Wykład 4

Równanie przewodnictwa cieplnego (I)

4.1 Zagadnienie Cauchy'ego dla pręta nieograniczonego

Rozkład temperatury w jednowymiarowym nieograniczonym pręcie opisuje funkcja $u = u(x,t)$, spełniająca jednorodne równanie przewodnictwa cieplnego

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{4.1}$$

Funkcja u przedstawia temperaturę pręta w punkcie x, w chwili czasu t.

Zakładamy, że dany jest początkowy rozkład temperatury

$$u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

gdzie φ jest funkcja daną.

Zagadnienie polegajace na znalezieniu rozwiązania równania (4.1) spełniającego warunek (4.2) nazywamy *zagadnieniem Cauchy'ego* (*zagadnieniem początkowym*) dla równania przewodnictwa.

4.1.1 Uogólniona metoda Fouriera

Stosując metodę rozdzielenia zmiennych $u(x,t) = X(x)T(t)$ do równania (4.1) otrzymujemy równość

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2 = const.$$

Wynika stąd, że dla dowolnej wartości rzeczywistej parametru λ funkcja postaci

$$u_\lambda(x,t) = \exp\left(-a^2\lambda^2 t\right)[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x] \tag{4.3}$$

spełnia równanie (4.1) - być może bez zadanego warunku początkowego (4.2). Wyrażenia $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ są w tym momencie dowolnymi funkcjami zmiennej λ.

Zastosujemy teraz następujące twierdzenie pomocnicze.

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcja $U(x,t,\alpha)$ dla każdej wartości rzeczywistej parametru α spełnia względem zmiennych (x,t) liniowe równanie różniczkowe $LU = 0$, to całka postaci

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x,t,\alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha \tag{4.4}$$

jest także rozwiązaniem tego równania, o ile można obliczyć pochodne występujące w równaniu $LU = 0$ przez różniczkowanie pod znakiem całki.

■

Stosując powyższe twierdzenie do funkcji $U(x,t,\lambda) = u_\lambda(x,t)$ przedstawiamy rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego w postaci

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a^2\lambda^2 t\right)[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda. \tag{4.5}$$

Podstawiając $t = 0$ i uwzględniając warunek początkowy (4.2) otrzymujemy

$$\varphi(x) = u(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda. \tag{4.6}$$

Z równości (4.6) należy wyznaczyć niewiadome funkcje $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$.

Zadanie to jest równoważne przedstawieniu danej funkcji φ w postaci tzw. *całki Fouriera.* Korzystając z teorii szeregów Fouriera, dowodzi się prawdziwości następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcja $\varphi(x)$ jest sumą swojego szeregu Fouriera w każdym przedziale postaci $(-l, l)$ oraz jest bezwzględnie całkowalna na osi rzeczywistej, tzn. zbieżna jest całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|\,dx$, to funkcję $\varphi(x)$ przedstawić można w postaci całki Fouriera

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\,d\lambda, \tag{4.7}$$

gdzie

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)\cos\lambda\tau d\tau, \quad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau)\sin\lambda\tau d\tau. \tag{4.8}$$

■

Z powyższego twierdzenia wynika bezpośrednio, że wzór (4.5), w którym funkcje $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ określone są wzorami (4.8) przedstawia rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego (4.1)-(4.2).

4.1.2 Rozwiązanie podstawowe, całka Poissona

W celu dalszego przekształcenia wzoru (4.5) wykorzystamy następujący lemat rachunkowy.

L e m a t

Zachodzi tożsamość

$$\int_{0}^{+\infty} \exp\left[-a^2\lambda^2 t\right]\cos\lambda(\tau - x)\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{(\tau - x)^2}{4a^2 t}\right]. \tag{4.9}$$

Dla dowodu wzoru, przekształcamy całkę po lewej stronie równości (4.9) jak następuje.

$$\int_0^{+\infty} \exp\left[-a^2\lambda^2 t\right]\cos\lambda(\tau-x)\,d\lambda = \left|\begin{array}{ll} a\lambda\sqrt{t}=z, & \lambda(\tau-x)=\mu z \\ d\lambda=\frac{dz}{a\sqrt{t}}, & \mu=\frac{\tau-x}{a\sqrt{t}} \end{array}\right| = \frac{1}{a\sqrt{t}}\int_0^{+\infty}\exp\left[-z^2\right]\cos\mu z dz. \tag{4.10}$$

