 1_+$, gdzie 1_+ jest funkcją skoku jednostkowego

(funkcją Heavyside'a) określoną jako $1_+(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$.

Obliczając z definicji pochodną Dh otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle Dh|\varphi \rangle &= -\langle h|\varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} t\varphi'(t) dt = \underbrace{-t\varphi(t)|_0^{+\infty}}_0 + \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} 1_+(t) \varphi(t) dt = \langle 1_+|\varphi \rangle \quad \text{a więc } Dh = 1_+ \end{aligned}$$

Przykład 2

Niech $\delta = D1_+ = D^2h$. Obliczmy wartość $\langle \delta|\varphi \rangle$.

$$\langle \delta|\varphi \rangle = \langle D1_+|\varphi \rangle = -\langle 1_+|\varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = \underbrace{-\varphi(\infty)}_0 + \varphi(0) = \varphi(0)$$

Dystrybucja δ zwana jest tzw. *deltą Diraca*. Nie jest ona dystrybucją regularną, ponieważ nie istnieje funkcja lokalnie całkowalna f taka, że $\forall \varphi \in D$ zachodzi $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$, jest ona jednakże dystrybucją skończonego rzędu, jej rząd równy jest 2.

Przykład 3

Dystrybucje $\delta^{(n)} = D^n\delta = D^{n+2}h$ (pochodne delty Diraca) są także dystrybucjami skończonego ($n+2$ -go) rzędu. Korzystając z definicji obliczamy natychmiast, że

$$\langle \delta^{(n)}|\varphi \rangle = (-1)^n \langle \delta|\varphi^{(n)} \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

8.2 Transformata Laplace'a dystrybucji

Ze zbioru wszystkich dystrybucji skończonego rzędu wybieramy te, które są pochodnymi dystrybucyjnymi funkcji ciągłych $h(t)$ spełniających dwa dodatkowe warunki:

1. $h(t) = 0$ dla $t < 0$,
2. $L\{h(t)\}$ istnieje i jest zbieżna bezwzględnie dla $\operatorname{Re} s > \sigma$.

Zbiór takich dystrybucji oznaczamy przez D'_0 .

Definicja

Dla dystrybucji $T = D^k h \in D'_0$ definiujemy przekształcenie Laplace'a wzorem

$$L\{T\}(s) = s^k L\{h(t)\}(s) = s^k H(s),$$

gdzie $H(s) = L\{h(t)\}(s)$ jest klasyczną transformatą Laplace'a funkcji $h(t)$.

T w i e r d z e n i e

Jeśli funkcja $f(t)$ posiada L transformatę w sensie klasycznym, to posiada również transformatę w sensie dystrybucyjnym i transformaty te są równe.

Niech $h(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ oraz niech $L\{f\}(s) = F(s)$ w sensie klasycznym. Wówczas h spełnia warunki 1 i 2 oraz $Dh = f$. Ponadto, zgodnie z tw. o transformacie całki w sensie klasycznym $L\{h\}(s) = \frac{1}{s}L\{f\}(s) = \frac{1}{s}F(s)$. Zatem z poprzedniej definicji wynika, że wyznaczając tę transformatę w sensie dystrybucyjnym dostajemy

$$L\{f\}(s) = L\{Dh\} = sH(s) = s \cdot \frac{1}{s}F(s) = F(s)$$

co kończy dowód. ■

8.2.1 Przykłady transformaty Laplace'a dystrybucji

P r z y k ł a d 1

$T = \delta$. Ponieważ $\delta = D^2h(t)$, gdzie $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$ spełnia 1 i 2, więc

$$L\{\delta\}(s) = s^2L\{h(t)\}(s) = s^2 \frac{1}{s^2} = 1$$

(funkcja stała nie należy do przestrzeni obrazów klasycznej transformaty Laplace'a).

P r z y k ł a d 2

$T = \delta^{(n)}$. Ponieważ $\delta^{(n)} = D^{n+2}h(t)$, więc

$$L\{\delta^{(n)}\}(s) = s^{n+2} \frac{1}{s^2} = s^n \text{ (wielomian).}$$

P r z y k ł a d 3

$T = \delta(t-a)$, gdzie $\langle \delta(t-a), \varphi \rangle := \varphi(a)$. Ponieważ $\delta(t-a) = D^2h(t-a)$, więc na mocy własności klasycznej transformaty (tw. o przesunięciu) otrzymujemy

$$L\{\delta(t-a)\}(s) = s^2 e^{-as} \frac{1}{s^2} = e^{-as}$$

8.2.2 Najważniejsze własności L-transformaty dystrybucji

Założmy, że $T \in D'_0$ tzn. $T = D^k h(t)$, $h(t)$ spełnia warunki 1 i 2 oraz

$$L\{T\}(s) = s^k L\{h\}(s) = s^k H(s) = F(s)$$

Definicja

Niech $b \in \mathbb{R}$. Wówczas operator przesunięcia τ_b określony na funkcjach próbnych równością $\tau_b \varphi(t) = \varphi(t - b)$ definiujemy w przestrzeni dystrybucji jako

$$\langle \tau_b T | \varphi \rangle = \langle T | \varphi(t + b) \rangle$$

„Uzasadnieniem” tej definicji jest następująca równość dla funkcji lokalnie całkowalnych

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - b) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t + b) dt.$$

Przykładowo, $\langle \tau_b \delta | \varphi \rangle = \langle \delta | \varphi(t + b) \rangle = \varphi(b)$ - por. przykład 3.

Twierdzenie (o przesunięciu)

Dla każdego $b > 0$ prawdziwy jest wzór

$$L\{\tau_b T\}(s) = e^{-bs} F(s).$$

Dla dowodu zauważmy, że

$$\begin{aligned} \langle \tau_b T | \varphi(t) \rangle &= \langle D^k h(t) | \varphi(t + b) \rangle = (-1)^k \langle h(t) | \varphi^{(k)}(t + b) \rangle = \\ &= (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \varphi^{(k)}(t + b) dt = \\ &= (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - b) \varphi^{(k)}(t) dt = \langle D^k h(t - b) | \varphi \rangle \end{aligned}$$

co oznacza, że $\tau_b T = D^k h(t - b)$. Zatem

$$L\{\tau_b T\}(s) = L\{D^k h(t - b)\}(s) = s^k e^{-bs} H(s) = e^{-bs} F(s).$$

■

Analogicznie do operatora przesunięcia wprowadzamy w przestrzeni dystrybucji operację mnożenia dystrybucji przez funkcję klasy C^∞ . Ponieważ dla f - lokalnie całkowalnych, $\varphi \in D$, $\psi \in C^\infty$ zachodzi oczywisty wzór

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t) \psi(t)) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) (\psi(t) \varphi(t)) dt,$$

więc w naturalny sposób wprowadzamy następującą definicję mnożenia dystrybucji $T \in D'$ przez funkcję $\psi \in C^\infty$.

Definicja (mnożenia dystrybucji przez funkcje klasy C^∞)
 $\langle T\psi|\varphi \rangle := \langle T|\psi\varphi \rangle$.

Twierdzenie (przesunięcie w dziedzinie zespolonej)
 Jeżeli $T \in D'_0$, $\alpha \in C$, to zachodzi wzór

$$L \{e^{-\alpha t} T\} (s) = F (s + \alpha)$$

Dla dowodu skorzystamy ze wzoru Leibniza na pochodną iloczynu funkcji. Niech $T = D^k h$. Wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned} \langle e^{-\alpha t} T|\varphi \rangle &= \langle T|e^{-\alpha t} \varphi \rangle = \langle D^k h|e^{-\alpha t} \varphi \rangle = (-1)^k \left\langle h \left| \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-\alpha)^i e^{-\alpha t} D^{k-i} \varphi \right. \right\rangle = \\ &= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-\alpha)^i \underbrace{\langle h|e^{-\alpha t} \varphi^{(k-i)} \rangle}_{\langle h e^{-\alpha t}|\varphi^{(k-i)} \rangle} = \\ &= (-1)^k \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-\alpha)^i (-1)^{k-i} \langle D^{k-i} (h(t) e^{-\alpha t})|\varphi \rangle = \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^i \langle D^{k-i} (h(t) e^{-\alpha t})|\varphi \rangle. \end{aligned}$$

W takim razie $e^{-\alpha t} T = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^i D^{k-i} (h(t) e^{-\alpha t})$, a więc

$$L \{e^{-\alpha t} T\} (s) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \alpha^i s^{k-i} H (s + \alpha) = H (s + \alpha) (s + \alpha)^k = F (s + \alpha)$$

co kończy dowód. ■

Twierdzenie (o transformacie pochodnej)
 Jeśli $T \in D'_0$, $n \in N$, to prawdziwy jest wzór

$$L \{D^n T\} (s) = s^n F (s).$$

Niech $T = D^k h(t)$, zatem $D^n T = D^{n+k} h(t)$. Stąd

$$L \{D^n T\} (s) = L \{D^{n+k} h\} (s) = s^{n+k} H (s) = s^n F (s).$$

co kończy dowód. ■

U w a g a

Powyższy wzór różni się pozornie od sformułowania klasycznego. W sformułowaniu klasycznym prawdziwy jest wzór

$$L \{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - f(0^+) s^{n-1} - f'(0^+) s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(0^+). \quad (8.5)$$

Występująca między obydwojma przypadkami różnica jest jednak tylko pozorna. Jeżeli oznaczymy przez $[f]$ dystrybucję generowaną przez funkcję f (równą 0 dla $t < 0$), to łatwo pokazać przez indukcję względem n , że pochodna w sensie dystrybucyjnym $D^n[f]$ może być wyznaczona jako

$$D^n[f] = [f^{(n)}] + f^{(n-1)}(0^+) \delta + \dots + f(0^+) \delta^{(n-1)}. \quad (8.6)$$

Najpierw obliczamy dla $n = 1$ jak następuje

$$\begin{aligned} \langle Df|\varphi \rangle &= -\langle f|\varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt = -\int_{-\infty}^0 \underbrace{f(t)}_0 \varphi'(t) dt - \int_0^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \\ &= -f(t) \varphi(t) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = f(0^+) \underbrace{\langle \delta|\varphi \rangle}_{\varphi(0)} + \langle f'|\varphi \rangle, \end{aligned}$$

tzn. $D[f] = [f'] + f(0^+) \delta$. Stąd dalej łatwo przez indukcję uzyskać wzór (8.6) dla dowolnego n . Stosując do wzoru (8.6) twierdzenie o transformacie pochodnej (w sensie dystrybucyjnym) otrzymujemy

$$s^n L\{f\}(s) = L\{f^{(n)}\}(s) + f^{(n-1)}(0^+) + \dots + f(0^+) s^{n-1},$$

który jest równoważny wzorowi klasycznemu (8.5). ■

T w i e r d z e n i e (o różniczkowaniu transformaty)

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwy jest wzór

$$L\{(-t)^n T\}(s) = F^{(n)}(s).$$

Widać, że wystarczy przeprowadzić dowód w przypadku $n = 1$ (dalej natychmiast przez indukcję). Niech $F(s) = s^k H(s)$. Stąd $F'(s) = k s^{k-1} H(s) + s^k H'(s)$. Ponieważ na mocy własności klasycznej transformaty Laplace'a $L\{(-t)h(t)\} = H'(s)$, więc

$$L\{k D^{k-1} h(t) + D^k [(-t)h(t)]\}(s) = F'(s).$$

Stosując wzór Leibniza do wyrażenia $D^k [(-t)h(t)]$ mamy

$$D^k [(-t)h(t)] = -\binom{k}{0} t D^k h(t) - \binom{k}{1} 1 \cdot D^{k-1} h(t) = -t D^k h(t) - k D^{k-1} h(t)$$

zatem

$$F'(s) = L\{k D^{k-1} h(t) - t D^k h(t) - k D^{k-1} h(t)\}(s) = L\{(-t) D^k h(t)\} = L\{(-t) T\}$$

co kończy dowód. ■

8.3 Zadania

1. Niech T będzie funkcjonałem określonym następująco

$$\langle T|\varphi \rangle := \int_0^1 \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \quad \text{dla } \varphi \in D.$$

Pokazać, że: a) $T \in D'$, b) $T = D[1_+(t) \ln t]$.

2. Niech T będzie funkcjonałem określonym następująco

$$\langle T|\varphi \rangle := -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t\sqrt{t}} dt \quad \text{dla } \varphi \in D.$$

Pokazać, że a) $T \in D'$, b) $T = D[1_+(t) t^{-\frac{1}{2}}]$.

3. Obliczyć pochodne dystrybucyjne do rzędu trzeciego włącznie funkcji $f(t) = |\sin t|$.
 4. Obliczyć pochodne dystrybucyjne do rzędu trzeciego włącznie funkcji $f(t) = |t| \sin t$.
 5. Obliczyć pochodne dystrybucyjne do rzędu trzeciego włącznie funkcji $f(t) = |t \sin t|$.
 6. Wiedząc, że $L\{J_0(t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s) = \sqrt{s^2 + \alpha^2}$.
 7. Pokazać, że w przestrzeni dystrybucji D'_0 prawdziwa jest równość

$$t^k \delta^{(k)} = (-1)^k k! \delta.$$

8. Pokazać, że w przestrzeni dystrybucji D'_0 prawdziwa jest równość

$$(\sin at) \delta^{(1)} = -a\delta.$$

9. Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$D^3 y + 3D^2 y + 3Dy + y = \delta^{(4)}(t-1).$$

10. Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$tDy + 2y = 0.$$

11. Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$t^2 D^2 y + 4tDy + 2y = \delta.$$

12. Przedyskutować szeregowy układ RLC w przypadku impulsu wejściowego $U(t) = U_0 \cdot 1_+(t)$.

Temat 9

Dystrybucje, wiadomości wstępne (II)

9.1 Splot dystrybucji z przestrzeni D'_0

Definicja

Niech $T_1 = D^{k_1}h_1$, $T_2 = D^{k_2}h_2 \in D'_0$. Wówczas określamy splot

$$T_1 * T_2 = D^{k_1+k_2} [h_1 * h_2]$$

Powyższa definicja jest poprawna, ponieważ splot funkcji ciągłych prawostronnych h_1 i h_2 jest funkcją ciągłą prawostronną posiadającą transformatę Laplace'a (tw. Borela), zatem $T_1 * T_2 \in D'_0$. W przypadku, gdy T_1 i T_2 są generowane przez funkcje lokalnie całkowalne f_1 i f_2 , to powyższa definicja jest równoważna definicji klasycznej.

Istotnie, w tym przypadku niech $h_1 = f_1 * 1$, $h_2 = f_2 * 1$, tzn. $T_1 = Dh_1$, $T_2 = Dh_2$. Wtedy zgodnie z powyższą definicją

$$T_1 * T_2 = D^2 [f_1 * 1 * f_2 * 1] = D^2 [(f_1 * f_2 * 1) * 1] = D [(f_1 * f_2) * 1] = f_1 * f_2.$$

Twierdzenie (Borela dla dystrybucji)

Niech $T_1, T_2 \in D'_0$ mają transformaty Laplace'a równe odpowiednio $F_1(s)$, $F_2(s)$. Wówczas

$$L \{T_1 * T_2\} (s) = F_1(s) F_2(s)$$

Dla dowodu niech $T_1 = D^{k_1}h_1$, $T_2 = D^{k_2}h_2$. Wtedy

$$\begin{aligned} L \{T_1 * T_2\} (s) &= L \{D^{k_1+k_2} [h_1 * h_2]\} (s) = s^{k_1+k_2} L \{h_1 * h_2\} \stackrel{\text{tw. Borela}}{=} s^{k_1+k_2} H_1(s) H_2(s) = \\ &= \underbrace{s^{k_1} H_1(s)}_{F_1(s)} \underbrace{s^{k_2} H_2(s)}_{F_2(s)} = F_1(s) F_2(s) \end{aligned}$$

■

9.1.1 Własności spłotu dystrybucji

Omówimy teraz najważniejsze własności spłotu dystrybucji, związane z różniczkowaniem i dystrybucją δ Diraca.

