Wykład 5

Równanie przewodnictwa cieplnego (II)

5.1 Metoda Fouriera dla pręta ograniczonego

5.1.1 Pierwsze zagadnienie brzegowe dla pręta ograniczonego

Poszukujemy rozwiązania równania przewodnictwa

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \;\text{ dla } x \in (0;l)\,,\; t > 0, \tag{5.1}$$

spełniającego warunki brzegowe

$$u\,(0,t) = \alpha\,(t)\,,\; u\,(l,t) = \beta\,(t) \;\text{ dla } t > 0 \tag{5.2}$$

i warunek początkowy

$$u\,(x,0) = \varphi\,(x) \;\text{ dla } x \in (0;l)\,. \tag{5.3}$$

Rozwiązanie zagadnienia (5.1)-(5.3) można znaleźć metodą Fouriera, podobnie jak w przypadku struny skończonej.

Podstawienie

$$\begin{gathered} u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \quad \text{gdzie} \\ w(x,t) = \alpha(t) + [\beta(t) - \alpha(t)]\,\frac{x}{l} \end{gathered}$$

sprowadza problem do przypadku jednorodnych warunków brzegowych, tak więc wystarczy umieć rozwiązać zadanie dla $\alpha\,(t) \equiv 0$, $\beta\,(t) \equiv 0$.

Przedstawiamy szukaną funkcję v w postaci

$$v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t),$$

gdzie v_1 i v_2 są rozwiązaniami zagadnień

$$\begin{gathered} (v_1)_t = a^2\,(v_1)_{xx} \quad \text{dla } x \in (0;l)\,,\; t > 0, \\ v_1\,(x,0) = \varphi\,(x) - w\,(x,0)\,,\; v_1\,(0,t) = v_1\,(l,t) = 0 \end{gathered}$$

oraz

$$\begin{aligned} &(v_2)_t = a^2\,(v_2)_{xx} + f\,(x,t) - w_t\,(x,t) \quad \text{dla } x \in (0;l)\,,\; t > 0, \\ &v_2\,(x,0) = 0,\; v_2\,(0,t) = v_2\,(l,t) = 0. \end{aligned}$$

Przedstawiając $v_1(x,t) = X(x)T(t)$ i rozdzielając zmienne, po przeprowadzeniu dyskusji wartości własnych odpowiedniego zagadnienia Sturma-Liouville'a, otrzymujemy wzór na postać funkcji $v_1(x,t)$

$$v_1(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \text{gdzie} \tag{5.4}$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l [\varphi(s) - w(s,0)] \sin \frac{n\pi}{l} s ds, \quad n = 1, 2, ... \tag{5.5}$$

Analogicznie, jak w przypadku struny, otrzymujemy przedstawienie funkcji v_2 w postaci szeregu

$$v_2(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n(t) \sin \pi \frac{nx}{l}, \quad \text{gdzie} \tag{5.6}$$

$$d_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 (t-\tau)} \left\{ \int_0^l [f(s,\tau) - w_\tau(s,\tau)] \sin \frac{n\pi}{l} s ds \right\} d\tau, \quad n = 1, 2, ... \tag{5.7}$$

Założenia, które należy przyjąć o funkcjach danych są analogiczne do założeń dla odpowiedniego zagadnienia dla struny skończonej.

P r z y k ł a d 1
Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1$, $l = 1$, $f(x,t) = 0$, $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 0$, $\varphi(x) = 1$ (chłodzenie pręta o ustalonej jednorodnej temperaturze początkowej).

