Temat 1

Pojęcia podstawowe

1.1 Przegląd wybranych równań i modeli fizycznych

Równaniem różniczkowym cząstkowym rzędu drugiego o n zmiennych niezależnych nazywamy równanie postaci

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, \ldots, u_{x_n x_n}\right) = 0, \tag{1.1}$$

gdzie $u = u\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$.

1.1.1 Równania opisujące ruch falowy

Zjawiska drgań poprzecznych struny jednowymiarowej, drgań podłużnych prętów, drgań elektrycznych w przewodach opisane są równaniem

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f\left(x, t\right), \tag{1.2}$$

które jest szczególnym przypadkiem równania (1.1) dla $n = 2$, $u = u\left(x, t\right)$.

Drgania poprzeczne membrany opisuje równanie

$$u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f\left(x, t\right), \tag{1.3}$$

które spełnia funkcja $u = u\left(x, y, t\right)$ - wychylenie z położenia równowagi ($n = 3$), zaś równanie fali akustycznej jest postaci

$$u_{tt} = c^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right),$$

gdzie $u = u\left(x, y, z, t\right)$ oznacza tzw. potencjał prędkości ($n = 4$).

Wszystkie powyżej rozważane równania można jednolicie zapisać używając tzw. *operatora Laplace'a* $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$ (względem zmiennych przestrzennych) w postaci

$$u_{tt} = c^2 \Delta u + f\left(x_1, \ldots, x_n, t\right). \tag{1.4}$$

1.1.2 Równania przewodnictwa cieplnego i dyfuzji

Zjawisko przewodnictwa cieplnego w pręcie jednowymiarowym opisane jest równaniem

$$u_t = a^2 u_{xx} + f\left(x, t\right), \tag{1.5}$$

gdzie funkcja $u = u(x,t)$ oznacza temperaturę w punkcie x, w chwili t, zaś f opisuje działające źródła ciepła. Również zjawisko dyfuzji gazu lub cieczy opisane jest równaniem (1.5), gdzie u oznacza stężenie obserwowanego składnika.

Rozchodzenie się ciepła w przestrzeni można opisać równaniem

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x,y,z,t),$$

gdzie Δ jest operatorem Laplace'a $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$.

1.1.3 Zagadnienia prowadzące do równania Laplace'a i równania Poissona

Stacjonarne (niezmienne w czasie) pole temperatur $u(x,y,z)$ spełnia *równanie Laplace'a*

$$\Delta u = 0, \tag{1.6}$$

co wynika bezpośrednio z równania (1.3), w którym $f \equiv 0$. Powyższe równanie spełnione jest także przez potencjał pola grawitacyjnego i elektrostatycznego w próżni.

Gdy gęstość masy (ładunków elektrostatycznych) wynosi ρ, to wówczas odpowiednie potencjały spełniają tzw. *równanie Poissona*

$$\Delta u = -4\pi\rho.$$

Szeroka klasa zagadnień związanych z drganiami ustalonymi prowadzi do tzw. *równania Helmholtza*

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

1.2 Klasyfikacja prawie-liniowych r.r.cz. II rzędu dla n=2

Szczególnie ważną rolę odgrywają *prawie-liniowe równania różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu.* Są to równania postaci

$$A(x,y)\,u_{xx} + 2B(x,y)\,u_{xy} + C(x,y)\,u_{yy} + M(x,y,u,u_x,u_y) = 0. \tag{1.7}$$

W szczególności, równania (1.2), (1.5) i (1.6) dla $n = 2$ są tej postaci.

Wprowadzamy wyróżnik $\Delta(x,y) = B^2(x,y) - A(x,y)\,C(x,y)$ i w zależności od jego znaku mówimy, że równanie (1.7) jest w punkcie (x,y) typu:

- *hiperbolicznego* $\Leftrightarrow \Delta(x,y) > 0$,
- *parabolicznego* $\Leftrightarrow \Delta(x,y) = 0$,
- *eliptycznego* $\Leftrightarrow \Delta(x,y) < 0$.