Oznaczmy $\Phi(\mu)=\int\limits_0^{+\infty}\exp\left[-z^2\right]\cos\mu z dz$. Wtedy

$$\Phi'(\mu) = -\int_0^{+\infty}\exp\left[-z^2\right]z\sin\mu z dz = \frac{1}{2}\exp\left[-z^2\right]\sin\mu z\Big|_0^{+\infty} - \frac{\mu}{2}\int_0^{+\infty}\exp\left[-z^2\right]\cos\mu z dz = -\frac{\mu}{2}\Phi(\mu).$$

Mamy więc

$$\Phi'(\mu)+\frac{\mu}{2}\Phi(\mu)=0,$$

skąd wynika, że $\Phi(\mu)=C\exp\left[-\frac{\mu^2}{4}\right]$.

Ponieważ $C=\Phi(0)$, więc

$$C=\int_0^{+\infty}\exp\left[-z^2\right]dz=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

W takim razie $\Phi(\mu)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left[-\frac{\mu^2}{4}\right]$ i ze wzoru (4.10) wynika, że

$$\int_0^{+\infty}\exp\left[-a^2\lambda^2 t\right]\cos\lambda(\tau-x)\,d\lambda=\frac{1}{a\sqrt{t}}\Phi(\mu)=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\exp\left[-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}\right],$$

co kończy dowód lematu.

■

Podstawiając wzory (4.8) do (4.5) i stosując pewne elementarne wzory trygonometryczne otrzymujemy

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\exp\left(-a^2\lambda^2t\right)\cos\lambda(\tau-x)\,d\tau\right]d\lambda.$$

Zamieniając w powyższym wzorze kolejność całkowania i stosując poprzedni lemat - wzór (4.9) otrzymujemy

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}\exp\left(-a^2\lambda^2t\right)\cos\lambda(\tau-x)\,d\lambda\right]\varphi(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\tau)\exp\left[-\frac{(\tau-x)^2}{4a^2t}\right]d\tau. \tag{4.11}$$

Wprowadzając oznaczenie

$$F(x,t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(\tau - x)^2}{4a^2 t}\right] \tag{4.12}$$

możemy wzór (4.11) zapisać w prostszej postaci

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) F(x,t,\tau)\, d\tau. \tag{4.13}$$

Funkcję $F(x,t,\tau)$ określoną wzorem (4.12) nazywamy *rozwiązaniem podstawowym równania przewodnictwa cieplnego,* zaś wzór (4.13) opisujący rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego - *całką Poissona.*

4.1.3 Przykłady

P r z y k ł a d 1

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe (4.1)-(4.2) dla $a = 1$ oraz φ określonej wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3 & \text{dla } |x| < 1 \\ 1.5 & \text{dla } |x| = 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Ze wzorów (4.8) wynika, że

$$A(\lambda) = \frac{3\sin\lambda}{\lambda\pi}, \quad B(\lambda) = 0,$$

zatem zgodnie ze wzorem (4.5)

$$u(x,t) = \frac{6}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\lambda^2 t\right) \frac{\sin\lambda \cos\lambda x}{\lambda} d\lambda$$

lub w postaci równoważnej (4.11)

$$u(x,t) = \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-1}^{+1} \exp\left[-\frac{(\tau - x)^2}{4t}\right] d\tau.$$