Z przedstawionych warunków wynika, że

$$w(x,t) \equiv 0, \quad v_2(x,t) \equiv 0, \quad v_1(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x,$$

gdzie

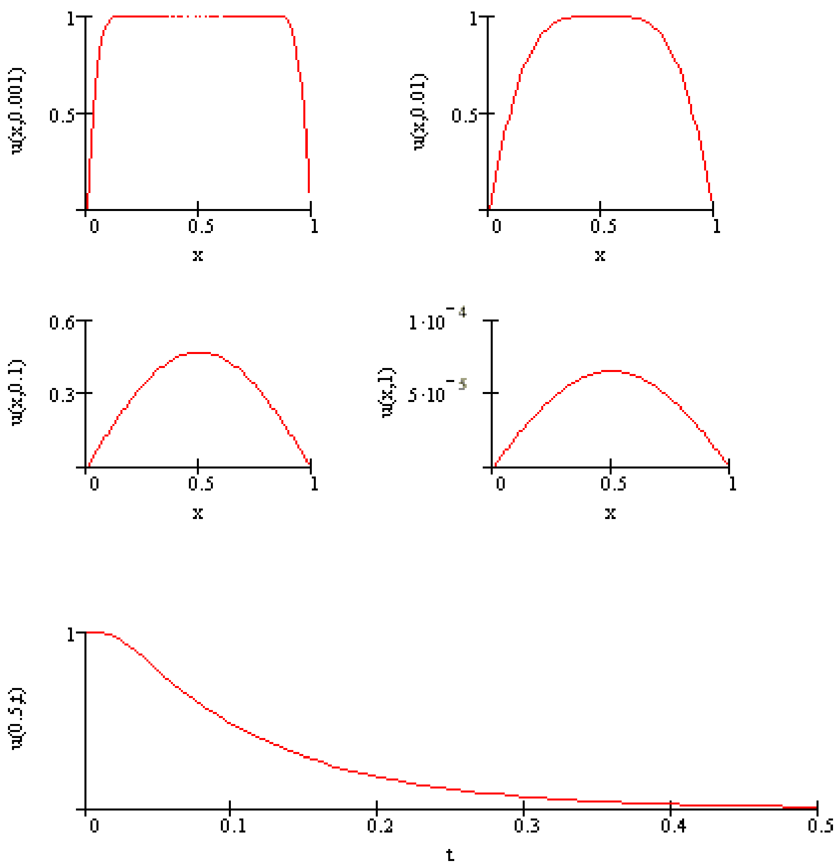
$$c_n = \frac{2}{\pi n} [1 - (-1)^n] \quad \text{dla } n = 1, 2, ...$$

zatem

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x.$$

Następny rysunek przedstawia zmiany wykresu temperatury pręta w czasie $t = 0,001$, $t = 0,01$, $t = 0,1$, $t = 1$.

Najniższy wykres przedstawia temperaturę w punkcie środkowym pręta dla $x = 0,5$.



W miarę upływu czasu następuje obniżenie temperatury we wszystkich punktach pręta.

P r z y k ł a d 2

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1$, $l = 1$, $f(x,t) = 0$, $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 0$, $\varphi(x) = 2x(1-x)$.

Z warunków zadania wynika, że

$$w(x,t) \equiv 0, \quad v_2(x,t) \equiv 0, \quad v_1(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x,$$