Równanie (1.7) nazywamy hiperbolicznym (parabolicznym, eliptycznym) w obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$, jeśli jest ono hiperboliczne (paraboliczne, eliptyczne) w każdym punkcie obszaru D.

Załóżmy, że dane jest przekształcenie $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ określone dla $(x,y) \in D$. Zakładamy, że jest ono *nieosobliwe*, tzn. jego jakobian spełnia warunek

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1.8}$$

T w i e r d z e n i e
Typ równania (1.7) jest niezmienniczy ze względu na nieosobliwą zamianę zmiennych (1.8).

Dowód twierdzenia wynika z faktu, że po dokonaniu zamiany zmiennych w równaniu jego „nowy"wyróżnik Δ' spełnia zależność

$$\Delta' = \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2 \Delta,$$

a zatem znaki wyrażeń Δ i Δ' są takie same. ■

Prawdziwe są następujące twierdzenia dotyczące poszczególnych typów równań prawie-liniowych postaci (1.7).

T w i e r d z e n i e
Jeśli równanie (1.7) jest hiperboliczne w obszarze D i $A \neq 0$ lub $C \neq 0$, to istnieje nieosobliwe przekształcenie $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, $(x,y) \in D$ takie, że równanie (1.7) we współrzędnych ξ, η przybiera postać

$$u_{\xi\eta} + G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \tag{1.9}$$

zwaną *pierwszą postacią kanoniczną* równania (1.7) w przypadku hiperbolicznym. Funkcje $\xi(x,y)$ i $\eta(x,y)$ są całkami pierwszymi układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{dy}{dx} = -m_1, \quad \frac{dy}{dx} = -m_2,$$

gdzie

$$m_{1,2}(x,y) = \frac{-B(x,y) \pm \sqrt{\Delta(x,y)}}{A(x,y)}.$$

■

T w i e r d z e n i e
Jeżeli równanie (1.7) jest paraboliczne w obszarze D i $A \neq 0$, to istnieje nieosobliwe przekształcenie $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, $(x,y) \in D$ takie, że równanie (1.7) we współrzędnych ξ, η przybiera postać

$$u_{\eta\eta} + G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \tag{1.10}$$

zwaną *postacią kanoniczną* równania typu parabolicznego o dwóch zmiennych niezależnych. Funkcja $\xi(x,y)$ jest całką pierwszą równania różniczkowego zwyczajnego

$$\frac{dy}{dx} = -m, \text{ gdzie } m = -\frac{B(x,y)}{A(x,y)}.$$

Funkcję $\eta = \eta(x,y)$ przyjmujemy w sposób dowolny, ale tak, by para $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ tworzyła nieosobliwe przekształcenie obszaru D, tzn. aby był spełniony warunek (1.8). ■

T w i e r d z e n i e
Jeżeli równanie (1.7) jest eliptyczne w obszarze D i A, B, C są analityczne, to istnieje nieosobliwe przekształcenie $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$, $(x,y) \in D$ takie, że równanie (1.7) we współrzędnych ξ, η przybiera postać

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0 \tag{1.11}$$

zwaną *postacią kanoniczną* równania typu eliptycznego o dwóch zmiennych niezależnych. Funkcje $\xi(x,y)$ i $\eta(x,y)$ określone są zależnościami $\xi(x,y)=\mathrm{Re}(\varphi(x,y))$, $\eta(x,y)=\mathrm{Im}(\varphi(x,y))$, gdzie $\varphi(x,y)$ jest całką pierwszą, równania różniczkowego zwyczajnego

$$\frac{dy}{dx}=-m,\ \text{gdzie}\ m=\frac{-B(x,y)+i\sqrt{-\Delta(x,y)}}{A(x,y)}.$$

■

1.3 Uwagi o klasyfikacji liniowych r.r.cz. II rzędu dla n>2

Dla prostoty rozważmy przypadek równania liniowego o współczynnikach rzeczywistych postaci

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}+cu+f=0,\quad (a_{i,j}=a_{j,i}) \tag{1.12}$$

gdzie współczynniki a, b, c, f zależą od $x_1,x_2,\dots,x_n$.