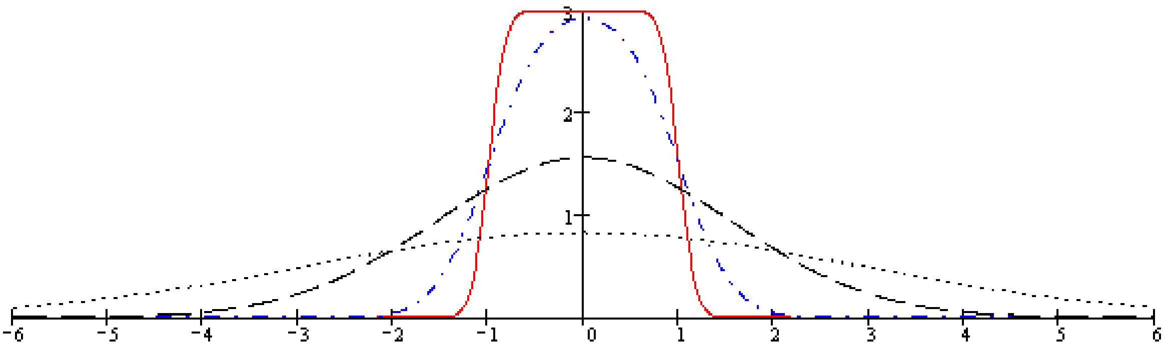
Następny rysunek przedstawia wykresy temperatury w różnych chwilach czasu. Poszczególne rodzaje linii odpowiadają czasom:

linia czerwona ciągła - $t = 0,01$;

linia niebieska „kreska-kropka" - $t = 0,1$;

linia czarna „kreska-kreska" - $t = 1$;

linia czarna „kropka-kropka" - $t = 4$.



Dla wartości t bliskich zeru wykres przybliża funkcję φ, która jest w tym przykładzie nieciągła, dla dużych t następuje wyrównywanie temperatury wewnątrz pręta.

P r z y k ł a d 2

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1$ oraz φ określonej wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} 3(1-|x|) & \text{dla } |x| \le 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1. \end{cases}$$

Podobnie jak poprzednio, wyznaczamy $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $u(x,t)$

$$A(\lambda) = \frac{3(1-\cos\lambda)}{\lambda^2\pi}, \quad B(\lambda) = 0,$$

$$u(x,t) = \frac{6}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-\lambda^2 t\right) \frac{(1-\cos\lambda)\cos\lambda x}{\lambda^2} d\lambda =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-1}^{+1} (1-|r|)\exp\left[-\frac{(r-x)^2}{4t}\right] dr.$$

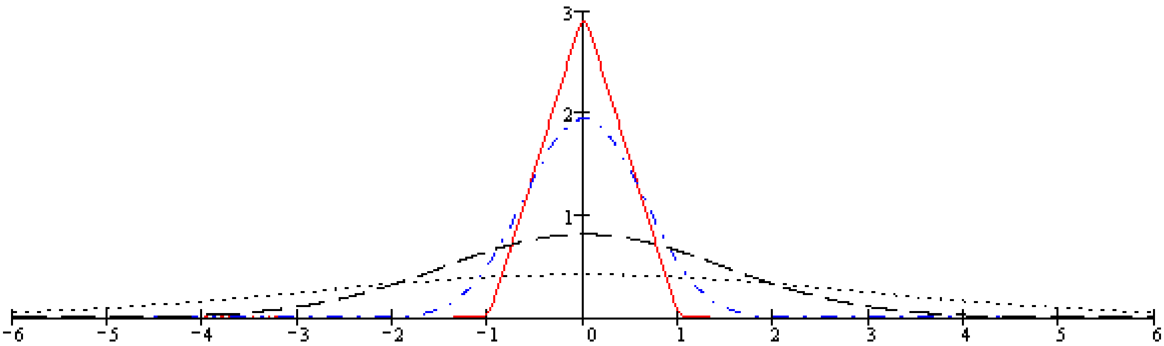
Kolejny rysunek przedstawia wykresy temperatury w różnych chwilach czasu. Poszczególne rodzaje linii odpowiadają czasom:

linia czerwona ciągła - $t = 0,001$;

linia niebieska „kreska-kropka” - $t = 0,1$;

linia czarna „kreska-kreska” - $t = 1$;

linia czarna „kropka-kropka” - $t = 4$.



Podobnie jak w przykładzie poprzednim, dla $t = 0.001$ otrzymujemy wykres przybliżający funkcję φ, zaś dla dużych t następuje wyrównywanie temperatury wewnątrz pręta.

P r z y k ł a d 3
Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1$ oraz φ określonej wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{dla } x > 0 \\ T_2 & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

W celu rozwiązania tego zagadnienia skorzystamy bezpośrednio ze wzoru (4.11), który pozostaje prawdziwy nawet wówczas, gdy funkcja φ nie spełnia wszystkich założeń wymaganych dla przedstawienia jej za pomocą całki Fouriera.