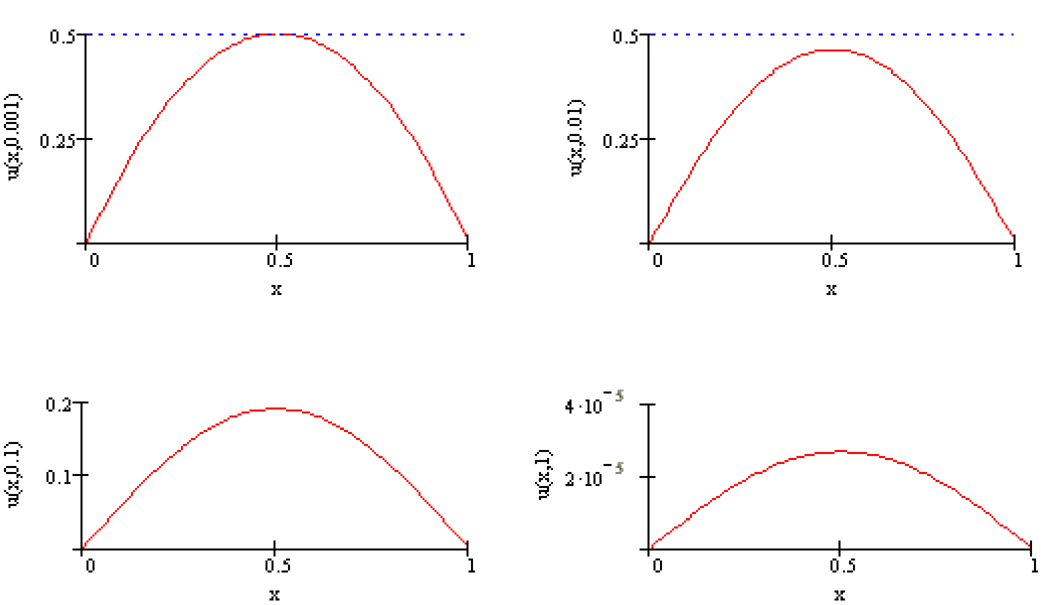
gdzie

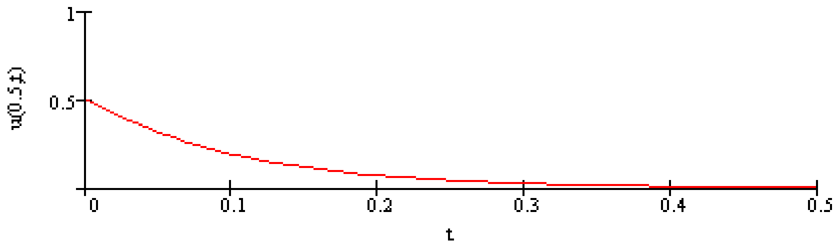
$$c_n = \frac{8}{(\pi n)^3}\left[1 - (-1)^n\right] \quad \text{dla } n = 1, 2, ...$$

zatem

$$u(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x.$$

Następny rysunek przedstawia zmiany wykresu temperatury pręta w czasie $t = 0,001$, $t = 0,01$, $t = 0,1$, $t = 1$ oraz temperaturę w punkcie środkowym pręta.





P r z y k ł a d 3

Rozwiązać powyższe zagadnienie początkowe dla $a = 1$, $l = 1$, $f(x,t) = 0$, $\alpha(t) = 0$, $\beta(t) = 1$, $\varphi(x) = 0$ (podgrzewanie pręta od prawego końca).

Z warunków zadania wynika, że

$$w(x,t) = x, \quad v_2(x,t) \equiv 0, \quad v_1(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x,$$