W ł a s n o ś ć 1 (*splot z dystrybucją δ*)

Ponieważ $\delta = D^2[1 * 1]$, zatem dla dowolnej dystrybucji $T \in D'_0$ zachodzi

$$T * \delta = D^{k+2}[h * 1 * 1] = D^{k+1}[h * 1] = D[h] = T \quad (9.1)$$

co oznacza, że δ jest jedyką algebry dystrybucji. ■

W ł a s n o ś ć 2 (*splot z dystrybucją $\delta^{(n)}$*)

Podobnie jak w poprzednim przypadku zapisujemy $\delta^{(n)} = D^{n+2}[1 * 1]$, więc

$$T * \delta^{(n)} = D^{k+n+2}[h * 1 * 1] = D^n D^k h = D^n T, \quad (9.2)$$

zatem splot z dystrybucją $\delta^{(n)}$ jest różniczkowaniem. Pozwala to zapisać równanie różniczkowe w przestrzeni dystrybucji

$$c_n D^n y + c_{n-1} D^{n-1} y + \dots + c_1 D y + c_0 y = f \quad (9.3)$$

w równoważnej postaci spłotowej

$$(c_n \delta^{(n)} + c_{n-1} \delta^{(n-1)} + \dots + c_1 \delta' + c_0 \delta) * y = f. \quad (9.4)$$

■

W ł a s n o ś ć 3 (*różniczkowanie dystrybucyjne spłotu*)

Jeżeli $T_1, T_2 \in D'_0$, to wykorzystując własność 2 możemy napisać

$$D^m (T_1 * T_2) = T_1 * T_2 * \delta^{(m)} = \underbrace{(T_1 * \delta^{(m)})}_{D^m T_1} * T_2 = T_1 * \underbrace{(T_2 * \delta^{(m)})}_{D^m T_2}$$

co oznacza, że

$$D^m (T_1 * T_2) = (D^m T_1) * T_2 = T_1 * (D^m T_2). \quad (9.5)$$

■

W ł a s n o ś ć 4 (*własność rozwiązania podstawowego*)

Jeżeli y_δ jest taką dystrybucją, że $L[y_\delta] = \delta$, gdzie L jest operatorem różniczkowym określonym wzorem

$$L[y] = c_n D^n y + c_{n-1} D^{n-1} y + \dots + c_1 D y + c_0 y,$$

to na mocy wzorów (9.5) i (9.1) możemy napisać, że

$$L[y_\delta * f] = L[y_\delta] * f = \delta * f = f. \quad (9.6)$$

Dystrybucję y_δ taką, że $L[y_\delta] = \delta$ nazywamy *rozwiązaniem podstawowym* równania $L[y] = f$. ■

9.2 Przestrzeń dystrybucji temperowanych

Definicja

Przestrzenią *funkcji szybko malejących* nazywamy zbiór funkcji klasy C^∞ spełniających dla $|t| \rightarrow \infty$, dowolnych n, k naturalnych, nierówności

$$|t^n \varphi^{(k)}| \leq c_{n,k} \quad (9.7)$$

dla pewnych stałych $c_{n,k}$ (zależnych tylko od n i k). Przestrzeń funkcji szybko malejących oznaczamy symbolem Φ .

Powyższy warunek oznacza, że dowolna pochodna funkcji φ dąży do zera w nieskończoności szybciej niż dowolna potęga $\frac{1}{|t|}$.

Uwaga

Zachodzi oczywista inkluzja $D \subset \Phi$, bowiem każda funkcja o nośniku zwartym jest szybko malejąca. Co więcej, rozważając przykład funkcji $\varphi(t) = e^{-t^2} \in \Phi$ łatwo zauważyć, że $\varphi \notin D$, zatem $D \subsetneq \Phi$. ■

Definicja

Mówimy, że ciąg funkcji $\varphi_n \in \Phi$ zbiega do $\varphi \in \Phi \Leftrightarrow \forall m, k \in \mathbb{N} \Rightarrow t^m \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows t^m \varphi^{(k)}$ (zb. jednostajna)

Definicja

Dystrybucją wolnorosnącą (temperowaną) nazywamy funkcjonal liniowy i ciągły na przestrzeni Φ . Zbiór dystrybucji wolnorosnących oznaczamy Φ' .

Uwaga

Oczywiście jeżeli $f \in \Phi'$, to $f \in D'$, zatem $\Phi' \subset D'$. Rozważając przykład dystrybucji określonej wzorem

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{n^2} \delta(t-n) \quad \text{tzn} \quad \langle f | \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{n^2} \varphi(n) \quad (9.8)$$

widać, że jest ona poprawnie zdefiniowana dla $\varphi \in D$ (odpowiednia suma jest skończona, bowiem nośnik φ jest zwarty), natomiast nie jest określona np. dla $\varphi(t) = e^{-t^2} \in \Phi$ (otrzymujemy nieskończony szereg rozbieżny $\sum 1$). W takim razie $\Phi' \subsetneq D'$. ■

Przyjęcie powyższej definicji dystrybucji temperowanej jest uzasadnione tym, że w przypadku funkcji klasycznych (dystrybucji regularnych) dla uzyskania zbieżności całki postaci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi(t) dt,$$

gdzie $\varphi \in \Phi$ należy np. założyć, że dla pewnego N zachodzi warunek $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{-N} f(t) = 0$. Funkcje takie nazywamy *wolnorosnącymi*. Każda wolnorosnąca funkcja wyznacza dystrybucję wolnorosnącą.

9.2.1 Transformata Fouriera dystrybucji temperowanych

W teorii przekształcenia Fouriera dowodzi się następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e (równość Parsewala)

Niech g_1, g_2 będą bezwzględnie całkowalne na R . Niech $G_1 = \mathfrak{F}g_1, G_2 = \mathfrak{F}g_2$. Wówczas zachodzi równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u) G_2(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\omega) g_2(\omega) d\omega \quad (9.9)$$

Przekształcając lewą stronę wzoru (9.9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u) G_2(u) du &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u) du \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\omega) e^{-iu\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u) g_2(\omega) e^{-iu\omega} du = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\omega} g_1(u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\omega) g_2(\omega) d\omega \end{aligned}$$

co kończy dowód. ■

Opierając się na powyższym twierdzeniu obowiązującym dla funkcji klasycznych (dystrybucji regularnych) wprowadzamy definicję transformaty Fouriera dystrybucji temperowanych.

D e f i n i c j a

Dla $f \in \Phi'$ określamy

$$\langle \mathfrak{F}f | \varphi \rangle = \langle f | \mathfrak{F}\varphi \rangle \quad (9.10)$$

dla $\varphi \in \Phi$.

Następujące dwa twierdzenia uzasadniają poprawność przyjętej definicji.

T w i e r d z e n i e

Jeśli $\varphi \in \Phi$, to $F = \mathfrak{F}\varphi \in \Phi$. Ponadto $\mathfrak{F} : \Phi \rightarrow \Phi$ jest ciągła.

Dla dowodu zauważmy, że jeśli $\varphi \in \Phi$, to φ jest całkowalna na R , zatem $F = \mathfrak{F}\varphi$ istnieje. Ze wzorów na transformatę Fouriera funkcji całkowalnych wynika, że o ile $t^k \varphi(t)$ jest całkowalna (a tak jest dla funkcji $\varphi \in \Phi$), to istnieje pochodna $F^{(k)}$ i zachodzi

$$F^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k e^{-i\omega t} \varphi(t) dt$$

Łatwo zauważyć, że stosując m -krotnie wzór na całkowanie przez części otrzymujemy

$$|(i\omega)^m F^{(k)}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \frac{d^m}{dt^m} [(-it)^k \varphi(t)] dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d^m}{dt^m} [(-it)^k \varphi(t)] \right| dt \leq Const$$

Istnienie stałej $Const$ wynika z definicji przestrzeni Φ , której elementem jest φ . Oznacza to, że $F = \mathfrak{S}\varphi$ jest także funkcją szybko malejącą. Ciągłość \mathfrak{S} jako odwzorowania liniowego wynika z ciągłości w zerze. ■

T w i e r d z e n i e

Jeśli $f \in \Phi'$, to jej transformata Fouriera $\mathfrak{S}f \in \Phi'$.

Wystarczy wykazać, że $\mathfrak{S}f$ jest liniowa i ciągła. Liniowość jest oczywista - wynika wprost z przyjętej definicji. Ciągłość wynika z ciągłości transformaty Fouriera dla funkcji szybko malejących i ciągłości f , ponieważ o ile $\varphi_n \rightarrow 0$ w Φ , to

$$\langle \mathfrak{S}f | \varphi_n \rangle = \langle f | \mathfrak{S}\varphi_n \rangle \rightarrow \langle f | 0 \rangle = 0$$

co kończy dowód. ■

9.2.2 Najważniejsze własności i przykłady transformat Fouriera

Niech $F = \mathfrak{S}f$ dla $f \in \Phi'$. Wówczas można sformułować następujące własności - analogiczne do wzorów z teorii klasycznej.

1. $\mathfrak{S} \left[(-it)^k f(t) \right] = F^{(k)}(\omega)$.

Istotnie, korzystając z definicji transformaty i definicji mnożenia dystrybucji przez funkcje gładkie otrzymujemy dla $k = 1$ (a potem dalej stosujemy indukcję)

$$\begin{aligned} \langle F' | \varphi \rangle &= \langle F | -\varphi' \rangle = \langle f | -\mathfrak{S}\varphi' \rangle = \left\langle f \left| - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \varphi'(\omega) d\omega \right. \right\rangle = \text{(całk. przez części)} \\ &= \left\langle f \left| -it \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \varphi(\omega) d\omega \right. \right\rangle = \langle -it f(t) | \mathfrak{S}\varphi \rangle = \langle \mathfrak{S}[-it f(t)] | \varphi \rangle \end{aligned}$$

zatem $\mathfrak{S}[-it f(t)] = F'$.

2. $\mathfrak{S}[D^k f] = (i\omega)^k F(\omega)$ - dowód podobnie jak w poprzednim przypadku.

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{S}D^k f | \varphi \rangle &= \langle D^k f | \mathfrak{S}\varphi \rangle = (-1)^k \left\langle f \left| \frac{d^k}{d\omega^k} \mathfrak{S}\varphi \right. \right\rangle = (-1)^k \left\langle f | \mathfrak{S} \left[(-it)^k \varphi(t) \right] \right\rangle = \\ &= \left\langle \mathfrak{S}f | (it)^k \varphi(t) \right\rangle = \left\langle (it)^k F(t) | \varphi(t) \right\rangle. \end{aligned}$$

3. $\mathfrak{S}[f(t - \tau)](\omega) = e^{-i\omega\tau} F(\omega)$ - analogicznie z definicji operatora przesunięcia τ_b .

4. Niech $f = \delta^{(k)}(t - \tau)$. Wówczas

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{S}\delta^{(k)}(t - \tau) | \varphi \rangle &= \langle \delta^{(k)}(t - \tau) | \mathfrak{S}\varphi \rangle = (-1)^k (\mathfrak{S}\varphi)^{(k)}(\tau) = \\ &= (-1)^k \mathfrak{S} \left[(-it)^k \varphi(t) \right](\tau) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^k e^{-it\tau} \varphi(t) dt = \left\langle (it)^k e^{-it\tau} | \varphi(t) \right\rangle, \text{ zatem} \\ \mathfrak{S}\delta^{(k)}(t - \tau) &= (it)^k e^{-it\tau}. \end{aligned}$$

Wynika stąd, że w szczególności

$$\mathfrak{S}\delta = 1, \quad \mathfrak{S}\delta(t - \tau) = e^{-i\omega\tau}, \quad \mathfrak{S}\delta^{(k)} = (it)^k.$$

5. Jeśli $f(t) = 1$, to $\mathfrak{S}[1] = 2\pi\delta$, ponieważ

$$\langle \mathfrak{S}[1] | \varphi \rangle = \langle 1 | \mathfrak{S}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t) dt = 2\pi\varphi(0) = \langle 2\pi\delta | \varphi \rangle.$$

6. $\mathfrak{S}[e^{-it\tau}] = 2\pi\delta(\omega + \tau)$ - dowód analogiczny jak w przypadku poprzednim gdyż

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{S}[e^{-it\tau}] | \varphi \rangle &= \langle e^{-it\tau} | \mathfrak{S}\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} dt \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} \varphi(\omega) d\omega}_{\mathfrak{S}[\varphi](t)} = 2\pi\varphi(-\tau) = \\ &= \langle 2\pi\delta(\omega + \tau) | \varphi \rangle. \end{aligned}$$

7. $\mathfrak{S}[(it)^k] = (-1)^k 2\pi\delta^{(k)} \implies \mathfrak{S}[t^k] = 2\pi(i)^k \delta^{(k)}$ - analogicznie.

8. $\mathfrak{S}[(it)^k e^{-it\tau}] = (-1)^k 2\pi\delta^{(k)}(\omega + \tau)$ - j. w.

9. $\mathfrak{S}[a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0] = 2\pi[a_n i^n \delta^{(n)} + a_{n-1} i^{n-1} \delta^{(n-1)} + \dots + a_0 \delta]$.

10. Lemat

Zachodzi tożsamość

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - 2n\pi). \quad (9.11)$$

Dowód

Niech $\varphi \in \Phi$. Wówczas

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} | \varphi(\lambda) \right\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-in\lambda} \varphi(\lambda) d\lambda = \\ &= \left| \begin{array}{l} \lambda - 2k\pi = r \\ d\lambda = dr \end{array} \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in(r+2k\pi)} \varphi(r+2k\pi) dr = \\ &= |\text{niech } \varphi_k(r) = \varphi(r+2k\pi)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-in2k\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inr} \varphi_k(r) dr = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k), \end{aligned}$$

gdzie $c_n(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inr} \varphi_k(r) dr$ są współczynnikami Fouriera funkcji φ_k . Wyrażenie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n$ jest wartością sumy szeregu Fouriera tej funkcji w punkcie $r_k = -2k\pi$, a zatem z okresowości

tej sumy mamy

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k) = \varphi_k(-2k\pi) = \varphi_k(0) = \varphi(2k\pi).$$

Wynika stąd, że

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2k\pi) = \left\langle 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - 2k\pi) | \varphi \right\rangle$$

co kończy dowód. ■

11. (Wzór sumacyjny Poissona)

Niech $\varphi \in \Phi$, $F = \mathfrak{S}\varphi$. Wówczas zachodzi

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - n) | \mathfrak{S}\varphi \right\rangle = \left\langle \mathfrak{S} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - n) \right] | \varphi \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} | \varphi \right\rangle \stackrel{\text{(z lematu)}}{=} 2\pi \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - 2n\pi) | \varphi \right\rangle = \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2n\pi). \end{aligned}$$

Udowodniony został zatem wzór

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2n\pi). \quad (9.12)$$

12. (Tożsamość Jacobiego)

Niech $\varphi(x) = e^{-tx^2}$ dla $t > 0$. Wtedy $F(x) = (\mathfrak{S}\varphi)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Stosując wzór sumacyjny Poissona otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{4t}} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-4t\pi^2 n^2}.$$

Podstawiając $t = \frac{\tau}{4\pi^2}$ dostajemy inną postać tej tożsamości

$$\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\tau n^2}. \quad (9.13)$$

9.3 Zadania

1. Udowodnić, że $[t \cdot 1_+(t)] * [e^t \cdot 1_+(t)] = (e^t - t - 1) \cdot 1_+(t)$.
2. Udowodnić, że $[1_+(t) \cdot \sin t] * [1_+(t) \cdot \cos t] = \frac{1}{2} 1_+(t) \cdot t \sin t$.
3. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = 1_+(t-a) - 1_+(t-b)$ dla $a < b$.
4. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = e^{-a|t|}$ dla $a > 0$.

5. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = t^k e^{-at} \mathbf{1}_+(t)$.
6. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ dla $a \in \mathbb{R}$.
7. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = e^{-at^2}$.

Temat 10

Informacja o przestrzeniach Hilberta

10.1 Przestrzenie unitarne, iloczyn skalarny

Niech dana będzie przestrzeń liniowa X . Załóżmy, że każdej parze elementów $x, y \in X$ została przyporządkowana liczba $(x, y) \in \mathbb{C}$ (lub \mathbb{R}), przy czym przyporządkowanie to spełnia warunki:

$$1^\circ (x, y) = \overline{(y, x)},$$

$$2^\circ (x + y, z) = (x, z) + (y, z),$$

$$3^\circ (\alpha x, y) = \alpha (x, y),$$

$$4^\circ (x, x) > 0 \text{ dla } x \neq 0, (0, 0) = 0.$$

Liczbę (x, y) nazywamy *iloczynem skalarnym* elementów x, y .