Korzystając z faktu, że $\int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left(-s^2\right) ds = \int\limits_{0}^{+\infty} \exp\left(-s^2\right) ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, otrzymujemy

$$u(x,t) = \frac{T_2}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left[-\frac{(\tau - x)^2}{4a^2 t}\right] d\tau + \frac{T_1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\tau - x)^2}{4a^2 t}\right] d\tau =$$

$$= \left| \ \frac{\tau - x}{2\sqrt{t}} = s, \quad d\tau = 2\sqrt{t} ds \ \right| = \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{t}}} \exp\left(-s^2\right) ds + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} \exp\left(-s^2\right) ds =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} \exp\left(-s^2\right) ds\right] + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int\limits_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{0} \exp\left(-s^2\right) ds\right] =$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} \exp\left(-s^2\right) ds.$$

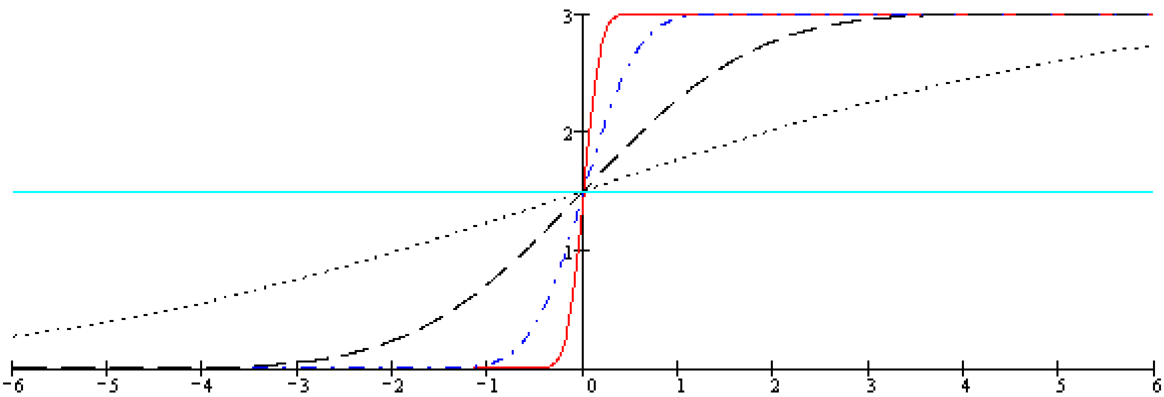
Rozważmy teraz przypadek szczególny $T_1 = 3$, $T_2 = 0$.
Oto wykresy temperatury. Poszczególne linie odpowiadają różnym wartościom t.

linia czerwona ciągła - $t = 0,01$;

linia niebieska „kreska-kropka” - $t = 0,1$;

linia czarna „kreska-kreska” - $t = 1$;

linia czarna „kropka-kropka” - $t = 10$.



4.2 Rozkład temperatury w pręcie półograniczonym

Rozkład temperatury w jednowymiarowym półograniczonym pręcie, w którym nie występują wewnętrzne źródła ciepła, opisuje funkcja $u = u(x, t)$, spełniająca jednorodne równanie przewodnictwa cieplnego (4.1).

Zakładamy, że dany jest początkowy rozkład temperatury

$$u(x, 0) = \varphi(x), \ \ x \geq 0, \tag{4.14}$$

gdzie φ jest pewną daną funkcją ograniczoną, oraz stan temperatury na końcu pręta w dowolnej chwili czasu t

$$u(0, t) = \alpha(t), \ \ t > 0. \tag{4.15}$$

Rozwiązanie $u(x, t)$ zagadnienia (4.1), (4.14), (4.15) przedstawiamy w postaci

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

gdzie u_1 i u_2 są rozwiązaniami rozważanego jednorodnego równania przewodnictwa spełniającymi warunki

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_1(0, t) = 0,$$
$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(0, t) = \alpha(t).$$

Korzystając z własności rozwiązania podstawowego równania przewodnictwa, analogicznie jak w punkcie poprzednim, można wyprowadzić wzory

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t} \right] - \exp\left[-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2 t} \right] \right\} \varphi(\tau) d\tau, \tag{4.16}$$

$$u_2(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{t} \frac{\alpha(r)}{\sqrt{(t-r)^3}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-r)} \right] dr. \tag{4.17}$$

P r z y k ł a d

Rozwiązać powyższe zagadnienie dla $a = 1$, $\alpha(t) = 0$, $\varphi(x) = T > 0$ (chłodzenie pręta o ustalonej jednorodnej temperaturze początkowej).