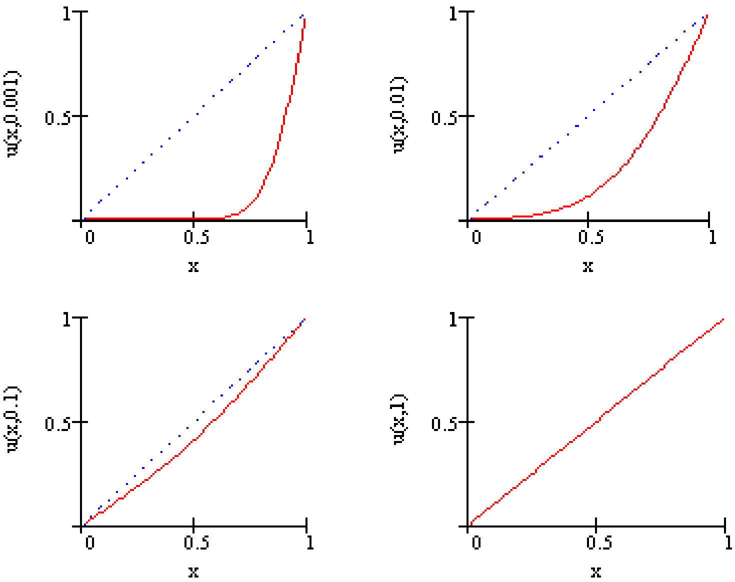
gdzie

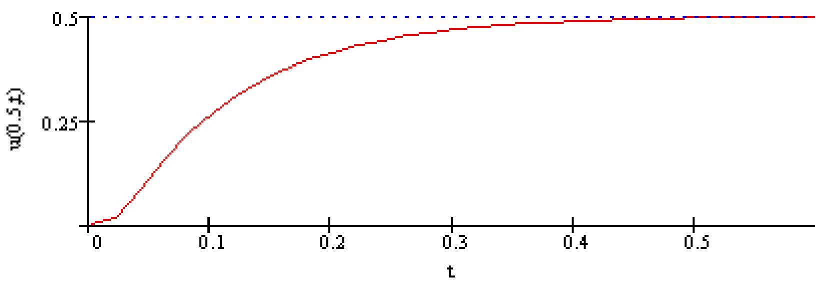
$$c_n = \frac{2}{\pi n}(-1)^n \quad \text{dla } n = 1, 2, ...,$$

zatem

$$u(x,t) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-\pi^2 n^2 t} \sin \pi n x.$$

Następny rysunek przedstawia zmiany wykresu temperatury pręta w czasie $t = 0,001$, $t = 0,01$, $t = 0,1$, $t = 1$ oraz temperaturę w punkcie środkowym pręta.





W miarę upływu czasu temperatura zbliża się do wartości funkcji liniowej $y = x$ we wszystkich punktach pręta.

5.1.2 Zasada maksimum dla równania przewodnictwa

Załóżmy, że $u(x,t)$ jest rozwiązaniem jednorodnego równania przewodnictwa

$$u_t = a^2 u_{xx} \text{ dla } 0 < x < l,\ 0 < t \leq T. \tag{5.8}$$

Zachodzi następujące twierdzenie zwane *zasadą maksimum dla równania przewodnictwa cieplnego.*

T w i e r d z e n i e (zasada maksimum)
Jeśli funkcja $u(x,t)$ określona i ciągła w obszarze $0 \leq t \leq T$, $0 \leq x \leq l$ spełnia jednorodne równanie przewodnictwa (5.8) w punktach obszaru $0 < t \leq T$, $0 < x < l$, to osiąga ona swoje kresy w chwili początkowej $t = 0$ lub dla $x = 0$ lub dla $x = l$.

■

Sens fizyczny tego twierdzenia jest następujący: jeśli temperatura na brzegu pręta nie przekracza pewnej wartości M i początkowa temperatutra także nie przekracza M, to wewnątrz pręta, przy braku źródeł ciepła, nie może pojawić się temperatura wyższa niż M.

5.1.3 Jednoznaczność rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego

Niech $u_1(x,t)$ i $u_2(x,t)$ będą dwoma rozwiązaniami pierwszego zagadnienia brzegowego (5.1)-(5.3). Wówczas funkcja

$$v(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

spełnia jednorodne równanie (5.8) oraz jednorodne warunki brzegowe $v(0,t) = v(l,t) = 0$ i początkowe $v(x,0) = 0$. Z zasady maksimum wynika więc, że kres górny i dolny funkcji $v(x,t)$ są równe zero. Oznacza to, że $v(x,t) \equiv 0$, a zatem $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, tzn. zagadnienie jest jednoznacznie rozwiązalne.

5.1.4 Stabilność rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego

Z zasady maksimum wynika bezpośredno następujący wniosek.

W n i o s e k
Jeśli $u_1(x,t)$ i $u_2(x,t)$ są dwoma rozwiązaniami równania (5.1) i spełnione są warunki

$$\begin{gathered} u_1(x,0) \le u_2(x,0) \quad \text{dla } x \in [0;l] \\ u_1(0,t) \le u_2(0,t)\,,\ u_1(l,t) \le u_2(l,t) \quad \text{dla } t \in [0;T]\,, \end{gathered}$$

to dla dowolnych $x \in [0;l]$, $t \in [0;T]$ zachodzi nierówność

$$u_1(x,t) \le u_2(x,t)\,.$$

D o w ó d
Rozważając funkcję $v(x,t) = u_2(x,t) - u_1(x,t)$ stwierdzamy, że spełnia ona równanie (5.8), a ponadto warunki

$$v(x,0) \ge 0,\ v(0,t) \ge 0,\ v(l,t) \ge 0.$$

Z zasady maksimum wynika, że $v(x,t) \ge 0$ dla wszystkich (x,t) z rozważanego obszaru, zatem $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$.