Z równaniem tym związana jest forma kwadratowa zmiennych $y_1,y_2,\dots,y_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n}\mathring{a}_{i,j}y_iy_j, \tag{1.13}$$

gdzie $\mathring{a}_{i,j}$oznacza wartość współczynnika $a_{i,j}$ w pewnym punkcie $P\left(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2,\dots,\mathring{x}_n\right)$. Macierz $\left[\mathring{a}_{i,j}\right]$ formy (1.13) możemy sprowadzić do postaci kanonicznej, w której na przekątnej mogą znajdować się tylko liczby 1, -1 lub 0, zaś wszystkie elementy poza przekątną są równe zero. Zgodnie z twierdzeniem o bezwładności form kwadratowych liczba współczynników dodatnich, ujemnych i równych zeru jest niezmiennicza względem przekształcenia liniowego sprowadzającego formę (1.13) do postaci kanonicznej (zauważmy, że postać kanoniczna formy kwadratowej nie jest jednoznacznie wyznaczona).

Niech $\overline{a}_{i,j}$ oznaczają współczynniki formy (1.13) w postaci kanonicznej. W zależności od zachowania się współczynników $\overline{a}_{i,i}$ wprowadzamy definicję typu równania (1.12).

D e f i n i c j a
Mówimy, że równanie (1.12) jest w punkcie $P\left(\mathring{x}_1,\mathring{x}_2,\dots,\mathring{x}_n\right)$ typu

- *eliptycznego*, jeżeli wszystkie współczynniki $\overline{a}_{i,i}$ dla $i=1,2,\dots,n$ mają ten sam znak;
- *hiperbolicznego*, jeżeli $n-1$ współczynników $\overline{a}_{i,i}$ ma ten sam znak, zaś pozostały współczynnik ma znak przeciwny;
- *ultrahiperbolicznego*, jeżeli wśród współczynników $\overline{a}_{i,i}$ jest m współczynników jednego znaku $(m>1)$, a $n-m$ współczynników ma znak przeciwny;
- *parabolicznego*, jeżeli chociaż jeden ze współczynników $\overline{a}_{i,i}$ jest równy zeru.

■

T w i e r d z e n i e
W zależności od typu równania w punkcie $P\left(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_n\right)$ można je sprowadzić w tym punkcie do jednej z następujących postaci kanonicznych:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n} + \Phi = 0; \qquad \textit{(typ eliptyczny)}$$

$$u_{x_1x_1} - \sum_{i=2}^{n} u_{x_ix_i} + \Phi = 0; \qquad \textit{(typ hiperboliczny)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i} - \sum_{i=m+1}^{n} u_{x_ix_i} + \Phi = 0 \quad (m > 1); \qquad \textit{(typ ultrahiperboliczny)}$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_ix_i}) + \Phi = 0 \quad (m \geq 1). \qquad \textit{(typ paraboliczny)}$$

■

1.4 Zagadnienie Cauchy'ego dla równania liniowego

Rozważmy liniowe r.r.cz. rzędu m postaci

$$u^{(m)}_{x_n \ldots x_n} = \sum_{|\alpha| \leq m,\, a_n < m} a_\alpha \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) D^\alpha u + f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \tag{1.14}$$

w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, który ma niepuste przecięcie z płaszczyzną $x_n = 0$.

Zagadnieniem Cauchy'ego (zagadnieniem początkowym) dla równania (1.14) nazywamy zagadnienie polegające na wyznaczeniu rozwiązania tego równania spełniającego jednocześnie następujące *warunki początkowe*

$$u^{(k)}_{x_n \ldots x_n} \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0\right) = \varphi_k \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\right) \ \text{ dla } \ \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0\right) \in \Omega \tag{1.15}$$

i $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

■

Następujące twierdzenie określa warunki wystarczające istnienia lokalnego rozwiązania powyższego zagadnienia początkowego.