Warunki $1^\circ - 4^\circ$ są aksjomatami iloczynu skalarnego.

U w a g a

Prawdziwe są także wzory:

$$\text{a) } (z, x + y) = (z, x) + (z, y),$$

$$\text{b) } (x, \alpha y) = \bar{\alpha} (x, y).$$

Wynikają one bezpośrednio z aksjomatów iloczynu skalarnego. ■

T w i e r d z e n i e (tzw. nierówność Schwarz)

Iloczyn skalarny spełnia nierówność

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x) (y, y). \tag{10.1}$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ i dowolnego elementu $y \neq 0$ zachodzi nierówność $(x + ty, x + ty) \geq 0$. Z aksjomatów iloczynu skalarnego wynika, że

$$(x + ty, x + ty) = (x, x) + \bar{t} (x, y) + t \overline{(x, y)} + |t|^2 (y, y) \geq 0.$$

Podstawiając

$$t = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$$

do powyższej nierówności otrzymujemy ostatecznie

$$(x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)} \geq 0$$

co jest równoważne nierówności (10.1), a zatem kończy dowód. ■

U w a g a 1

Można pokazać, że nierówność Schwarz'a (10.1) staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy elementy x i y są liniowo zależne.

U w a g a 2

Jeżeli (x, y) jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej X , to wzór

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \tag{10.2}$$

określa normę w przestrzeni X .

Z definicji normy, aksjomatów iloczynu skalarnego i nierówności Schwarz'a wynika, że

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leq \\ &\leq (x, x) + 2|(x, y)| + (y, y) \leq (x, x) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)} + (y, y) = \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

oraz

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x, \alpha x)} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} (x, x)} = |\alpha| \|x\|$$

co kończy dowód. ■

D e f i n i c j a

Zbiór X nazywamy *przestrzenią unitarną*, jeżeli:

- 1° X jest przestrzenią liniową,
- 2° w X określony jest iloczyn skalarny (x, y) ,
- 3° w X zdefiniowana jest norma wzorem (10.2).

D e f i n i c j a

X jest *przestrzenią Hilberta* wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią unitarną zupełną (zupełność oznacza, że każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu ma granicę należącą do tej przestrzeni).

10.2 Przykłady przestrzeni Hilberta

10.2.1 Przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa rzeczywista lub zespolona

Niech $X = \mathbb{R}^n$ lub $X = \mathbb{C}^n$ i niech $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X$.

Iloczyn skalarny definiujemy jako

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i. \quad (10.3)$$

Wtedy

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}. \quad (10.4)$$

Nierówność Schwarz (10.1) przybiera równoważną postać

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n |y_i|^2} \quad (10.5)$$

i znana jest pod nazwą *nierówności Cauchy'ego*.

Zupełność przestrzeni \mathbb{R}^n (lub \mathbb{C}^n) wynika z zupełności zbioru liczb rzeczywistych i zespolonych.

10.2.2 Przestrzeń ciągów sumowalnych z kwadratem

Niech $X = l^2$ będzie przestrzenią ciągów rzeczywistych lub zespolonych (ξ_k) takich, że

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^2 < \infty,$$

ze zwykłymi działaniami dodawania ciągów po współrzędnych i mnożenia przez liczbę.

Iloczyn skalarny ciągów $x = (\xi_k)$ i $y = (\eta_k)$ definiujemy jako

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \bar{\eta}_k. \quad (10.6)$$

Poprawność powyższej definicji wynika z oszacowania $|\xi_k \bar{\eta}_k| \leq \frac{1}{2} (|\xi_k|^2 + |\eta_k|^2)$.

Z definicji normy wynika, że

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^2}. \quad (10.7)$$

Nierówność Schwarz przybiera postać

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \bar{\eta}_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |\eta_k|^2} \quad (10.8)$$

(jest to tzw. *nierówność Cauchy'ego dla szeregów*).

Dowodzi się, że przestrzeń $X = l^2$ jest zupełna.

10.2.3 Przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem

Niech $X = L^2(\Omega)$ będzie przestrzenią funkcji $f(x)$ określonych na zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach rzeczywistych lub zespolonych takich, że

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Zakładamy, że $|\Omega| > 0$, gdzie $|\Omega|$ oznacza miarę zbioru Ω . W przestrzeni $L^2(\Omega)$ wprowadzamy zwykle działania dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczby.

Iloczyn skalarny definiujemy jako

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (10.9)$$

Jego istnienie wynika z nierówności $\left| \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \frac{1}{2} (|f(x)|^2 + |g(x)|^2)$.

Normę definiujemy następująco

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}. \quad (10.10)$$

Nierówność Schwarz'a jest postaci

$$\left| \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx} \sqrt{\int_{\Omega} |g(x)|^2 dx} \quad (10.11)$$

i znana jest pod nazwą *nierówności Buniakowskiego dla całek*.

Można dowieść, że przestrzeń $L^2(\Omega)$ jest zupełna.

Zbieżność w przestrzeni $L^2(\Omega)$ nie jest równoważna zbieżności punktowej, ale prawdziwe jest następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e

Jeśli $f_n \rightarrow f_0$ w $L^2(\Omega)$ i $f_n(x) \rightarrow f(x)$ prawie wszędzie na Ω , to $f \in L^2(\Omega)$ i $f = f_0$.

10.3 Ortogonalność, twierdzenie o rzucie ortogonalnym

Niech X będzie przestrzenią unitarną.

D e f i n i c j a

Elementy $x, y \in X$ są *ortogonalne* wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, y) = 0$ (oznaczamy $x \perp y$).

U w a g a

Jeśli $x \perp y$, to

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (tw. Pitagorasa). \quad (10.12)$$

Z definicji normy i ortogonalności elementów x, y wynika, że

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = \\ &= (x, x) + (y, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.\end{aligned}$$

■

Niech $X_0 \subset X$ będzie podprzestrzenią liniową X .

Definicja

Mówimy, że element $x \in X$ jest *ortogonalny do podprzestrzeni* X_0 (oznaczamy $x \perp X_0$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu $y \in X_0$ zachodzi $x \perp y$.

Twierdzenie (o rzucie ortogonalnym)

Niech X_0 będzie podprzestrzenią liniową domkniętą przestrzeni Hilberta X . Wtedy każdy element $x \in X$ da się przedstawić w postaci

$$x = x_0 + z, \text{ gdzie } x_0 \in X_0, z \perp X_0 \quad (10.13)$$

przy czym rozkład ten jest jednoznaczny.

Element x_0 nazywa się *rzutem ortogonalnym* elementu x na podprzestrzeń X_0 .

■

Można udowodnić, że z twierdzenia o rzucie ortogonalnym wynika następujący wniosek.

Twierdzenie

Niech $X_0 \subset X$ będzie podprzestrzenią liniową domkniętą przestrzeni Hilberta X . Jeżeli x_0 jest rzutem ortogonalnym elementu x na X_0 , to

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\| \quad (10.14)$$

dla każdego $y \in X_0$. Powyższa nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $y = x_0$.

■

Definicja

Mówimy, że ciąg (a_n) elementów przestrzeni Hilberta X *generuje przestrzeń* X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów a_1, a_2, \dots, a_n jest gęsty w X (tzn. każdy element przestrzeni X może być przybliżony z dowolną dokładnością przez kombinację liniową elementów a_1, a_2, \dots, a_n .)

Twierdzenie

Ciąg (a_n) elementów przestrzeni Hilberta X generuje przestrzeń X wtedy i tylko wtedy, gdy jedynym elementem ortogonalnym do wszystkich elementów a_n jest $x = 0$.

■

10.4 Układy ortonormalne w przestrzeniach Hilberta

W teorii przestrzeni Hilberta wielką rolę odgrywają tzw. *układy ortogonalne* i *układy ortonormalne*. Pozwalają one znajdować rozwinięcia elementów przestrzeni Hilberta na szeregi względem tych układów.

Definicja

Układem ortogonalnym w przestrzeni Hilberta X nazywamy zbiór $Z \subset X$ taki, że dla każdego $x, y \in Z, x \neq y$ zachodzi $(x, y) = 0$.

Definicja

Układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X nazywamy układ ortogonalny $Z \subset X$ taki, że dla każdego $x \in Z$ zachodzi $\|x\| = 1$.

Twierdzenie

Niech (a_k) będzie dowolnym ciągiem liniowo niezależnych elementów przestrzeni Hilberta X . Istnieje wtedy w przestrzeni X układ ortonormalny (e_k) taki, że

$$\text{lin}(e_1, e_2, \dots, e_m) = \text{lin}(a_1, a_2, \dots, a_m) \quad \text{dla } m = 1, 2, \dots,$$

gdzie $\text{lin}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich kombinacji liniowych elementów x_1, x_2, \dots, x_k .

Dla dowodu wystarczy zastosować tzw. procedurę ortonormalizacji

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{a_1}{\|a_1\|}, \\ e_2 &= \frac{x_2}{\|x_2\|}, \quad \text{gdzie } x_2 = a_2 - (a_2, e_1) e_1 \\ e_m &= \frac{x_m}{\|x_m\|}, \quad \text{gdzie } x_m = a_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_m, e_k) e_k, \end{aligned} \tag{10.15}$$

z której bezpośrednio wynika, że (e_k) jest układem ortonormalnym spełniającym tezę twierdzenia. ■

10.4.1 Przykłady układów ortonormalnych

- Niech $X = l^2$ - zbiór ciągów nieskończonych (ξ_k) takich, że szereg $\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^2$ jest zbieżny,

$$\text{z iloczynem skalarnym } ((\xi_k), (\eta_k)) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \eta_k.$$

Wówczas elementy e_n , gdzie

$$e_n = (0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, \dots)$$

tworzą układ ortonormalny w X .

- Niech $X = L^2([0; 2\pi])$ (przestrzeń funkcji rzeczywistych całkowalnych z kwadratem).
Ciąg funkcji

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \tag{10.16}$$

tworzy układ ortonormalny w tej przestrzeni.

- Niech $X = L^2([0; 2\pi])$ (przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem).
Ciąg funkcji

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

tworzy układ ortonormalny w tej przestrzeni ($e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$).

10.5 Szeregi Fouriera względem układów ortonormalnych

Założmy teraz, że dane jest rozwinięcie elementu x z pewnej przestrzeni Hilberta X na szereg w postaci

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k, \quad (10.17)$$

gdzie (e_k) jest układem ortonormalnym w X .

Mnożąc obie strony równości (10.17) skalarnie przez e_n i korzystając z ortonormalności układu (e_k) otrzymujemy, że

$$\alpha_n = (x, e_n). \quad (10.18)$$

Definicja

Liczby $\alpha_n = (x, e_n)$ określone wzorem (10.18) nazywamy *współczynnikami Fouriera* elementu x względem układu ortonormalnego (e_n) , a szereg $\sum_{k=1}^{+\infty} (x, e_k) e_k$ nazywamy *szeregiem Fouriera* elementu x względem tego układu.

Twierdzenie

Jeśli (e_k) jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X , to dla każdego $x \in X$ szereg $\sum_{k=1}^{+\infty} |(x, e_k)|^2$ jest zbieżny i zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \quad (\text{tzw. nierówność Bessela}), \quad (10.19)$$

która staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \sum_{k=1}^{+\infty} (x, e_k) e_k$, tzn. gdy x jest równy sumie swojego szeregu Fouriera. ■

Twierdzenie

Jeśli (e_k) jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X , to dla każdego $x \in X$ i dowolnych stałych $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ zachodzi nierówność

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k \right\| \leq \left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|, \quad (10.20)$$

która oznacza, że n -ta suma częściowa szeregu Fouriera elementu x jest najlepszym możliwym przybliżeniem tego elementu w podprzestrzeni $\text{lin}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Dowód wynika z faktu, że $\sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k$ jest rzutem ortogonalnym elementu x na $\text{lin}(e_1, e_2, \dots, e_n)$. ■

Następne twierdzenie precyzuje warunki rozwijalności dowolnego elementu przestrzeni Hilberta X na szereg Fouriera względem układu ortonormalnego (e_k) .

T w i e r d z e n i e

Niech (e_k) będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X . Wówczas każdy element x jest sumą swojego szeregu Fouriera (10.17) wtedy i tylko wtedy, gdy układ (e_k) generuje całą przestrzeń X . ■

10.5.1 Trygonometryczne szeregi Fouriera

Rozważmy przestrzeń Hilberta $X = L^2([-l; l])$, $l > 0$. Można udowodnić, że układ funkcji

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \tag{10.21}$$

jest układem ortonormalnym w X , generującym całą przestrzeń (por. przykład 2 i wzory (10.16)).

Jeśli $f \in L^2([-l; l])$, to na mocy poprzedniego twierdzenia możemy napisać, że

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \tag{10.22}$$

gdzie

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \dots, \tag{10.23}$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \tag{10.24}$$

Zbieżność szeregu (10.22) w przestrzeni $L^2([-l; l])$ nie oznacza zbieżności w każdym punkcie $x \in [-l; l]$. Zgodnie z definicją normy, zbieżność w przestrzeni $L^2([-l; l])$ oznacza tylko, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-l}^l \left| f(x) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \right|^2 dx = 0. \tag{10.25}$$

W celu zagwarantowania zbieżności punktowej, należy założyć o funkcji danej pewne dodatkowe warunki.

10.5.2 Zbieżność punktowa trygonometrycznych szeregów Fouriera

Założmy, że dana jest funkcja rzeczywista $f(x)$ określona na przedziale $[-l; l]$. Przyjmujemy następującą definicję.

D e f i n i c j a

Mówimy, że funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $[-l; l]$ *warunki Dirichleta* wtedy i tylko wtedy, gdy:

- 1° $f(x)$ jest przedziałami monotoniczna;

2° w każdym punkcie $x_0 \in [-l; l]$, w którym funkcja nie jest ciągła spełniony jest warunek

$$f(x_0) = \frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-)),$$

gdzie $f(x_0^+)$ i $f(x_0^-)$ oznaczają odpowiednio granicę prawo i lewostronną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 ;

3° na końcach przedziału spełnione są warunki

$$f(-l) = f(l) = \frac{1}{2} (f(-l^+) + f(l^-)).$$

T w i e r d z e n i e (*Dirichleta*)

Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $[-l; l]$ warunki Dirichleta, to w każdym punkcie tego przedziału jest ona sumą swojego szeregu Fouriera (10.22). ■

10.6 Zadania

1. Zbadać, czy równość $(x, y) = xy + x + 2y + 1$ określa iloczyn skalarny w \mathbb{R} ?

2. Niech $X = L^2([0, 1])$ z normą $\|f\| = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$, $X_0 = \text{lin}(1, x) \subset X$. Zortonormalizować układ $\{1, x\}$ oraz wyznaczyć rzut ortogonalny elementu $f(x) = x^2$ na X_0 .

3. Niech $X = L^2([0, \pi])$ z normą $\|f\| = \sqrt{\int_0^\pi |f(x)|^2 dx}$, $X_0 = \text{lin}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sin x\right) \subset X$. Zortonormalizować układ $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sin x\right\}$ oraz wyznaczyć rzut ortogonalny elementu $f(x) = 1 + \frac{1}{2} \sin x$ na X_0 .

4. Znaleźć rzut ortogonalny w przestrzeni $X = L^2(-1; 1)$ funkcji $f(x) = 1 + \sin x$ na podprzestrzeń domkniętą $X_0 = \text{lin}(e_1, e_2)$, gdzie $e_1(x), e_2(x)$ są funkcjami otrzymanymi z ortonormalizacji układu funkcji $f_1(x) = 1, f_2(x) = 1 + x$.

5. Znaleźć rzut ortogonalny w przestrzeni $X = L^2(-1; 1)$ funkcji $f(x) = 1 + \cos x$ na podprzestrzeń domkniętą $X_0 = \text{lin}(e_1, e_2)$, gdzie $e_1(x), e_2(x)$ są funkcjami otrzymanymi z ortonormalizacji układu funkcji $f_1(x) = 1, f_2(x) = 1 - x$.

6. Funkcję $f(x) = 1 - 2x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi; +\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-\pi; +3\pi]$.

7. Funkcję $f(x) = 2 \cos^2 x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi; +\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-3\pi; +3\pi]$.