■

T w i e r d z e n i e
Jeśli $u_1(x,t)$ i $u_2(x,t)$ są rozwiązaniami równania (5.1) takimi, że warunki brzegowe i początkowy spełniają nierówność

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon \ \text{ dla } t = 0,\ x = 0,\ x = l, \tag{5.9}$$

to

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le \varepsilon \ \text{ dla wszystkich } (x,t) \in [0;l] \times [0;T]$$

(powyższa nierówność oznacza stabilność rozwiązania pierwszego zagadnienia brzegowego).

D o w ó d
Warunek (5.9) można zapisać w postaci

$$-\varepsilon \le u_1(x,t) - u_2(x,t) \le \varepsilon \ \text{ dla } t = 0, x = 0, x = l.$$

Oznaczając $v_1(x,t) = -\varepsilon$, $v_2(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ i stosując wniosek otrzymujemy nierówność $-\varepsilon \le u_1(x,t) - u_2(x,t)$ dla wszystkich $(x,t) \in [0;l] \times [0;T]$.

Podstawiając z kolei $v_1(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ i $v_2(x,t) = \varepsilon$ otrzymujemy nierówność $u_1(x,t) - u_2(x,t) \le \varepsilon$ co kończy dowód twierdzenia.

■

5.2 Przykłady radialnego rozkładu ciepła w walcu

5.2.1 Zagadnienie ostygania walca

Rozważamy walec o promieniu a, którego osią jest Oz. Niech $u = u(r,t)$ oznacza temperaturę punktu walca oddalonego od jego osi o r, w chwili t. Funkcja ta spełnia równanie przewodnictwa (we współrzędnych biegunowych) postaci

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r = \frac{1}{k}u_t \quad \text{dla } r \in [0,a),\ t > 0,\ k > 0. \tag{5.10}$$

Załóżmy, że powierzchnia boczna walca utrzymywana jest w temperaturze 0, a więc spełniony jest jednorodny warunek brzegowy

$$u(r,t) = 0 \quad \text{dla } r = a,\ \ t > 0. \tag{5.11}$$

Zakładamy również spełnianie osiowosymetrycznego warunku początkowego

$$u(r,0) = \varphi(r) \quad \text{dla } 0 \le r < a, \tag{5.12}$$

gdzie φ jest funkcją daną, która może być przedstawiona w postaci szeregu Fouriera - Bessela.

Stosując metodę Fouriera (rozdzielenia zmiennych) dla $u(r,t) = R(r)T(t)$ otrzymujemy dwa równania

$$\frac{R''(r) + \frac{1}{r}R'(r)}{R(r)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda = const.$$

Z warunku brzegowego wynika, że stały parametr λ może przyjmować wartości

$$\lambda = \lambda_n = \frac{x_n^2}{a^2}, \text{ dla } n = 1,2,...,$$

gdzie (x_n) jest ciągiem dodatnich zer funkcji Bessela J_0. W takim razie funkcja

$$u_n(r,t) = C_n J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) e^{-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2 kt} \qquad \text{dla } n = 1,2,...$$

i dowolnej stałej C_n jest rozwiązaniem rozważanego równania spełniającym jednocześnie jednorodny warunek brzegowy $u_n(a,t) = 0$.

Pełnym rozwiązaniem zagadnienia (5.10)-(5.12), spełniającym także warunek początkowy, jest funkcja $u(r,t)$ określona jako suma szeregu

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) e^{-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2 kt} \tag{5.13}$$

gdzie stałe C_n wyznaczone są za pomocą wzorów

$$C_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(x_n)} \int_0^a r\varphi(r) J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) dr, \quad \text{dla } n = 1,2,\ldots. \tag{5.14}$$

P r z y k ł a d
Rozwiązać zagadnienie ostygania walca dla $a = 1$, $\varphi(r) = 1 - r^2$.