T w i e r d z e n i e (*Cauchy'ego-Kowalewskiej*)
Jeżeli:

1° współczynniki a_α i wyraz wolny f w równaniu (1.14) są funkcjami analitycznymi w obszarze Ω,

2° funkcje φ_k $(k = 0, 1, \ldots, m-1)$ są analityczne w obszarze ω będącym przecięciem Ω i płaszczyzny $x_n = 0$,

to zagadnienie Cauchy'ego (1.14)-(1.15) ma dokładnie jedno rozwiązanie analityczne, określone w pewnym otoczeniu Ω' obszaru ω. Obszar Ω' zależy od obszaru analityczności danych funkcji.

■

1.5 Zagadnienia graniczne poprawnie postawione

Dla równań różniczkowych cząstkowych rozważamy zwykle tzw. *zagadnienia graniczne* polegające na znalezieniu rozwiązania równania spełniającego pewne dodatkowe warunki - *warunki początkowe* (określone w pewnej chwili czasu np. $t = 0$) lub/i *warunki brzegowe* (określone zwykle na brzegu rozważanego obszaru przestrzennego). Warunki te nazywamy ogólnie *warunkami granicznymi.*

D e f i n i c j a
Mówimy, że zagadnienie graniczne jest *poprawnie postawione*, jeżeli:

- przy określonych warunkach granicznych istnieje rozwiązanie tego zagadnienia,
- rozwiązanie to jest jednoznaczne,
- rozwiązanie to zależy w sposób ciągły od zadanych warunków granicznych (jest *stabilne*).

■

Sens trzeciego warunku powyższej definicji polega na tym, że gdyby w modelu matematycznym opisującym zjawisko fizyczne nie było ciągłej zależności rozwiązania od warunków granicznych zadania, to praktycznie dwa jednakowe układy warunków (tj. takie, ze różnice między nimi mieszczą się w granicach błędów pomiarowych) mogłyby odpowiadać dwóm istotnie różnym przebiegom zjawiska. Oznacza to, że zjawisko nie byłoby wyznaczalne fizycznie.

Nie każde zagadnienie graniczne dla równania różniczkowego cząstkowego jest poprawnie postawione. Przykładem zagadnienia, które nie jest zagadnieniem poprawnie postawionym może być np. następujące zagadnienie.

P r z y k ł a d
Wyznaczyć funkcję $u(x, y)$ spełniającą równanie Laplace'a

$$\begin{gathered}\Delta u = 0 \text{ z warunkami} \\ u(x,0) = \varphi(x)\,,\ u_y(x,0) = \psi(x) \ \text{ dla } x \in \mathbb{R}.\end{gathered}$$

Z teorii funkcji zmiennej zespolonej wynika, że powyższe zagadnienie posiada jednoznaczne rozwiązanie. Łatwo zauważyć, że funkcja

$$u(x,y) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda x\cosh\lambda y$$

dla dowolnej wartości parametru λ jest rozwiązaniem powyższego zagadnienia dla $\varphi(x) = \frac{1}{\lambda}\sin\lambda x$ i $\psi(x) = 0$. Ponieważ dla dużych wartości λ warunki graniczne różnią się dowolnie mało od zera, więc gdyby zagadnienie było stabilne, to również rozwiązanie powinno być bliskie zeru, ale tak nie jest.

■

Należy pamiętać, że mówiąc o stabilności zagadnienia trzeba najpierw precyzyjnie określić co to znaczy, że rozwiązanie zagadnienia zależy w sposób ciągły od warunków granicznych.

1.6 Zadania

1. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 6\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

2. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

3. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0, \quad \text{gdzie } \alpha, \beta, c \in \mathbb{R}.$$

4. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3 + \sin^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

5. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

6. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\operatorname{tg}^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\operatorname{tg} x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

7. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

8. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\frac{\partial u}{\partial x} + 4y\frac{\partial u}{\partial y} + 16x^4 u = 0.$$

9. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\left(1 + x^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

10. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

11. Określić typ i sprowadzić do postaci kanonicznej równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}.$$

12. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = -x + y$, $\zeta = 2x - 2y + z$ przekształcić równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

13. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = \frac{1}{2}(x+y+z)$, $\zeta = -\frac{1}{2}(3x+y-z)$ przekształcić równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

14. Stosując podstawienie $\xi = x+y$, $\eta = -x+y$, $\zeta = -x-y+z$ przekształcić równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