8. Funkcję $f(x) = 2 \sin^2 x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi; +\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-3\pi; +3\pi]$.

9. Funkcję $f(x) = 1 + 2 \sin 2x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi; +\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-3\pi; +3\pi]$.
10. Funkcję $f(x) = 1 + 2 \cos 2x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi; +\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-3\pi; +3\pi]$.
11. Funkcję $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi; +\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-2\pi; +2\pi]$.

Temat 11

Informacja o przestrzeniach Sobolewa

11.1 Definicja przestrzeni Sobolewa

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym. Rozważmy przestrzeń Hilberta $X = L^2(\Omega)$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym równością (10.9) i normą zdefiniowaną wzorem (10.10). W tej przestrzeni rozważamy podzbiór składający się z funkcji f , których pochodne cząstkowe w sensie dystrybucyjnym do rzędu m włącznie (patrz również wzory (8.1)-(8.3)) należą do $L^2(\Omega)$.

W podzbiornie takich funkcji wprowadzamy funkcjonał $\|f\|_{m,2}$ określony wzorem

$$\|f\|_{m,2} = \sqrt{\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_2^2}. \quad (11.1)$$

Można pokazać, że $\|f\|_{m,2}$ spełnia wszystkie aksjomaty normy.

D e f i n i c j a

Przestrzeń Sobolewa $H^m(\Omega)$ nazywamy zbiór

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega) \text{ dla } 0 \leq |\alpha| \leq m\}. \quad (11.2)$$

T w i e r d z e n i e

Przestrzeń $H^m(\Omega)$ jest zupełna, jest zatem przestrzenią Hilberta. Funkcjonał $\|f\|_{m,2}$ określa normę w $H^m(\Omega)$, zaś iloczyn skalarny zadany jest wzorem

$$(f, g) = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha f \overline{D^\alpha g} dx. \quad (11.3)$$

■

U w a g a

Powyższą definicję przestrzeni Sobolewa można rozszerzyć na przypadek przestrzeni $L^p(\Omega)$, w których norma zadana jest wzorem

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ dla } p > 1. \quad (11.4)$$

11.2 Ślady funkcji z przestrzeni Sobolewa na powierzchniach

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset \Omega$ będzie powierzchnią $(n-1)$ wymiarową. Jeśli f jest funkcją, która w każdym punkcie $x \in \Omega$ ma jednoznacznie określoną wartość, to wyznacza ona w sposób naturalny funkcję $f|_S := f(x)$ dla $x \in S$.

Jeśli natomiast funkcja f jest określona *prawie wszędzie* (tzn. z dokładnością do zbiorów miary zero), wtedy jej wartość na powierzchni S nie jest już wyznaczona w tak naturalny sposób, ponieważ $|S| = 0$, gdzie $|S|$ oznacza n -wymiarową miarę Lebesgue'a powierzchni S . Oznacza to, że nie można prostym, naturalnym sposobem określić funkcji $f|_S$ za pomocą rozważenia wyłącznie wartości tej funkcji w pewnych punktach.

Dla prostoty założmy teraz, że $S = \bar{\Omega} \cap \{x_n = \text{const}\}$. Wówczas można udowodnić, że dla prawie wszystkich x_n funkcja f (określona prawie wszędzie na Ω) posiada wartość $f|_S$ zdefiniowaną prawie wszędzie jako funkcję $(n-1)$ zmiennych.

Wprowadzimy teraz bardziej sformalizowaną definicję *ślada funkcji*. Rozpoczniemy od przypadku funkcji f ciągłej na $\bar{\Omega}$.

Definicja

Śladem funkcji $f \in C(\bar{\Omega})$ na $(n-1)$ wymiarowej powierzchni $S \subset \Omega$ nazywamy funkcję ciągłą na S , która prawie wszędzie pokrywa się z f . Ślad oznaczamy jako $f|_S$.

Rozważmy teraz funkcje f z przestrzeni Sobolewa $H^1(\Omega)$. Niech S będzie powierzchnią klasy C^1 . Niech $S_1 \subset S$ będzie częścią tej powierzchni reprezentowaną za pomocą przedstawienia

$$x_n = \varphi(x'), \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad \varphi \in C^1(\bar{D}), \quad D \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Założmy, że Ω zawarty jest w kostce $\{0 < x_i < a, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n\}$. Założmy również chwilowo, że $f \in C_0^1(\bar{\Omega})$ (zbiór funkcji klasy C^1 o nośniku zwartym). Wtedy

$$f|_{S_1}(x) = f(x', \varphi(x')) = \int_0^{\varphi(x')} 1 \cdot \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n.$$

Na mocy nierówności (10.11) możemy napisać, że

$$|f|_{S_1}(x)|^2 \leq \varphi(x') \int_0^{\varphi(x')} \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n \leq a \int_0^a \left| \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} \right|^2 d\xi_n.$$

Mnożąc obustronnie powyższą nierówność przez $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \dots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ i całkując po D dostajemy

$$\begin{aligned} \|f|_{S_1}\|_{L^2(S_1)}^2 &= \int_{S_1} |f|_{S_1}(x)|^2 dS_1 = \\ &= \int_D |f|_{S_1}(x)|^2 \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \dots + \varphi_{x_{n-1}}^2} dx_1 \dots dx_{n-1} \leq C_1 \|f\|_{1,2} \end{aligned} \quad (11.5)$$

gdzie C_1 jest stałą, która nie zależy od funkcji f tylko od obszaru Ω i powierzchni S_1 ($\|f\|_{1,2}$ oznacza normę w przestrzeni Sobolewa zdefiniowaną wzorem (11.1)).

Zakładając, że powierzchnia S składa się ze skończonej liczby powierzchni typu S_1 reprezentowanych przez różne przedstawienia, można wnioskować, że zachodzi nierówność postaci

$$\|f|_S\|_{L^2(S)} \leq C\|f\|_{1,2} \quad (11.6)$$

gdzie C zależy wyłącznie od obszaru Ω i powierzchni S . Przez aproksymację funkcji z przestrzeni $C^1(\Omega)$ funkcjami z $C_0^1(\Omega)$ łatwo pokazać, że powyższa nierówność zachodzi dla dowolnych funkcji $f \in C^1(\overline{\Omega})$.

Przypuśćmy teraz, że $f \in H^1(\Omega)$. Wynika stąd, że istnieje ciąg (f_n) funkcji klasy $C^1(\overline{\Omega})$ taki, że $f_n \rightarrow f$ w normie $H^1(\Omega)$. Z nierówności (11.6) wynika, że

$$\|f_n|_S - f_m|_S\|_{L^2(S)} \leq C\|f_n - f_m\|_{1,2},$$

zatem ciąg śladów funkcji ciągłych $(f_n|_S)$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(S)$. Z zupełności przestrzeni $L^2(S)$ wnioskujemy, że istnieje funkcja $f|_S \in L^2(S)$ będąca granicą tego ciągu, tzn.

$$f|_S = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n|_S. \quad (11.7)$$

Definicja

Funkcję $f|_S$ określoną równością (11.7) nazywamy śladem funkcji $f \in H^1(\Omega)$ na $(n-1)$ -wymiarowej powierzchni S .

Uwaga

Można pokazać, że ślad funkcji z przestrzeni $H^1(\Omega)$ jest wyznaczony jednoznacznie. Za pomocą odpowiedniego przejścia granicznego możemy wywnioskować, że nierówność (11.6) zachodzi dla wszystkich funkcji $f \in H^1(\Omega)$, gdzie $f|_S$ oznacza ślad funkcji f na powierzchni S . ■

Poprzednie rozważania można sformułować w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie

Niech $S \subset \Omega$ będzie $(n-1)$ -wymiarową powierzchnią klasy C^1 . Wówczas dowolna funkcja f z przestrzeni $H^1(\Omega)$ ma jednoznacznie określony ślad $f|_S$ na powierzchni S . Funkcja $f|_S$ należy do przestrzeni $L^2(S)$ i spełnia nierówność (11.6). ■

Uwaga 1

Analogicznie do poprzednich rozważań można pokazać, że jeśli α jest wielowskaźnikiem postaci $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ oraz $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$, to każda funkcja $f \in H^{|\alpha|+1}(\Omega)$ wyznacza jednoznacznie ślad pochodnej $D^\alpha f|_S$ na powierzchni S , przy czym zachodzi nierówność

$$\|D^\alpha f|_S\|_{L^2(S)} \leq C\|f\|_{|\alpha|+1,2}. \quad (11.8)$$

Oznacza to, że funkcje z przestrzeni $H^k(\Omega)$ wyznaczają na powierzchni S ślady pochodnych do rzędu $(k-1)$ włącznie. ■

Uwaga 2

Poprzednie twierdzenia mówią, że każda funkcja z przestrzeni $H^1(\Omega)$ wyznacza swój ślad na powierzchni S i ślad ten należy do przestrzeni $L^2(S)$. Powstaje pytanie, czy każda funkcja

$v \in L^2(S)$ jest śladem pewnej funkcji z $H^1(\Omega)$. Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Już dla $n = 2$ można podać przykład funkcji z przestrzeni $L^2(S)$, gdzie S jest okręgiem jednostkowym, która nie jest śladem żadnej funkcji z $H^1(\Omega)$, Ω - koło jednostkowe. Można natomiast pokazać, że zbiór śladów funkcji z $H^1(\Omega)$ jest gęsty w $L^2(S)$. ■

Dla badania rozwiązalności pewnych zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych duże znaczenie mają następujące dwa twierdzenia dotyczące zachowania się funkcji z przestrzeni Sobolewa.

T w i e r d z e n i e

Dowolny zbiór ograniczony w przestrzeni $H^1(\Omega)$ jest prezwarty w przestrzeni $L^2(\Omega)$ (tzn. każdy ciąg funkcji (f_n) , których normy $\|f_n\|_{1,2}$ są wspólnie ograniczone przez pewną stałą zawiera podciąg zbieżny w przestrzeni $L^2(\Omega)$).

Dowód twierdzenia polega na wykorzystaniu charakteryzacji zbiorów prezwartych w $L^2(\Omega)$, której nie będziemy w tym miejscu omawiać. ■

T w i e r d z e n i e

Jeśli pewien zbiór funkcji jest ograniczony w przestrzeni $H^1(\Omega)$, wtedy zbiór ich śladów na $(n - 1)$ wymiarowej powierzchni S klasy C^1 jest prezwarty w przestrzeni $L^2(S)$.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy pokazać, że istnieją stałe C_1 i C_2 takie, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ i dowolnej funkcji $f \in H^1(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\|f|_S\|_{L^2(S)}^2 \leq \frac{C_1}{\delta} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_2 \delta \|f\|_{1,2}^2 \quad (11.9)$$

i następnie skorzystać z poprzedniego twierdzenia. ■

11.3 Normy równoważne w przestrzeniach Sobolewa

W praktycznych rozważaniach dotyczących rozwiązalności zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych dużą wagę odgrywa możliwość wprowadzenia norm w przestrzeniach Sobolewa, które są równoważne normie standardowej i jednocześnie są postaci umożliwiające bezpośrednie zastosowanie do tych zagadnień. Możliwości te dają tzw. *nierówność Friedrichsa* i *nierówność Poincaré*.

T w i e r d z e n i e (*nierówność Friedrichsa*)

Niech Ω będzie obszarem z brzegiem Lipschitza $\partial\Omega = \Gamma$. Wówczas istnieje stała $k > 0$ zależna tylko od obszaru Ω taka, że dla każdej funkcji $f \in H^1(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\|f\|_{1,2}^2 \leq k \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Gamma} f|_{\Gamma}^2 ds \right), \quad (11.10)$$

gdzie wartości funkcji f na brzegu obszaru Ω rozumiane są w sensie śladu. ■

Nierówność Friedrichsa (11.10) może być uogólniona w sposób następujący.

T w i e r d z e n i e

Niech Ω będzie obszarem z brzegiem Lipschitza $\partial\Omega = \Gamma$ i niech $\Gamma_1 \subset \Gamma$ będzie podzbiorem o mierze dodatniej $|\Gamma_1| > 0$. Wówczas istnieje stała $k > 0$ zależna tylko od obszaru Ω i Γ_1 taka, że dla każdej funkcji $f \in H^1(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\|f\|_{1,2}^2 \leq k \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Gamma_1} f_{|\Gamma_1}^2(s) ds \right). \quad (11.11)$$

■

T w i e r d z e n i e (*nierówność Poincaré*)

Niech Ω będzie obszarem z brzegiem Lipschitza. Istnieje wówczas stała $k > 0$ zależna tylko od obszaru Ω taka, że dla każdej funkcji $f \in H^m(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\|f\|_{m,2}^2 \leq k \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} (D^\alpha f)^2 dx + \sum_{|\alpha|<m} \left(\int_{\Omega} D^\alpha f dx \right)^2 \right). \quad (11.12)$$

■

Temat 12

Rozwiązania uogólnione (słabe)

12.1 Eliptyczne operatory różniczkowe rzędu parzystego

Będziemy rozważać operatory różniczkowe postaci

$$A = \sum_{|i|,|j|\leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j), \quad (12.1)$$

gdzie i oraz j są wielowskaźnikami, $a_{ij} \in C^{|i|}(\Omega)$.

P r z y k ł a d y (dla $n = 2$)

1. ($k = 1$)

Niech

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = (1, 0), j = (1, 0) \text{ oraz } i = (0, 1), j = (0, 1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \quad (12.2)$$

Wtedy

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = -\Delta u \text{ (operator Laplace'a).}$$

2. ($k = 2$)

Niech

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = (2, 0), j = (2, 0) \text{ oraz } i = (0, 2), j = (0, 2), \\ 2 & \text{dla } i = (1, 1), j = (1, 1), \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \quad (12.3)$$

Wtedy

$$\begin{aligned} Au &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = \\ &= \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = \Delta^2 u \text{ (operator biharmoniczny).} \end{aligned}$$

U w a g a

Operator A nie wyznacza jednoznacznie przedstawienia (12.1). Dla każdego operatora można na ogół wybrać różne reprezentacje, w zależności od prowadzonych rozważań. Np. operator Laplace'a może być otrzymany również przez przyjęcie współczynników a_{ij} jako

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = (1, 0), j = (1, 0) \text{ oraz } i = (0, 1), j = (0, 1), \\ c & \text{dla } i = (1, 0), j = (0, 1), \\ -c & \text{dla } i = (0, 1), j = (1, 0). \end{cases} \quad (12.4)$$

D e f i n i c j a

Mówimy, że operator A określony równością (12.1) jest eliptyczny w punkcie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego układu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$ zachodzi

$$\sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(x) \hat{\xi}_i \hat{\xi}_j \neq 0, \quad (12.5)$$

gdzie $\hat{\xi}_i = \xi_1^{i_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{i_n}$, $\hat{\xi}_j = \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_n^{j_n}$.

D e f i n i c j a

Mówimy, że operator A określony równością (12.1) jest jednostajnie eliptyczny w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje liczba $c > 0$ zależna tylko od obszaru Ω i współczynników a_{ij} taka, że dla prawie wszystkich punktów $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i dla wszystkich $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ zachodzi

$$\sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(x) \hat{\xi}_i \hat{\xi}_j \geq c |\xi|^{2k}, \quad (12.6)$$

gdzie $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2$.

P r z y k ł a d y

1. Operator Laplace'a $-\Delta$ jest jednostajnie eliptyczny w dowolnym obszarze, ponieważ

$$\sum_{|i|,|j|=1} a_{ij}(x) \hat{\xi}_i \hat{\xi}_j = \xi_1^2 + \xi_2^2 = |\xi|^2,$$

tak więc można przyjąć $c = 1$.

Uwaga: Według powyższej definicji operator Δ **nie jest** jednostajnie eliptyczny.

2. Operator biharmoniczny jest jednostajnie eliptyczny, ponieważ

$$\sum_{|i|,|j|=2} a_{ij}(x) \hat{\xi}_i \hat{\xi}_j = \xi_1^4 + 2\xi_1^2 \xi_2^2 + \xi_2^4 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 = |\xi|^4.$$

3. Operator

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left[(1 + x_1^2) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

nie jest eliptyczny, gdyż

$$\sum_{|i|,|j|=1} a_{ij}(x) \hat{\xi}_i \hat{\xi}_j = (1 + x_1^2) \xi_1^2 - 3\xi_2^2$$

i dla pewnych ξ_1, ξ_2 wyrażenie to może przyjmować wartość zero.