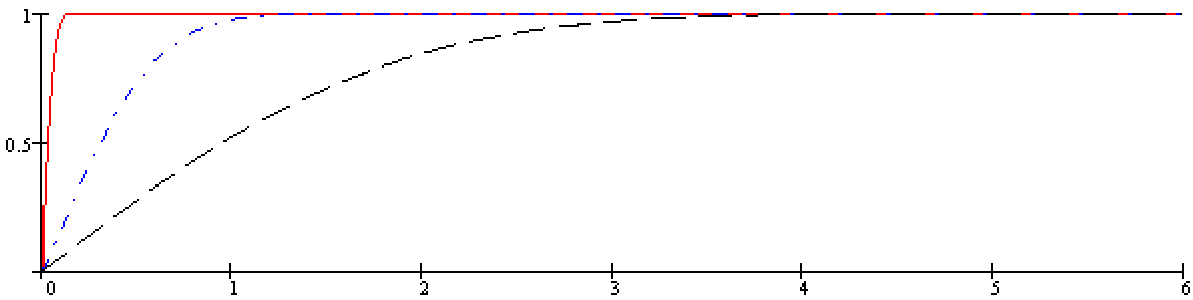
Z przedstawionych warunków oraz ze wzoru (4.17) wynika, że $u_2(x,t) = 0$, zaś

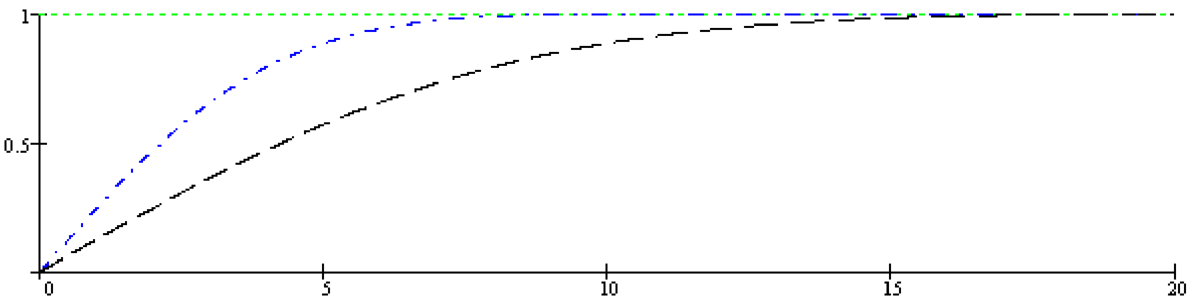
$$u(x,t) = u_1(x,t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\tau)^2}{4t} \right] - \exp\left[-\frac{(x+\tau)^2}{4t} \right] \right\} d\tau = T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right),$$

gdzie

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{z} \exp\left(-x^2\right) dx.$$

Poniższy rysunek przedstawia wykresy temperatury w różnych chwilach czasu ($t = 0{,}001$, $t = 0{,}1$, $t = 1$, $t = 5$, $t = 20$) i przedziałach zmienności x dla $T = 1$.





Wraz z upływem czasu następuje obniżenie temperatury we wszystkich punktach pręta.

4.3 Zadania

1. Funkcję $\varphi(x)$ określoną wzorem

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{dla } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{dla } x \notin (0;2) \end{cases}$$

   przestawić w postaci cosinusowej całki Fouriera.

   Odp.: $\varphi(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\cos s - \cos 2s - 1}{s^2} \cos sxds.$

2. Dana jest funkcja $\varphi(x) = e^{-kx}$, dla $k > 0$. Wyznaczyć sinusowe i cosinusowe przedstawienia funkcji φ dla $x > 0$.

   Odp.: $e^{-kx} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{k}{k^2+s^2} \cos sxds$, $e^{-kx} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{s}{k^2+s^2} \sin sxds.$

3. Wyprowadzić wzory (4.16) i (4.17).