15. Stosując podstawienie $\xi = y+z$, $\eta = -y+z$, $\zeta = \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{\sqrt{6}}{2}z$ przekształcić równanie
$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - u = 0.$$

16. Stosując podstawienie $\xi = x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, $\eta = -\frac{1}{2}(y+z)$, $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{2}}(y-z)$ przekształcić równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 8u = 0.$$

17. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(3x-y)$, $\zeta = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(x+y-4z)$ przekształcić równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial z} + 4u = 0.$$

18. Stosując podstawienie $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}x$, $\eta = \frac{3}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}y$, $\zeta = x+z$ przekształcić równanie
$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 3u + y - 2z = 0.$$

19. Stosując podstawienie $\xi = y+z$, $\eta = -y-2z$, $\zeta = x-z$ przekształcić równanie
$$3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 4u = 0.$$

20. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = -2x+y$, $\zeta = -x+z$ przekształcić równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2u = 0.$$

21. Stosując podstawienie $\xi = x$, $\eta = -2x+y$, $\zeta = -3x+z$ przekształcić równanie
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - 2\frac{\partial u}{\partial x} - 4\frac{\partial u}{\partial y} - 6\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

22. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi(x+y-\cos x) + \psi(x-y+\cos x)$.

23. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi(3x - y) + \psi(2x - y)$.

24. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi(x + y) + \psi(3x + 2y)$.

25. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi(y - x) + \psi(y - 2x)\exp\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

26. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{5}{16}u = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = [\varphi(x + 3y) + \psi(3x + y)]\exp\left(\frac{7x+y}{16}\right)$.

27. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - 4\exp(x) = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = 2\exp(x) + \exp\left(\frac{x+2y}{2}\right)[\varphi(x) + \psi(x + 2y)]$.

28. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - 2\frac{\partial u}{\partial y} + 4\exp\left(\frac{5x + 3y}{2}\right) = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \exp\left(\frac{x+y}{2}\right)[(2x + y)\exp(4x + y) + \varphi(2x + y) + \psi(4x + y)]$.

29. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{dla } x > 0,\ y > 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) + \psi\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$.

30. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi(y - x) + \frac{1}{y-x}\psi(y^2 - x^2)$.

31. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3 + \sin^2 x\right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + (\sin x - \cos x - 2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi(y + 2x + \sin x) + \psi(y - 2x + \sin x) \exp\left(-\frac{y+2x+\sin x}{4}\right)$.

32. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\exp(-2x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \exp(-2y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \exp(-2x) \frac{\partial u}{\partial x} + \exp(-2y) \frac{\partial u}{\partial y} + 8\exp(y) = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \exp(y)[\exp(2y) - \exp(2x)] + \varphi[\exp(y) + \exp(x)] + \psi[\exp(y) - \exp(x)]$.

33. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \sqrt{\frac{x}{y}}\varphi(xy) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

34. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 1 = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = x\varphi(y - x) + \psi(y - x) + \frac{1}{8}x^2$.

35. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi(x,y)\ln y + \psi(xy)$.

36. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Odp.: $u(x,y) = \frac{1}{x}[\varphi(x - y) + \psi(x + y)]$.
Wsk.: Zastosować podstawienie $v(x,y) = xu(x,y)$.

37. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$(x - y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \frac{1}{x-y}(\varphi(x) - \psi(y))$.
Wsk.: Zastosować podstawienie $v(x,y) = (x - y)u(x,y)$.

38. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} + xyu = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)[\varphi(x) + \psi(y)]$.

39. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{16}u - 16x \exp\left(-\frac{x+y}{16}\right) = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = \left[\varphi(y-3x) + \psi(3y-x) - \frac{1}{8}x(y-3x)(3y-x)\right] \exp\left(-\frac{x+y}{16}\right)$.
Wsk.: Po sprowadzeniu równania do postaci kanonicznej zastosować podstawienie: $v(\xi,\eta) = w(\xi,\eta)\exp\left(\frac{\xi-\eta}{32}\right)$.

40. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2zx\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 0.$$

Odp.: $u(x,y,z) = (z-y)\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.
Wsk.: Zastosować zamianę zmiennych: $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = \frac{z}{x}$, $\zeta = z - y$.