12.2 Wprowadzenie definicji słabego rozwiązania

12.2.1 Słabe rozwiązanie równania różniczkowego

Rozpocznijmy od rozważenia kilku przypadków szczególnych. Na początek rozważmy równanie Poissona postaci

$$-\Delta u = f. \quad (12.7)$$

Niech $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$, u - będzie rozwiązaniem klasycznym tego równania. Niech ponadto $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wówczas

$$-\int_{\Omega} \varphi \Delta u dx = \int_{\Omega} \varphi f dx. \quad (12.8)$$

Stosując do lewej strony powyższej równości twierdzenie Greena postaci

$$\int_{\Omega} b \frac{\partial c}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} b c \nu_i ds - \int_{\Omega} \frac{\partial b}{\partial x_i} c dx \quad \text{dla } b, c \in H^1(\Omega)$$

otrzymujemy

$$-\int_{\Omega} \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx = -\underbrace{\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i ds}_0 + \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

W takim razie z (12.8) wynika, że

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_{\Omega} \varphi f dx \quad (12.9)$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Tożsamość (12.9) ma sens nawet wtedy, gdy równanie (12.7) nie ma rozwiązań klasycznych należących do $C^2(\Omega)$ np. wtedy, gdy funkcja $f \in L^2(\Omega)$ i f nie jest funkcją ciągłą. W tym przypadku uzasadnione jest przyjęcie następującej definicji *słabego* (lub *uogólnionego*) rozwiązania rozważanego równania różniczkowego.

D e f i n i c j a

Niech $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Jeżeli dla każdej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ zachodzi tożsamość (12.9), to mówimy, że u jest słabym (uogólnionym) rozwiązaniem równania (12.7).

Koncepcja słabego rozwiązania jest znacznie ogólniejsza od koncepcji rozwiązania klasycznego, np. słabe rozwiązanie równania rzędu drugiego może nie posiadać pochodnych (nawet w sensie dystrybucyjnym) rzędu drugiego. Ponadto, jeżeli u jest rozwiązaniem równania (12.7) w sensie powyższej definicji oraz $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$, to stosując ponownie wzór Greena łatwo pokazać, że u jest także rozwiązaniem w sensie klasycznym.

Analogiczne rozważania przeprowadzić można np. w przypadku operatora biharmonicznego. Rozważmy równanie biharmoniczne

$$\Delta^2 u = f. \quad (12.10)$$

Mnożąc obie strony tego równania przez dowolną funkcję $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ i całkując otrzymujemy

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta^2 u dx = \int_{\Omega} \varphi f dx. \quad (12.11)$$

Stosując dwukrotnie wzór Greena do lewej strony równości (12.11) możemy napisać, że

$$\int_{\Omega} \varphi \Delta^2 u dx = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dx$$

tzn. tożsamość (12.11) może być zapisana w postaci

$$\sum_{|i|, |j| \leq 2} \int_{\Omega} a_{ij} D^i \varphi D^j u dx = (\varphi, f) = \int_{\Omega} \varphi f dx, \quad (12.12)$$

gdzie a_{ij} są takie jak w przykładzie 2.

Podobnie jak w przypadku operatora Laplace'a, możemy sformułować definicję słabego rozwiązania równania biharmonicznego (12.10) jako funkcji $u \in H^2(\Omega)$ spełniającej tożsamość (12.12) dla każdej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Sformułujemy teraz ogólną definicję słabego rozwiązania równania różniczkowego $Au = f$, gdzie A jest operatorem eliptycznym rzędu $2k$.

Definicja

Niech $f \in L^2(\Omega)$, a_{ij} - ograniczone i mierzalne na Ω . Mówimy, że $u \in H^k(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem równania $Au = f$, gdzie

$$A = \sum_{|i|, |j| \leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_{ij} D^j),$$

wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ zachodzi tożsamość

$$\sum_{|i|, |j| \leq k} \int_{\Omega} a_{ij} D^i \varphi D^j u dx = (\varphi, f) = \int_{\Omega} \varphi f dx. \quad (12.13)$$

Szczególnymi przypadkami tożsamości (12.13) są tożsamości (12.9) i (12.12) definiujące słabe rozwiązania równania Poissona i równania biharmonicznego.

12.2.2 Stabilne i niestabilne warunki brzegowe

Wszystkie zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych cząstkowych zawierają w swoich sformułowaniach pewne tzw. warunki brzegowe. Warunki te najczęściej dotyczą wartości funkcji nie wiadomej i jej pochodnych na brzegu obszaru lub na pewnej krzywej zawartej w obszarze. Warunki brzegowe dzielimy na *warunki stabilne* i *warunki niestabilne*.

Definicja

Warunki brzegowe dla równania rzędu $2k$ nazywamy stabilnymi wtedy i tylko wtedy gdy nie zawierają one pochodnych rzędu wyższego niż $k - 1$.

Typowym przykładem stabilnego warunku brzegowego jest warunek występujący w zagadnieniu Dirichleta dla równania Laplace'a ($k = 1$)

$$\Delta u = 0, \quad \text{dla } x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g.$$

Dla równań rzędu $2k$ stabilnymi będą warunki postaci

$$u|_{\partial\Omega} = g, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = g_1, \dots, \quad \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}|_{\partial\Omega} = g_{k-1}, \quad (12.14)$$

gdzie ν oznacza wektor normalny zewnętrzny do brzegu $\partial\Omega$. Warunki te należy rozumieć w sensie śladu, ponieważ funkcje z przestrzeni $H^k(\Omega)$ wyznaczają na brzegu $\partial\Omega$ ślady swoich pochodnych do rzędu $(k - 1)$ włącznie.

U w a g a

Jeżeli $u_n, u \in H^1(\Omega)$ oraz $u_n \rightarrow u$ w przestrzeni $H^k(\Omega)$, to z ciągłości operatora śladu wynika (patrz nierówność (11.8)), że $D^\alpha u_n|_{\partial\Omega} \rightarrow D^\alpha u|_{\partial\Omega}$ w $L^2(\partial\Omega)$ dla takich wielowskaźników α , że $|\alpha| \leq k - 1$. W szczególności, jeżeli $u_n|_{\partial\Omega} = g$, to $u|_{\partial\Omega} = g$. Uzasadnia to przyjętą nazwę stabilnych warunków brzegowych.

D e f i n i c j a

Warunki brzegowe zawierające pochodne rzędu wyższego niż $(k - 1)$ nazywane są niestabilnymi warunkami brzegowymi dla równania rzędu $2k$.

Warunki niestabilne nie mogą być rozumiane jako ślady funkcji, ponieważ funkcje z przestrzeni $H^k(\Omega)$ nie wyznaczają śladów pochodnych rzędu wyższego niż $(k - 1)$. Następujący przykład świadczy o tym, że jeśli ciąg funkcji u_n zbiega do u w $H^k(\Omega)$ oraz jeśli każda z funkcji u_n spełnia w sensie śladu pewne warunki brzegowe z pochodnymi rzędu wyższego niż $(k - 1)$, to funkcja graniczna u nie musi spełniać tych warunków (stad warunki te zwane są niestabilnymi).

P r z y k ł a d

Niech $k = 1, \Omega = [-1, 1], u(x) = 1 - x^2$,

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{n} + (n - 1)(1 - x)^2 & \text{dla } x \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \quad \text{i przedłużona do funkcji parzystej.}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\|u - u_n\|_{1,2} \leq \frac{32}{n^3} + \frac{32}{n},$$

zatem $u_n \rightarrow u$ w $H^1(\Omega)$. Oczywiście $u_n(-1) = u_n(1) = \frac{1}{n} \rightarrow 0 = u(1) = u(-1)$, ale

$$u'_n(-1) = u'_n(1) = 0, \quad u'(1) = -2, \quad u'(-1) = 2.$$

12.2.3 Słabe rozwiązania zagadnień brzegowych

Rozważmy równanie

$$Au = f, \quad (12.15)$$

gdzie A jest operatorem eliptycznym rzędu $2k$ z warunkami brzegowymi, wśród których jest μ warunków stabilnych postaci

$$B_1 u(s) = g_1(s), \quad B_2 u(s) = g_2(s), \dots, \quad B_\mu u(s) = g_\mu(s) \quad \text{dla } s \in \partial\Omega$$

(B_1, B_2, \dots, B_μ są pewnymi operatorami różniczkowymi rzędu co najwyżej $(k - 1)$). Oprócz tego dane jest $(k - \mu)$ warunków brzegowych niestabilnych, scharakteryzowanych przez funkcje $h_1, h_2, \dots, h_{k-\mu}$.

Na początek rozważymy kilka szczególnych przypadków zagadnień brzegowych.

Zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (ze stabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \quad \text{dla } x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g. \quad (12.16)$$

Niech $v \in V = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Przypuśćmy, że $f, g \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.16). Stosując wzór Greena otrzymujemy

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} v \Delta u dx &= \int_{\Omega} v f dx \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} v f dx \end{aligned} \quad (12.17)$$

(porównaj wyprowadzenie wzoru (12.9)). Łatwo zauważyć, że całki występujące po prawej stronie wzoru (12.17) są poprawnie określone dla $u \in H^1(\Omega)$ i $f \in L^2(\Omega)$.

Niech g będzie śladem pewnej funkcji $w \in H^1(\Omega)$ i niech $f \in L^2(\Omega)$. Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja

Funkcję $u \in H^1(\Omega)$ nazywamy słabym rozwiązaniem zagadnienia (12.16) wtedy i tylko wtedy gdy

1. $u - w \in V$,
2. dla każdej funkcji $v \in V$ spełniona jest równość (12.17).

Uwaga

Problem istnienia rozwiązania zagadnienia Dirichleta sprowadza się do tego, czy dana funkcja g jest śladem pewnej funkcji $w \in H^1(\Omega)$. Jeśli tak jest, to pokażemy później, że wystarcza to do istnienia rozwiązania.

Zagadnienie Neumanna dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (z niestabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \quad \text{dla } x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = h. \quad (12.18)$$

Niech $v \in V = H^1(\Omega)$. Przypuśćmy, że $f, h \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.18). Ponieważ

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i,$$

więc stosując, podobnie jak poprzednio, wzór Greena otrzymujemy.

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} v \Delta u dx &= -\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \\ \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} v f dx + \int_{\partial\Omega} v h ds. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Rezygnując z założenia o ciągłości danych funkcji f i h możemy sformułować definicję.

Definicja

Niech $h \in L^2(\partial\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Słabym rozwiązaniem zagadnienia (12.18) nazywamy taką funkcję $u \in H^1(\Omega)$, że dla dowolnej funkcji $v \in V$ spełniona jest równość (12.19).

Uwaga

Rozwiązania zagadnienia Neumanna nie można zdefiniować za pomocą założenia o istnieniu takiej funkcji $w \in H^1(\Omega)$, że $\frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = h$, ponieważ funkcje z przestrzeni $H^1(\Omega)$ nie wyznaczają śladów swoich pochodnych pierwszego rzędu na brzegu $\partial\Omega$.

Zagadnienie Newtona dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (z niestabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \quad \text{dla } x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right)_{|\partial\Omega} = h. \quad (12.20)$$

Niech $v \in V = H^1(\Omega)$. Przypuśćmy, że $f, h \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.20). Ponieważ

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i,$$

więc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v f dx &= - \int_{\Omega} v \Delta u dx = - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \sigma u v ds - \int_{\partial\Omega} v h ds + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Zapiszmy ostatnią równość w postaci

$$A(v, u) + a(v, u) = \int_{\Omega} v f dx + \int_{\partial\Omega} v h ds, \quad (12.22)$$

gdzie

$$A(v, u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad a(v, u) = \int_{\partial\Omega} \sigma u v ds.$$

Wyrażenie $a(v, u)$ jest tzw. brzegową ciągłą formą dwuliniową określoną na $H^1(\Omega)$ taką, że $|a(v, u)| \leq C \|v\|_{1,2} \|u\|_{1,2}$.

Rezygnując z założenia o ciągłości danych funkcji f i h możemy sformułować definicję.

Definicja

Niech $h \in L^2(\partial\Omega)$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Słabym rozwiązaniem zagadnienia (12.20) nazywamy taką funkcję $u \in H^1(\Omega)$, że dla dowolnej funkcji $v \in V$ spełniona jest równość (12.22).

Definicja słabego rozwiązania zagadnienia brzegowego - przypadek ogólny

Rozważone powyżej przypadki zagadnień brzegowych prowadzą do sformułowania ogólnej definicji słabego rozwiązania zagadnienia brzegowego.

Rozważmy równanie

$$Au = f, \text{ dla } x \in \Omega, \quad (12.23)$$

gdzie A jest operatorem eliptycznym rzędu $2k$ postaci (12.1) z warunkami brzegowymi, wśród których jest μ warunków stabilnych postaci

$$B_1u = g_1, B_2u = g_2, \dots, B_\mu u = g_\mu \quad (12.24)$$

(B_1, B_2, \dots, B_μ są pewnymi operatorami różniczkowymi rzędu co najwyżej $(k - 1)$). Oprócz tego dane jest $(k - \mu)$ warunków brzegowych niestabilnych, scharakteryzowanych przez funkcje $h_1, h_2, \dots, h_{k-\mu} \in L^2(\partial\Omega)$.

Niech

$$V = \{v \in H^k(\Omega) : B_1v = 0, B_2v = 0, \dots, B_\mu v = 0 \text{ w sensie śladu na } \partial\Omega\}. \quad (12.25)$$

Niech $A(v, u) = \sum_{|i|, |j| \leq k} \int_{\Omega} a_{ij} D^i v D^j u dx$ oraz $a(v, u)$ będzie brzegową ciągłą formą dwuliniową określoną na $H^k(\Omega)$.

Niech $w \in H^k(\Omega)$ będzie taką funkcją, że

$$B_1w = g_1, B_2w = g_2, \dots, B_\mu w = g_\mu \text{ w sensie śladu na } \partial\Omega. \quad (12.26)$$

Definicja (przypadek ogólny)

Mówimy, że $u \in H^k(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego określonego przez powyższe dane wtedy i tylko wtedy gdy $u - w \in V$ oraz dla każdej funkcji $v \in V$ zachodzi tożsamość

$$((v, u)) := A(v, u) + a(v, u) = \int_{\Omega} v f dx + \sum_{i=1}^{k-\mu} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^{t_i} v}{\partial \nu^{t_i}} h_i ds. \quad (12.27)$$

12.3 Istnienie słabych rozwiązań zagadnień brzegowych

W dowodzie istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego ważną rolę odgrywa pojęcie tzw. *form V-eliptycznych*.