41. Znaleźć rozwiązanie ogólne równania

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \text{gdzie } b^2 = ac,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$$

Odp.: $u(x,y,t) = \varphi(x + t\sqrt{a}, y + t\sqrt{c}) + \psi(x - t\sqrt{a}, y - t\sqrt{c})$.

42. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x,0) = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0.$$

Odp.: $u(x,y) = 3x^2 + y^2$.

43. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x,y)\,|_{y=\sin x} = x + \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,|_{y=\sin x} = \sin x.$$

Odp.: $u(x,y) = x + \cos(x - y + \sin x)$.

44. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\exp(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u(x,0) = -\frac{1}{2}x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = -\sin x.$$

Odp.: $u(x,y) = -\frac{1}{2}x^2 + \cos[x - 1 + \exp(y)] - \cos x$.

45. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3+\cos^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u\left(x,y\right)|_{y=\cos x} = \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\left(x,y\right)|_{y=\cos x} = \frac{1}{2}\exp\left(x\right).$$

Odp.: $u\left(x,y\right) = \exp\left(x\right)\sinh\left[\frac{1}{2}\left(y-\cos x\right)\right] + \sin x \cos\left[\frac{1}{2}\left(y-\cos x\right)\right]$.

46. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \left(3+\cos^2 x\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \left(2-\sin x-\cos x\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u\left(x,y\right)|_{y=\cos x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\left(x,y\right)|_{y=\cos x} = \exp\left(-\frac{x}{2}\right)\cos x.$$

Odp.: $u\left(x,y\right) = 2\exp\left[-\frac{2x-y+\cos x}{4}\right]\cos x \sin\left[\frac{1}{2}\left(y-\cos x\right)\right]$.

47. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1+\sin x+\cos x\right)\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u\left(x,y\right)|_{y=-\cos x} = 1+2\sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\left(x,y\right)|_{y=-\cos x} = \sin x.$$

Odp.: $u\left(x,y\right) = 1-\sin\left(y-x+\cos x\right) + \exp\left(y+\cos x\right)\sin\left(x+y+\cos x\right)$.

48. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4\cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\left(x,0\right) = \psi\left(x\right).$$

Odp.: $u\left(x,y\right) = \frac{3}{2}\varphi\left(x+y\right)\exp\left(-y\right) - \frac{1}{2}\varphi\left(x+3y\right) +$

$+\frac{1}{4}\exp\left(-\frac{x+3y}{2}\right)\int\limits_{x+y}^{x+3y}\left[3\varphi\left(\alpha\right)+2\psi\left(\alpha\right)\right]\exp\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha.$

49. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\left(1-y^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2y}{1+y^2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\left(x,0\right) = \psi\left(x\right).$$

Odp.: $u\left(x,y\right) = \varphi\left(x-\frac{2}{3}y^3\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{x-(2/3)y^3}^{x+2y}\psi\left(\alpha\right)d\alpha.$

50. Rozwiązać zagadnienie Cauchy'ego

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4\exp(y) = 0,$$

$$u(0,y) = \varphi(y), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = \psi(y).$$

Odp.: $u(x,y) = [1 + 2x - \exp(2x)]\exp(y) + \varphi(y) + \frac{1}{2}\int\limits_{y}^{2x+y} \psi(\alpha)\,d\alpha.$

51. Rozwiązać zagadnienie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x,y)\left.\right|_{y+x=0} = \varphi(x), \qquad u(x,y)\left.\right|_{y-x=0} = \psi(x), \;\; \varphi(0) = \psi(0).$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right) + \psi\left(\frac{x+y}{2}\right) - \varphi(0).$

52. Rozwiązać zagadnienie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x,y)\left.\right|_{y-x=0} = \varphi(x), \qquad u(x,y)\left.\right|_{y-5x=0} = \psi(x), \;\; \varphi(0) = \psi(0).$$

Odp.: $u(x,y) = \varphi\left(\frac{y-5x}{4}\right) + \psi\left(\frac{y-x}{4}\right) - \varphi(0).$