Definicja

Niech dana będzie przestrzeń Hilberta V i dwuliniowa forma $((v, u))$ określona na tej przestrzeni. Mówimy, że forma $((v, u))$ jest V -eliptyczna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że dla każdej funkcji $v \in V$ zachodzi nierówność

$$((v, v)) \geq \alpha \|v\|_V^2. \quad (12.28)$$

T w i e r d z e n i e (*Laxa-Milgrama*)

Niech H będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym (v, u) . Niech $B(v, u)$ będzie formą dwuliniową określoną na $H \times H$ taką, że

$$|B(v, u)| \leq K \|v\| \|u\| \quad \text{oraz} \quad B(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2. \quad (12.29)$$

Wówczas każdy funkcjonal liniowy F ograniczony na H może być przedstawiony w formie

$$F(v) = B(v, z), \quad v \in V, \quad (12.30)$$

gdzie element $z \in H$ jest jednoznacznie wyznaczony przez funkcjonal F . Ponadto zachodzi nierówność

$$\|z\| \leq \frac{\|F\|}{\alpha}. \quad (12.31)$$

Dowód twierdzenia oparty jest na zastosowaniu twierdzenia Riesz dla reprezentacji funkcjonału liniowego w przestrzeniach Hilberta. ■

T w i e r d z e n i e (*o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego*)

Niech zgodnie z definicją słabego rozwiązania (12.27) dane będzie zagadnienie brzegowe dla operatora eliptycznego rzędu $2k$. Jeśli forma $((v, u)) = A(v, u) + a(v, u)$ jest V -eliptyczna wtedy dany problem posiada dokładnie jedno słabe rozwiązanie $u \in H^k(\Omega)$ i istnieje stała $C > 0$ niezależna od f i h_i taka, że

$$\|u\|_{k,2} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{k,2} + \sum_{i=1}^{k-\mu} \|h_i\|_{L^2(\partial\Omega)} \right). \quad (12.32)$$

Dowód istnienia rozwiązania polega na zastosowaniu twierdzenia Laxa-Milgrama do funkcjonału F postaci

$$F(v) = \int_{\Omega} v f dx + \sum_{i=1}^{k-\mu} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial^{t_i} v}{\partial \nu^{t_i}} h_i ds - ((v, w))$$

i formy $B(v, u) = ((v, u))$. Jednoznaczność rozwiązania wynika natychmiast z zastosowania nierówności

$$0 = ((u_1 - u_2, u_1 - u_2)) \geq \alpha \|u_1 - u_2\|_V^2$$

dla dwóch rozwiązań u_1 i u_2 rozważanego zagadnienia. Stała C jest postaci $C = \frac{1}{\alpha} M$, gdzie M jest dowolną stałą ograniczającą z góry normę $\|F\|$. ■

12.4 Przykłady zagadnień brzegowych - analiza rozwiązalności

Zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona

Rozważamy zagadnienie (ze stabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \quad \text{dla } x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = g.$$

Niech $v \in V = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$, $w \in H^1(\Omega)$ taka, że $w|_{\partial\Omega} = g$. Wtedy z (12.17) wynika, że $a(v, u) = 0$ oraz

$$((v, u)) = A(v, u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx.$$

Forma $((v, u))$ jest V -eliptyczna, ponieważ dla dowolnej funkcji v z przestrzeni V , na mocy nierówności Friedrichsa (11.10) prawdziwe jest oszacowanie postaci

$$((v, v)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \geq \frac{1}{k} \|v\|_{1,2}^2$$

dla pewnej stałej dodatniej k .

W takim razie z istnienia funkcji $w \in H^1(\Omega)$ takiej, że jej śladem na brzegu $\partial\Omega$ jest g , wynika istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego zagadnienia.

Zagadnienie Neumanna dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (z niestabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \quad \text{dla } x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial\Omega} = h.$$

Niech $v \in V = H^1(\Omega)$. Wtedy $a(v, u) = 0$ oraz

$$((v, u)) = A(v, u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx.$$

W tym przypadku forma $((v, u))$ nie jest V -eliptyczna, ponieważ dla $a \neq 0$ funkcja stała $v \equiv a$ spełnia warunek $((v, v)) = 0$, ale $\|v\| \neq 0$. Oznacza to, że nie można stosować twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego.

Wykazanie rozwiązalności zagadnienia Neumanna wymaga przyjęcia pewnych dodatkowych założeń, których nie będziemy w tym miejscu omawiać. W przypadku klasycznym warunkiem tym jest równość (7.24).

Zagadnienie Newtona dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (z niestabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \quad \text{dla } x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right)_{|\partial\Omega} = h.$$

Niech $v \in V = H^1(\Omega)$. Wtedy, zgodnie z równością (12.22)

$$A(v, u) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad a(v, u) = \int_{\partial\Omega} \sigma v u ds,$$

zatem

$$((v, u)) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \sigma v u ds.$$

Założmy ponadto, że we wszystkich punktach $P \in \partial\Omega$ spełniona jest nierówność $\sigma(P) \geq \sigma_0 > 0$. Oznaczając $C = \min\{1, \sigma_0\}$ i stosując nierówność Friedrichsa (11.10) otrzymujemy

$$((v, v)) \geq \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \sigma_0 \int_{\partial\Omega} v^2 ds \geq C \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\partial\Omega} v^2 ds \right) \geq \frac{C}{k} \|v\|_{1,2}^2$$

co dowodzi V -eliptyczności formy $((v, u))$. Oznacza to, że rozważany problem posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Temat 13

Elementy rachunku wariacyjnego

13.1 Przykładowe zagadnienia

Rachunek wariacyjny zajmuje się metodami wyznaczania wartości ekstremalnych funkcjonałów określonych na pewnych przestrzeniach funkcyjnych. Klasyczna teoria rachunku wariacyjnego pochodzi od Eulera (1707-1783). Poniżej przedstawimy kilka przykładowych problemów prowadzących do zagadnień wariacyjnych.

Zagadnienie brachistochrony

W roku 1696 Johann Bernoulli postawił następujący problem.

Dane są dwa ustalone punkty M_1 i M_2 nie leżące na pionowej prostej. Należy wyznaczyć linię - drogę, po której punkt materialny zsunie się od M_1 do M_2 w najkrótszym czasie pod wpływem siły ciężenia, zakładając, że prędkość początkowa w punkcie M_1 jest równa zero.

Niech $M_1(0, 0)$, $M_2(x_2, y_2)$. Zakładając, że szukana krzywa dana jest równaniem $y = u(x)$ wnioskujemy, że muszą być spełnione warunki brzegowe $u(0) = 0$, $u(x_2) = y_2$. Z zasady zachowania energii wynika, że

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy,$$

zatem

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Ponieważ

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{2gu(x)}} dx,$$

więc całkowity czas zsuwania się punktu materialnego po krzywej $y = u(x)$ można zapisać wzorem

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{u(x)}} dx. \quad (13.1)$$

T jest funkcjonałem postaci $T(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx$. Należy wyznaczyć taką funkcję $u(x)$, dla której wyrażenie (13.1) przyjmuje wartość minimalną w klasie funkcji różniczkowalnych spełniających zadane warunki brzegowe $u(0) = 0$, $u(x_2) = y_2$.

Powierzchnia obrotowa o minimalnym polu

Postawmy zagadnienie wyznaczenia funkcji $y = u(x)$, która spełnia warunki brzegowe $u(x_1) = y_1$, $u(x_2) = y_2$ takiej, że pole powierzchni obrotowej otrzymanej przez obrót tej krzywej dookoła osi OX w przedziale $[x_1; x_2]$ jest minimalne. Ponieważ pole powierzchni obrotowej opisane jest wzorem

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} u(x) \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx, \tag{13.2}$$

więc zagadnienie powyższe prowadzi do minimalizacji funkcjonału (13.2).

Powierzchnia o minimalnym polu przechodząca przez daną krzywą

Niech Γ będzie daną krzywą zamkniętą w \mathbb{R}^3 . Poszukujemy powierzchni S , której brzegiem jest Γ , i której pole jest minimalne. Analitycznie oznacza to, że szukamy funkcji dwóch zmiennych $z = u(x, y)$ spełniającej warunek brzegowy

$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = f(x, y),$$

gdzie f jest dana, a $\partial\Omega$ jest rzutem Γ na płaszczyznę Oxy , takiej, że funkcjonał

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dx dy \tag{13.3}$$

przyjmuje wartość minimalną (Ω jest obszarem, którego brzegiem jest $\partial\Omega$). Rozważany funkcjonał (13.3) jest postaci $S(u) = \iint_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy$.

13.2 Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału

Niech $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem określonym na pewnej przestrzeni funkcyjnej X . Niech $\Delta J = J(u + h) - J(u)$ będzie przyrostem wartości funkcjonału odpowiadającym przyrostowi argumentu o h . Zauważmy, że dla ustalonego u przyrost ΔJ jest funkcjonałem zależnym od h - na ogół nieliniowym. Zgodnie z ogólną teorią różniczkowania w przestrzeniach unormowanych, przyjmujemy następującą definicję.

Definicja

Mówimy, że funkcjonał J jest różniczkowalny w punkcie u wtedy i tylko wtedy gdy przyrost ΔJ daje się przedstawić w postaci

$$\Delta J = \varphi(h) + \alpha(u, h) \|h\|, \tag{13.4}$$

gdzie $\varphi(h)$ jest funkcjonałem liniowym względem h , oraz $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \alpha(u, h) = 0$. Funkcjonał $\varphi(h)$ nazywamy *wariacją (różniczką w sensie Frécheta)* funkcjonału J . Wariację $\varphi(h)$ zapisujemy symbolicznie jako $\delta J(h)$.

Pojęcie wariacji funkcjonału pozwala sformułować w prosty sposób warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału.

T w i e r d z e n i e

Jeśli funkcjonal $J(u)$ posiada ekstremum dla $u = u_0$ oraz istnieje wariacja funkcjonału J , to

$$\delta J = 0 \text{ dla } u = u_0. \tag{13.5}$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $\Delta J = J(u_0 + h) - J(u_0) = \delta J(h) + \alpha(u_0, h) \|h\|$. Ponieważ $\alpha(u_0, h) \rightarrow 0$ dla $\|h\| \rightarrow 0$, więc znak wyrażenia $\delta J(h) + \alpha(u_0, h) \|h\|$ dla dostatecznie małych $\|h\|$ określony jest przez znak pierwszego składnika. Gdyby $\delta J \neq 0$, z liniowości wariacji δJ wynika, że dla małych $\|h\|$ znak ten może być zarówno dodatni jak i ujemny, zatem funkcjonal J nie może osiągać ekstremum w punkcie u_0 . ■

13.2.1 Przypadki funkcjonałów szczególnej postaci

Przedyskutujemy teraz postać warunku koniecznego istnienia ekstremum (13.5) w pewnych szczególnych przypadkach funkcjonałów.

Zagadnienie z nieruchomymi końcami

Rozważmy przestrzeń $C^1([a; b])$ z normą $\|u\| = \sup_{[a; b]} |u(x)| + \sup_{[a; b]} |u'(x)|$. Niech X będzie przestrzenią funkcyjną określoną następująco

$$X = \{u : u \in C^1([a; b]), u(a) = A, u(b) = B\}.$$

Rozważamy tzw. zagadnienie z nieruchomymi końcami polegające na wyznaczeniu ekstremów funkcjonału postaci

$$J(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx \tag{13.6}$$

w przestrzeni X .

Niech h będzie przyrostem funkcji u , tzn. $h \in C^1([a; b])$ oraz $u + h \in X$. Wynika stąd, że

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Załóżmy teraz, że $F(x, u, u')$ jest funkcją klasy C^2 na zbiorze $\{(x, u, u') : a \leq x \leq b, u, u' \in \mathbb{R}\}$.

Wyznamy wariację δJ . Mamy

$$\Delta J = \int_a^b F(x, u + h, u' + h') dx - \int_a^b F(x, u, u') dx = \int_a^b [F(x, u + h, u' + h') - F(x, u, u')] dx.$$

Ze wzoru Taylora wynika, że

$$\begin{aligned} F(x, u + h, u' + h') - F(x, u, u') &= h \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u} + h' \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} + \\ &+ \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + h h' \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} + \frac{1}{2} h'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}, \end{aligned}$$

gdzie pochodne $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}, \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}$ obliczone są w punkcie $(x, u + \theta h, u' + \theta h')$, $0 < \theta < 1$.

W takim razie

$$\Delta J = \int_a^b \left[h \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u} + h' \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \right] dx + \alpha(u, h) \|h\|, \quad (13.7)$$

gdzie

$$\alpha(u, h) = \frac{1}{\|h\|} \int_a^b \left(\frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + h h' \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} + \frac{1}{2} h'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} \right) dx. \quad (13.8)$$

Szacując wyrażenie (13.8) otrzymujemy

$$|\alpha(u, h)| \leq \frac{1}{\|h\|} \|h\|^2 \int_a^b \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} \right| \right) dx = \|h\| \cdot Const$$

co na mocy definicji (13.4) oznacza, że wariacja funkcjonału (13.6) wyraża się wzorem

$$\delta J(h) = \int_a^b \left[h \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u} + h' \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \right] dx. \quad (13.9)$$

Zgodnie ze wzorem (13.5) warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału jest spełnianie warunku $\delta J(h) \equiv 0$. Całkując przez części drugi składnik we wzorze (13.9) otrzymujemy

$$\int_a^b h' \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} dx = \underbrace{h \frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \Big|_{x=a}^{x=b}}_0 - \int_a^b h \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} \right) dx,$$

zatem

$$\delta J(h) = \int_a^b h \left[F_u(x, u, u') - \frac{d}{dx} F_{u'}(x, u, u') \right] dx.$$

Z dowolności funkcji h wynika, że musi być spełnione poniższe równanie (zapisane w uproszczonej postaci z pominięciem argumentów)

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} = 0. \quad (13.10)$$

Równanie to nosi nazwę *równania Eulera*. Jest to właśnie warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału postaci (13.6). Rozwiązania równania Eulera nazywają się *ekstremalami*. Z udowodnionego uprzednio twierdzenia wynika, że funkcjonał J może posiadać ekstrema tylko na zbiorze ekstremal, zależy to jednak od spełnienia pewnych warunków dostatecznych istnienia ekstremum. Warunków tych nie będziemy w tym miejscu omawiać.

P r z y k ł a d 1 (zagadnienie brachistochrony)

Rozważmy funkcjonał opisany wzorem (13.1). Jest on postaci

$$J(u) = \int_a^b F(u, u') dx$$

tzn. funkcja F nie zależy w sposób jawny od x . Można pokazać, że w tym przypadku równanie Eulera (13.10) może być sprowadzone do prostszej postaci

$$F - u'F_{u'} = Const.$$

W przypadku funkcjonału zagadnienia brachistochrony przyjmujemy

$$F(u, u') = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{u(x)}},$$

co prowadzi do równania

$$\frac{\sqrt{1 + (u')^2}}{\sqrt{u}} - \frac{(u')^2}{\sqrt{u}\sqrt{1 + (u')^2}} = Const. \quad (13.11)$$

Wprowadzając parametr $\tau = 2 \operatorname{arctg} u'$ można zapisać rozwiązanie równania (13.11) w postaci parametrycznej

$$x = a(\tau - \sin \tau), \quad u = a(1 - \cos \tau).$$

Jest to przedstawienie parametryczne cykloidy, gdzie stała a zależy od przyjętego warunku brzegowego $u(x_2) = y_2$.

P r z y k ł a d 2 (powierzchnia obrotowa o minimalnym polu)

Zagadnienie znalezienia powierzchni obrotowej o minimalnym polu przechodzącej przez ustalone punkty równoważne jest minimalizacji funkcjonału (13.2). Ponieważ

$$F(u, u') = u(x) \sqrt{1 + (u'(x))^2}$$

nie zależy w sposób jawny od x , więc podobnie jak w poprzednim przykładzie otrzymujemy równanie

$$F - u'F_{u'} = u\sqrt{1 + (u')^2} - \frac{u(u')^2}{\sqrt{1 + (u')^2}} = Const.$$

Łatwo pokazać, że jego rozwiązaniami są wszystkie linie opisane równaniem postaci

$$u = C_1 \cosh \frac{x - C_2}{C_1},$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi zależnymi od przyjętych warunków brzegowych. Otrzymane linie noszą nazwę *krzywych łańcuchowych*.

Zagadnienie ze swobodnymi końcami

Rozważmy funkcjonał (13.6) bez zadanych warunków brzegowych, tzn. poszukajmy krzywej, dla której funkcjonał

$$J(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx$$

osiąga ekstremum, przy założeniu, że końce krzywej $u = u(x)$ leżą na prostych $x = a$, $x = b$. Powtarzając rozumowanie z rozważań dotyczących zagadnienia z nieruchomymi końcami, dochodzimy do ponownie do równania Eulera (13.10) oraz otrzymujemy tzw. *naturalne warunki brzegowe* wyznaczone z równań

$$F_{u'|x=a} = 0, \quad F_{u'|x=b} = 0. \quad (13.12)$$

Warunki te spełnia każda krzywa, na której realizowane jest ekstremum funkcjonału J .

Funkcjonał zależny od więcej niż jednej funkcji

Rozważmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu ekstremów funkcjonału postaci

$$J(u_1, u_2, \dots, u_n) = \int_a^b F(x, u_1(x), \dots, u_n(x), u_1'(x), \dots, u_n'(x)) dx \quad (13.13)$$

przy założeniu, że funkcje u_1, \dots, u_n spełniają pewne warunki brzegowe dla $x = a$ i $x = b$.

Wykorzystując rozwinięcie funkcji F za pomocą wzoru Taylora, można pokazać, że w tym przypadku wariacja δJ funkcjonału (13.13) dana jest wzorem

$$\delta J(h) = \int_a^b \sum_{i=1}^n (F_{u_i} h_i + F_{u_i'} h_i') dx. \quad (13.14)$$

Wzór ten jest uogólnieniem wzoru (13.9). Dobierając w sposób niezależny funkcje h_i łatwo pokazać, że warunek powyższy prowadzi do układu równań Eulera postaci

$$F_{u_i} - \frac{d}{dx} F_{u_i'} = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.15)$$

P r z y k ł a d (zasada najmniejszego działania)

Założmy, że dany jest pewien układ punktów materialnych o masach m_1, m_2, \dots, m_n i współrzędnych (x_i, y_i, z_i) dla $i = 1, 2, \dots, n$. Zakładamy, że układowi temu nie nałożono żadnych więzów.

Energia kinetyczna układu wyraża się wzorem

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Założmy ponadto, że układ posiada energię potencjalną, tzn., że istnieje taka funkcja (potencjał) $U = U(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$, że składowe siły działającej na i -ty punkt są równe odpowiednio

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Wprowadzamy tzw. *funkcję Lagrange'a* rozważanego układu, wzorem

$$L = T - U.$$

Rozważmy teraz zagadnienie minimalizacji funkcjonału

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n, \dot{z}_1, \dots, \dot{z}_n) dt. \quad (13.16)$$

Na mocy układu równań Eulera (13.15) zastosowanego do funkcji

$$F = L = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) - U(t, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)$$

otrzymujemy, że

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{x}_i = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{y}_i = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{z}_i = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

skąd wynika, że

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.17)$$

Równania (13.17) są równaniami ruchu dla układu n punktów materialnych.

Udowodniliśmy w ten sposób następującą zasadę najmniejszego działania.

Ruch układu w przedziale czasowym $(t_0; t_1)$ opisują te funkcje $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, dla których całka (13.16) osiąga minimum.

Funkcjonały zależne od pochodnych wyższych rzędów

Rozważmy teraz funkcyjonały postaci

$$J(u) = \int_a^b F(x, u, u', \dots, u^{(n)}) dx \quad (13.18)$$

z warunkami brzegowymi

$$u^{(i)}(a) = A_i, \quad u^{(i)}(b) = B_i \quad \text{dla } i = 0, 2, \dots, n-1. \quad (13.19)$$

Rozumując analogicznie jak w poprzednich przypadkach można pokazać, że wariacja δJ wyraża się wzorem

$$\delta J(h) = \int_a^b \left(F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{u^{(n)}} \right) h(x) dx.$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum (13.5) wynika następujące równanie zwane *równaniem Eulera-Poissona*

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{u^{(n)}} = 0. \quad (13.20)$$

Funkcjonał zależny od funkcji dwóch zmiennych

Rozważmy teraz przypadek funkcyjonału zależnego od funkcji dwóch zmiennych. Niech Ω będzie obszarem zawartym w \mathbb{R}^2 ograniczonym krzywą $\partial\Omega$. Poszukujemy funkcji $u(x, y)$ takiej, że funkcyjonał

$$J(u) = \iint_{\Omega} F(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)) dx dy \quad (13.21)$$

osiąga wartość ekstremalną. Od funkcji $u(x, y)$ wymagamy, aby spełniała warunek brzegowy postaci

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad (13.22)$$

gdzie φ jest daną funkcją określoną na brzegu $\partial\Omega$.

Zakładając, że F jest klasy C^2 i analizując postać przyrostu ΔJ można wyprowadzić następujący wzór na wariację funkcyjonału

$$\delta J(h) = \iint_{\Omega} (F_u h + F_{u_x} h_x + F_{u_y} h_y) dx dy. \quad (13.23)$$

Przekształcając wzór (13.23) za pomocą wzoru Greena i zakładając, że $h|_{\partial\Omega} = 0$, otrzymujemy ostatecznie, że

$$\delta J(h) = \iint_{\Omega} \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) h(x, y) dx dy. \quad (13.24)$$

Wynika stąd następujące równanie Eulera

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0. \quad (13.25)$$

Równanie (13.25) wraz z warunkiem brzegowym $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ jest sformułowaniem warunku koniecznego dla istnienia ekstremum funkcyjonału (13.21). Jest to równanie różniczkowe cząstkowe.

P r z y k ł a d 1

Rozważmy funkcyjonał

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (13.26)$$

z warunkiem brzegowym $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

W tym przypadku

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2,$$

zatem równanie Eulera (13.25) przybiera postać

$$\Delta u = 0 \quad \text{z warunkiem } u|_{\partial\Omega} = \varphi. \quad (13.27)$$

Oznacza to, że funkcja u jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a.

Łatwo pokazać, że funkcja u będąca rozwiązaniem zagadnienia (13.27) realizuje minimum funkcjonału (13.26).

Niech $u = u_0 + h$, gdzie $h|_{\partial\Omega} = 0$. Wówczas

$$\begin{aligned} J(u) &= J(u_0 + h) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ &+ 2 \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie Greena i uwzględniając fakt, że $\Delta u_0 = 0$ łatwo pokazać, że

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] dx dy = 0,$$

zatem

$$J(u_0 + h) = J(u_0) + \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \geq J(u_0)$$

co kończy dowód.

Przykład 2

Rozważmy funkcjonał

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2uf(x, y) \right] dx dy \quad (13.28)$$

z warunkiem brzegowym $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

W tym przypadku

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2uf,$$

zatem równanie Eulera (13.25) przybiera postać

$$\Delta u = f \quad \text{z warunkiem } u|_{\partial\Omega} = \varphi. \quad (13.29)$$

Jest to zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona.

Przykład 3

Zagadnienie znajdowania powierzchni o minimalnym polu przechodzącej przez daną krzywą w przestrzeni \mathbb{R}^3 prowadzi do poszukiwania minimum funkcjonału

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} dx dy \quad (13.30)$$

z warunkiem $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

W tym przypadku równanie Eulera (13.25) przybiera postać

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (13.31)$$

Fizycznie powierzchnię o minimalnym polu realizuje powierzchnia bańki mydlanej przechodzącej przez zadaną krzywą w przestrzeni.

Funkcjonały zależne od funkcji wielu zmiennych i pochodnych wyższych rzędów

Dla funkcyjonału

$$J(u) = \int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) dx_1 \dots dx_n \quad (13.32)$$

równanie Eulera przybiera postać

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{u_{x_1}} - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} F_{u_{x_n}} = 0. \quad (13.33)$$

Podobnie dla funkcyjonału

$$J(u) = \iint_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy \quad (13.34)$$

można wyprowadzić następujące równanie Eulera

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{u_{yy}} = 0. \quad (13.35)$$

Przykładowo dla funkcyjonału

$$J(u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2uf(x, y) \right] dx dy$$

równanie Eulera (13.35) ma postać

$$\Delta^2 u = f.$$

Dla $f \equiv 0$ jest to równanie biharmoniczne.

13.3 Twierdzenie o minimum funkcyjonału kwadratowego

Z poprzednich rozważań wynika, że zagadnienia poszukiwania ekstremali funkcyjonałów prowadzą do pewnych zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych. Okazuje się, że również zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych związane są z wyznaczeniem ekstremów funkcyjonałów.

Niech H będzie pewną przestrzenią Hilberta, w której rozważane jest równanie

$$Au = f, \quad (13.36)$$

gdzie A jest operatorem określonym na pewnej podprzestrzeni liniowej $D_A \subset H$ o wartościach w przestrzeni H . Zakładamy, że $\overline{D_A} = H$, tzn. D_A jest gęsta w H . Załóżmy również, że A jest operatorem liniowym *symetrycznym*, tzn.

$$(Au, v) = (u, Av) \quad (13.37)$$

dla wszystkich $u, v \in D_A$, oraz *dodatnim*, tzn.

$$(Au, u) \geq 0 \text{ oraz } (Au, u) = 0 \implies u = 0 \text{ dla } u \in D_A. \quad (13.38)$$

T w i e r d z e n i e

Jeśli A jest dodatni w podprzestrzeni D_A , wówczas równanie $Au = f$, gdzie $f \in H$, posiada co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in D_A \subset H$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że gdyby elementy u_1 i u_2 były dwoma różnymi rozwiązaniami tego równania, to

$$0 = Au_1 - Au_2 = A(u_1 - u_2)$$

skąd wynika, że

$$(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0 \implies u_1 - u_2 = 0,$$

a zatem $u_1 = u_2$. ■

T w i e r d z e n i e (o minimum funkcjonału kwadratowego)

Niech A będzie symetryczny i dodatni w podprzestrzeni D_A , niech $f \in H$. Wówczas jeśli równanie $Au = f$ jest spełnione dla $u_0 \in D_A$, tzn. $Au_0 = f$, to funkcjonał

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u) \quad (13.39)$$

osiąga swoją najmniejszą wartość w D_A w punkcie $u = u_0$.

Dla dowodu konieczności warunku wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} F(u) &= (Au, u) - 2(f, u) = (Au, u) - 2(Au_0, u) = \\ &= (Au, u) - (Au_0, u) - (u, Au_0) = (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0) = \\ &= (A(u - u_0), u - u_0) - (Au_0, u_0). \end{aligned}$$

Z warunku (13.38) wynika, że wartość $F(u)$ jest najmniejsza gdy $(A(u - u_0), u - u_0) = 0$, tzn. gdy $u = u_0$.

Dla dowodu implikacji w stronę przeciwną rozważmy funkcję zmiennej $t \in \mathbb{R}$ określoną dla dowolnego $v \in D_A$ wzorem

$$\begin{aligned} F(u_0 + tv) &= (A(u_0 + tv), u_0 + tv) - 2(f, u_0 + tv) = \\ &= t^2(Av, v) + 2t(Au_0, v) - 2t(f, v) + (Au_0, u_0) - 2(f, u_0). \end{aligned}$$

Funkcja ta zgodnie z założeniem ma minimum lokalne w punkcie $t = 0$, zatem

$$\frac{d}{dt}F(u_0 + tv)|_{t=0} = 0$$

tnz.

$$2(Au_0, v) - 2(f, v) = 0 \implies (Au_0 - f, v) = 0 \text{ dla dowolnego } v \in D_A.$$

Na mocy gęstości podprzestrzeni D_A wnioskujemy, że $Au_0 = f$ w H . ■

P r z y k ł a d

Rozważmy równanie

$$(E(x)I(x)u''(x))'' = q(x) \tag{13.40}$$

z warunkami

$$u(0) = u(l) = 0, \quad u'(0) = u'(l) = 0, \tag{13.41}$$

gdzie $E, I \in C^2([0; l])$, $q \in C([0; l])$ oraz $E(x) > 0$, $I(x) > 0$.

Równanie (13.40) opisuje ugięcie pręta o długości l , module sprężystości $E(x)$, momencie bezwładności przekroju względem osi ugięcia $I(x)$, pod działaniem obciążenia $q(x)$. Warunki (13.41) oznaczają, że pręt jest zamocowany na końcach.

Niech $H = L^2(0; l)$, D_A - zbiór funkcji klasy C^4 spełniających warunki brzegowe (13.41), operator A zdefiniowany jest jako

$$A : D_A \rightarrow H, \quad Au = (EIu'')''.$$

Operator ten jest symetryczny, ponieważ na mocy wzoru o całkowaniu przez części otrzymujemy dla $u, v \in D_A$

$$\begin{aligned} (Au, v) &= \int_0^l (EIu'')'' v dx = \underbrace{(EIu'')' v}_{0} \Big|_{x=0}^{x=l} - \int_0^l (EIu'')' v' dx = \\ &= - \underbrace{EIu'' v'}_{0} \Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l EIu'' v'' dx = \int_0^l EIu'' v'' dx. \end{aligned}$$

Analogicznie łatwo przeliczyć, że

$$(u, Av) = \int_0^l EIu'' v'' dx,$$

zatem $(Au, v) = (u, Av)$ dla dowolnych $u, v \in D_A$.

Ponadto

$$(Au, u) = \int_0^l EI(u'')^2 dx \geq 0$$

oraz z równości $(Au, u) = 0$ wynika, że $u'' \equiv 0$, a więc $u(x) = ax + b$. Ponieważ każda funkcja u należąca do podprzestrzeni D_A spełnia jednorodne warunki brzegowe (13.41), więc $u \equiv 0$. Oznacza to, że operator A jest dodatni.

Funkcjonał F jest w tym przypadku postaci

$$F(u) = \int_0^l EI (u'')^2 dx - 2 \int_0^l qu dx \quad (13.42)$$

i wyraża dla danego ugięcia podwojoną energię potencjalną pręta.

Jeśli u_0 jest rozwiązaniem problemu, to rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia o minimum funkcyjonału kwadratowego, łatwo pokazać, że

$$F(u) = \int_0^l EI (u'' - u_0'')^2 dx - \int_0^l EI (u_0'')^2 dx.$$

U w a g a

Twierdzenie o minimum funkcyjonału kwadratowego transformuje problem znalezienia rozwiązania równania $Au = f$ do problemu znalezienia elementu $u_0 \in D_A$ minimalizującego funkcyjonał $F(u)$ na D_A . Twierdzenie to ma charakter warunkowy, tzn. nie gwarantuje a priori istnienia takiego elementu w danej podprzestrzeni D_A . W przypadku, gdy $F(u)$ nie przyjmuje najmniejszej wartości na D_A , zbiór D_A wymaga rozszerzenia. Tą drogą można skonstruować definicję słabego rozwiązania rozważanego zagadnienia brzegowego, równoważną definicji słabego rozwiązania w przestrzeniach Sobolewa $H^k(\Omega)$. ■

13.4 Zadania

W zadaniach 1-7 wyznaczyć ekstremale funkcyjonałów zależnych od jednej funkcji, przyjmując dowolne lecz ustalone warunki brzegowe.

1.

$$J(u) = \int_a^b u' (1 + x^2 u') dx$$

Odp.: $u = \frac{C_1}{x} + C_2$

2.

$$J(u) = \int_a^b [(u')^2 + 2u'u - 16u^2] dx$$

Odp.: $u = C_1 \sin(4x - C_2)$

3.

$$J(u) = \int_a^b [xu' + (u')^2] dx$$

Odp.: $u = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2$

4.

$$J(u) = \int_a^b \frac{1+u^2}{(u')^2} dx$$

Odp.: $u = \sinh(C_1x + C_2)$

5.

$$J(u) = \int_a^b [u^2 + (u')^2 - 2u \sin x] dx$$

Odp.: $u = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$

6.

$$J(u) = \int_a^b [x^2(u')^2 + 2u^2 + 2xu] dx$$

Odp.: $u = C_1x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{3}x \ln|x|$

7.

$$J(u) = 2\pi \int_a^b u \sqrt{1 + (u')^2} dx$$

Odp.: $u = C_1 \cosh \frac{x-C_2}{C_1}$

8. Wyznaczyć ekstremale funkcjonału zależnego od dwóch funkcji, przyjmując dowolne lecz ustalone warunki brzegowe

$$J(u_1, u_2) = \int_a^b [2u_1u_2 - 2u_1^2 + (u_1')^2 - (u_2')^2] dx$$

Odp.: $u_1 = (C_1x + C_2) \cos x + (C_3x + C_4) \sin x$

9. Wyznaczyć ekstremale funkcjonału zależnego od dwóch funkcji

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [2u_1u_2 + (u_1')^2 + (u_2')^2] dx$$

przyjmując warunki brzegowe: $u_1(0) = 0$, $u_1(\frac{\pi}{2}) = 1$, $u_2(0) = 0$, $u_2(\frac{\pi}{2}) = -1$.

Odp.: $u_1 = \sin x$, $u_2 = -\sin x$

W zadaniach 10-12 wyznaczyć ekstremale funkcjonałów zależnych od jednej funkcji, przyjmując dowolne lecz ustalone warunki brzegowe.

10.

$$J(u) = \int_a^b \left[(u'')^2 - 2(u')^2 + u^2 - 2u \sin x \right] dx$$

Odp.: $u = (C_1 + C_2x) \cos x + (C_3 + C_4x) \sin x - \frac{x^2 \sin x}{4}$

11.

$$J(u) = \int_a^b \left[(u''')^2 + 2xu \right] dx$$

Odp.: $u = \frac{x^7}{7!} + C_1x^5 + C_2x^4 + C_3x^3 + C_4x^2 + C_5x + C_6$

12.

$$J(u) = \int_a^b \left[(u''')^2 + u^2 - 2x^3u \right] dx$$

Odp.: $u = C_1x + C_2e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + x^3$

13. Wyznaczyć ekstremale funkcjonału

$$J(u) = \int_a^b \left[(u'')^2 - u^2 + x^2 \right] dx$$

przyjmując warunki brzegowe: $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$, $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Odp.: $u = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

Temat 14

Wstęp do metod przybliżonych

14.1 Wariacyjna definicja rozwiązań uogólnionych

Rozważamy równanie

$$Au = f \quad (14.1)$$

w pewnej przestrzeni Hilberta H . Zakładamy, że operator A określony jest na pewnej podprzestrzeni liniowej $D_A \subset H$ i jego wartości leżą w H . Na mocy twierdzenia o minimum funkcjonału kwadratowego (13.39) wiemy, że jeśli równanie $Au = f$ jest spełnione dla $u_0 \in D_A$, tzn. $Au_0 = f$, to funkcjonał $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$ osiąga swoją najmniejszą wartość w D_A w punkcie $u = u_0$. Nie wiadomo jednak, czy taki element $u_0 \in D_A$ istnieje.

Będziemy teraz usiłowali rozszerzyć D_A do takiego zbioru, na którym funkcjonał $F(u)$ osiąga minimum.

Założmy, że A jest *dodatnio określony*, tzn. symetryczny oraz dla pewnej stałej $C > 0$ zachodzi nierówność

$$(Au, u) \geq C^2 \|u\|^2 \quad (14.2)$$

dla każdego $u \in D_A$.

W podprzestrzeni D_A definiujemy nowy iloczyn skalarny określony wzorem

$$(u, v)_A = (Au, v). \quad (14.3)$$

Łatwo pokazać, że wszystkie aksjomaty iloczynu skalarnego są spełnione. Iloczyn ten zadaje normę w D_A określoną jako

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A}. \quad (14.4)$$

Z założenia (14.2) wynika, że $\|u\|_A \geq C\|u\|$ zatem ciągi zbieżne w normie $\|\cdot\|_A$ są zbieżne także w normie standardowej $\|\cdot\|$.

Niech teraz H_A oznacza uzupełnienie D_A w normie $\|\cdot\|_A$. Przestrzeń liniową H_A nazywamy *przestrzenią Friedrichsa generowaną przez operator A* . Można pokazać, że wzór (14.3) może być w naturalny sposób rozszerzony dla wszystkich $u, v \in H_A$. Podstawowe własności przestrzeni Friedrichsa opisuje następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e

Przestrzeń H_A jest przestrzenią Hilberta. Zbiór D_A jest gęsty w H_A , tzn. dowolny element z przestrzeni H_A może być przybliżony przez elementy z D_A .

■

Rozważmy teraz funkcjonal $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$. Na mocy (14.3) może on być zapisany jako

$$F(u) = (u, u)_A - 2(f, u) \quad \text{dla } u \in D_A. \quad (14.5)$$

Z poprzednich uwag wynika, że wzór (14.5) jest w naturalny sposób określony na H_A .

T w i e r d z e n i e

Niech operator A będzie dodatnio określony na gęstej podprzestrzeni liniowej D_A przestrzeni Hilberta H . Niech H_A będzie przestrzenią Friedrichsa generowaną przez operator A . Wówczas funkcjonal F zdefiniowany na H_A za pomocą wzoru (14.5) przyjmuje na H_A swoją najmniejszą wartość. Element u_0 , dla którego F osiąga swoją najmniejszą wartość jest wyznaczony jednoznacznie.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy zauważyć, że dla ustalonego $f \in H$ wyrażenie (f, u) jest ciągłym funkcjonałem liniowym na H_A , ponieważ na mocy (14.2) zachodzi nierówność

$$|(f, u)| \leq \|f\| \|u\| \leq \frac{1}{C} \|f\| \|u\|_A.$$

Z twierdzenia Riesz wynika istnienie takiego elementu $u_0 \in H_A$, że dla każdego $u \in H_A$ zachodzi

$$(u_0, u)_A = (f, u). \quad (14.6)$$

W takim razie

$$\begin{aligned} F(u) &= (u, u)_A - 2(u_0, u)_A = (u - u_0, u - u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \\ &= \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2, \end{aligned}$$

tzn. $F(u_0) = -\|u_0\|_A^2$ i dla każdego $u \neq u_0$ spełniona jest nierówność $F(u) > F(u_0)$. ■

D e f i n i c j a

Element u_0 minimalizujący funkcjonal (14.5) nazywamy rozwiązaniem uogólnionym równania $Au = f$.

U w a g a 1

Równość $(u_0, u)_A = (f, u)$ nie prowadzi do efektywnego algorytmu skonstruowania rozwiązania u_0 . W celu znalezienia przybliżeń rozwiązania należy rozpatrzyć zagadnienie minimalizacji funkcjonału $F(u)$.

U w a g a 2

Łatwo zauważyć, że jeśli

$$|(u_0, u)_A| = |(f, u)| \leq \frac{1}{C} \|f\| \|u\|_A,$$

to dla $u = u_0$

$$\|u_0\|_A^2 \leq \frac{1}{C} \|f\| \|u_0\|_A, \quad \text{a zatem } \|u_0\|_A \leq \frac{1}{C} \|f\|. \quad (14.7)$$

Gdy v_0 jest rozwiązaniem zagadnienia $Av_0 = g$, u_0 jest rozwiązaniem zagadnienia $Au_0 = f$, to

$$\|u_0 - v_0\|_A \leq \frac{1}{C} \|f - g\| \quad (14.8)$$

co oznacza ciągłą zależność rozwiązania od prawej strony równania. W szczególności, gdy dla pewnych $u_n \in D_A$ oznaczmy $Au_n = f_n$, to

$$\|u_n - u_0\|_A \leq \frac{1}{C} \|f_n - f\| = \frac{1}{C} \|Au_n - f\|, \quad (14.9)$$

tzn. $(Au_n \rightarrow f) \implies (u_n \rightarrow u_0)$.

U w a g a 3

Jeśli $u_0 \in D_A$ minimalizuje $F(u)$ na H_A , to u_0 jest rozwiązaniem zagadnienia $Au = f$. Jeśli jednak $u_0 \notin D_A$, to równanie $Au = f$ nie posiada rozwiązań w D_A .

Istotnie, gdyby $v \in D_A$ było rozwiązaniem równania $Au = f$ w D_A , to $F(v)$ byłoby najmniejszą wartością funkcjonału F w D_A . Ponieważ jednak

$$F(v) = \|v - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 > F(u_0),$$

więc z gęstości zbioru D_A w H_A wynika istnienie elementów $u_n \in D_A$ takich, że

$$u_n \rightarrow u_0, F(u_n) \rightarrow F(u_0) < F(v),$$

co na mocy przyjętego założenia nie jest jednak możliwe.

14.2 Metoda szeregów ortonormalnych

Rozważamy równanie (14.1) w pewnej przestrzeni Hilberta H . Zakładamy, że operator A jest dodatnio określony na pewnej gęstej podprzestrzeni liniowej $D_A \subset H$ i jego wartości leżą w H . Na mocy twierdzenia o minimum funkcjonału kwadratowego (13.39) wiemy, że jeśli równanie $Au = f$ jest spełnione dla $u_0 \in H_A$, tzn. $Au_0 = f$, to funkcjonał $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$ osiąga swoją najmniejszą wartość w H_A w punkcie $u = u_0$.

Zakładamy również, że przestrzeń H_A jest ośrodkowa (wystarczy żądać by H była ośrodkowa, np. $H = L^2(\Omega)$).

Niech (φ_k) będzie układem ortonormalnym zupełnym w H_A . Wówczas zgodnie z teorią szeregów Fouriera w przestrzeniach Hilberta i równością (10.17), u_0 można przedstawić jako

$$u_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k, \quad \text{gdzie } a_k = (u_0, \varphi_k)_A. \quad (14.10)$$

Z definicji iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_A$ wynika, że

$$a_k = (u_0, \varphi_k)_A = (Au_0, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots \quad (14.11)$$

Ze zbieżności szeregu (14.10) w H_A wynika jego zbieżność w H , ponieważ

$$\|u_0 - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\| \leq \frac{1}{C} \|u_0 - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k\|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Powyższe rozważania można sformułować w postaci następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e

Niech A będzie operatorem dodatnio określonym na podprzestrzeni liniowej, gęstej $D_A \subset H$, $f \in H$. Niech (φ_k) będzie układem ortonormalnym zupełnym w H_A . Wówczas rozwiązanie

Jeśli dodatkowo założymy, że A jest operatorem dodatnio określonym (a więc symetrycznym), to łatwo zauważyć, że układ (14.18) jest identyczny z układem równań (14.15) otrzymanym w wyniku stosowania metody Ritza. W tym przypadku otrzymane ciągi przybliżeń są identyczne.

T w i e r d z e n i e

Niech A będzie operatorem dodatnio określonym na D_A , D_A gęsty w H , $f \in H$, H - ośrodkowa przestrzeń Hilberta. Niech (φ_k) będzie bazą w H_A (niekoniecznie ortogonalną) oraz $\varphi_k \in D_A$ dla $k = 1, 2, \dots$. Wówczas ciąg przybliżeń Galerkina, gdzie stałe a_1, a_2, \dots, a_n są wyznaczone z układu równań (14.18) jest zbieżny w H_A do rozwiązania uogólnionego równania $Au = f$. ■

U w a g a 1 (porównanie z metodą Ritza)

Zakres stosowania metody Galerkina jest o wiele szerszy niż metody Ritza. Dla zastosowania warunku (14.16) nie jest konieczne, aby operator A był dodatnio określony, symetryczny ani nawet liniowy. W metodzie Galerkina punktem wyjścia jest równanie $Au = f$, zaś w metodzie Ritza - minimalizacja funkcjonału $F(u)$.

U w a g a 2

Można rozważać dwie różne bazy w przestrzeni H_A , tzn. (φ_k) i (ψ_k) . Poszukujemy przybliżenia rozwiązania uogólnionego równania $Au = f$, podobnie jak poprzednio, w postaci

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k,$$

gdzie stałe a_k wyznaczamy z warunku

$$(Au_n - f, \psi_k) = 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n. \tag{14.19}$$

Metoda ta nosi nazwę metody Galerkina-Pietrowa.

14.5 Metoda najmniejszych kwadratów

Niech A będzie operatorem liniowym określonym na D_A , D_A gęsty w H , H - ośrodkowa przestrzeń Hilberta. Załóżmy, że dany jest układ funkcji (φ_k) w H taki, że $\varphi_k \in D_A$ dla $k = 1, 2, \dots$ oraz $(A\varphi_k)$ stanowi bazę w H (układ taki nazywamy A -bazą w H)

Metoda najmniejszych kwadratów polega na poszukiwaniu ciągu

$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k$$

przybliżeń rozwiązania uogólnionego u_0 równania $Au = f$. Stałe a_k wyznacza się za pomocą warunku

$$\|Au_n - f\|^2 = \min_{v_n} \|Av_n - f\|^2, \tag{14.20}$$

gdzie minimum rozpatruje się po wszystkich funkcjach postaci $v_n = \sum_{k=1}^n b_k \varphi_k$.

1. A - liniowy, $\overline{D}_A = H$;
2. $(A\varphi_k)$ jest bazą w H ;
3. Równanie $Au = f$ ma rozwiązanie $u_0 \in D_A$;
4. Istnieje stała $K > 0$ taka, że dla każdego $u \in D_A$ zachodzi nierówność $\|Au\| \geq K\|u\|$.

14.6 Metoda gradientów

Metoda ta dotyczy operatorów ograniczonych, dodatnio określonych na pewnym gęstym podzbiorze $D_A \subset H$ (nie nadaje się więc do operatorów różniczkowych).

Niech u_0 będzie rozwiązaniem uogólnionym równania $Au = f$ w H . Wówczas u_0 minimalizuje funkcjonal

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u).$$

Funkcjonał ten, jako funkcjonal ograniczony, określony na podzbiorze gęstym w H może być przedłużony na całą przestrzeń H z zachowaniem ograniczoności.

Niech u_1 będzie dowolnym elementem przestrzeni H . Załóżmy, że $Au_1 - f \neq 0$ (w przeciwnym razie $u_1 = u_0$ i procedura jest zakończona). Wówczas poszukujemy takiego elementu v_1 , że

$$\|v_1\| = \|Au_1 - f\| \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt}F(u_1 + tv_1)|_{t=0} = \max_v \frac{d}{dt}F(u_1 + tv)|_{t=0}. \quad (14.23)$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} F(u_1 + tv_1) &= (A(u_1 + tv_1), u_1 + tv_1) - 2(f, u_1 + tv_1) = \\ &= F(u_1) + 2t(Au_1 - f, v_1) + t^2(Av_1, v_1), \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{d}{dt}F(u_1 + tv_1)|_{t=0} = 2(Au_1 - f, v_1).$$

Wyrażenie to osiąga wartość największą gdy $v_1 = Au_1 - f$. Dla wyznaczonego v_1 wyrażenie $F(u_1 + tv_1)$ osiąga wartość najmniejszą gdy

$$t = t_1 = -\frac{(Au_1 - f, v_1)}{(Av_1, v_1)} = -\frac{(v_1, v_1)}{(Av_1, v_1)}. \quad (14.24)$$

Niech teraz $u_2 = u_1 + t_1v_1$. Powtarzamy powyższe rozumowanie dla elementu wyjściowego u_2 i otrzymujemy

$$v_2 = Au_2 - f, \quad t_2 = -\frac{(v_2, v_2)}{(Av_2, v_2)}, \quad u_3 = u_2 + t_2v_2.$$

W ten sam sposób można skonstruować rekurencyjnie kolejne elementy ciągu u_n takie, że

$$v_n = Au_n - f, \quad t_n = -\frac{(v_n, v_n)}{(Av_n, v_n)}, \quad u_{n+1} = u_n + t_nv_n. \quad (14.25)$$

T w i e r d z e n i e

Jeśli istnieją takie stałe dodatnie m i M , że dla każdego $u \in H$ spełniona jest nierówność

$$m\|u\|^2 \leq (Au, u) \leq M\|u\|^2,$$

to otrzymany powyżej ciąg (u_n) zbiega do rozwiązania uogólnionego u_0 równania $Au = f$ w H_A (więc i w H), przy czym zachodzi nierówność

$$\|u_{n+1} - u_0\|_A \leq \|u_1 - u_0\|_A \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^n \quad \text{dla } n = 1, 2, \dots$$

■

14.7 Zadania

1. Rozważyć operator $Au = (EIu'')''$ odpowiadający równaniu ugięcia pręta (13.40) z przykładu z wykładu „Elementy rachunku wariacyjnego” - nr 13. Napisać dla tego operatora układ równań (14.18) występujący w metodzie Galerkinia oraz układ równań (14.13) występujący w metodzie Ritzza. Pokazać, że układy te są identyczne.
2. Niech $H = L^2(0; \pi)$. Rozważmy równanie całkowe

$$(Au)(x) = u(x) - 0,1 \int_0^\pi \sin(x+s) u(s) ds = h(x), \quad \text{gdzie } h \in L^2(0; \pi).$$

Do operatora A zastosować metodę gradientów i wyznaczyć przybliżenie u_2 rozwiązania. Wyznaczyć również rozwiązanie dokładne równania.

Literatura

1. A. N. Tichonow, A. A. Samarski - Równania fizyki matematycznej - PWN, Warszawa, 1963
2. H. Marcinkowska - Wstęp do teorii równań różniczkowych cząstkowych - PWN, Warszawa, 1972
3. H. Marcinkowska - Dystrybucje, przestrzenie Sobolewa, równania różniczkowe - Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 1993
4. L. C. Evans - Równania różniczkowe cząstkowe - Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2002
5. K. Rektorys - Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering - D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston, 1980
6. A. H. Zemanian - Teoria dystrybucji i analiza transformat - PWN, Warszawa, 1969
7. I. M. Gelfand, S. W. Fomin - Rachunek wariacyjny - PWN, Warszawa, 1972
8. V. S. Vladimirov - Equations of Mathematical Physics - Mir Publishers, Moscow, 1984
9. M. M. Smirnow - Zadania z równań różniczkowych cząstkowych - PWN, Warszawa, 1974
10. A. W. Bicadze, D. F. Kaliniczenko - Zbiór zadań z równań fizyki matematycznej - PWN, Warszawa, 1984