Zgodnie za wzorem (5.14)

$$C_n = \frac{2}{J_1^2(x_n)} \int_0^1 r(1-r^2) J_0(x_n r) dr \quad \text{dla } n = 1, 2, ...$$

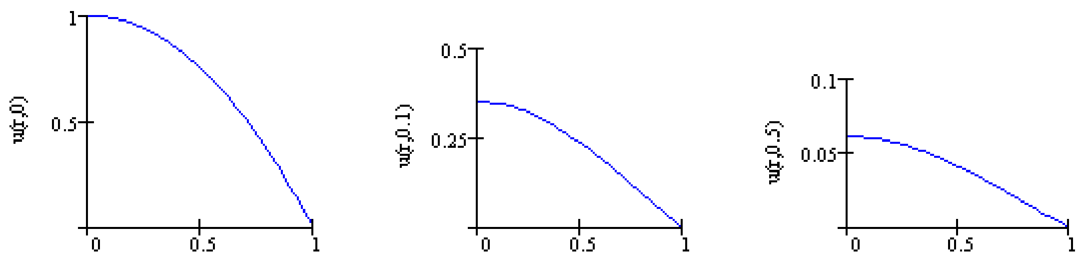
Korzystając z własności funkcji Bessela oraz stosując wzór na całkowanie przez części otrzymujemy ostatecznie

$$C_n = \frac{4J_2(x_n)}{x_n^2 J_1^2(x_n)} = \frac{8}{x_n^3 J_1(x_n)},$$

a zatem zgodnie ze wzorem (5.13) rozwiązanie $u\,(r, t)$ zagadnienia wyraża się wzorem

$$u(r,t) = 8 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_n^3 J_1(x_n)} J_0(x_n r) e^{-x_n^2 t}.$$

Poniższy rysunek przedstawia wykresy temperatury $u(r, t)$ dla $t = 0$, $t = 0.1$, $t = 0.5$. W miarę upływu czasu następuje obniżenie temperatury we wszystkich punktach walca.



5.2.2 Zagadnienie nagrzewania powierzchni bocznej walca

Rozważamy walec o promieniu a, którego osią jest Oz. Niech $u = u(r, t)$ oznacza temperaturę punktu walca oddalonego od jego osi o r, w chwili t. Funkcja ta spełnia równanie przewodnictwa postaci (5.10).

Załóżmy, że powierzchnia boczna walca utrzymywana jest w temperaturze V_0, a więc spełniony jest warunek brzegowy

$$u(r,t) = V_0 > 0 \quad \text{dla } r = a,\ t > 0. \tag{5.15}$$

Zakładamy również spełnianie jednorodnego warunku początkowego

$$u(r,0) = 0 \quad \text{dla } 0 \le r < a. \tag{5.16}$$

Niech $Y(r, s)$ będzie transformatą Laplace'a funkcji $u(r, t)$ względem zmiennej t. Wtedy $Y(r, s)$ spełnia równanie

$$Y_{rr} + \frac{1}{r} Y_r - \frac{s}{k} Y = 0. \tag{5.17}$$

Warunek brzegowy (5.15) implikuje równość

$$Y\,(a,s) = \frac{V_0}{s}. \tag{5.18}$$

Rozwiązaniem równania (5.17) spełniającym jednocześnie warunek brzegowy (5.18) jest funkcja

$$Y(r,s) = \frac{V_0}{s}\frac{J_0(qr)}{J_0(qa)}, \quad \text{gdzie } q = \sqrt{-\frac{s}{k}}.$$

Odwracając transformatę Laplace'a np. za pomocą twierdzenia o residuach, otrzymujemy ostatecznie wzór na rozwiązanie zagadnienia

$$u(r,t) = V_0\left[1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0\left(x_n\frac{r}{a}\right)}{x_n J_1(x_n)}e^{-\left(\frac{x_n}{a}\right)^2 kt}\right], \tag{5.19}$$

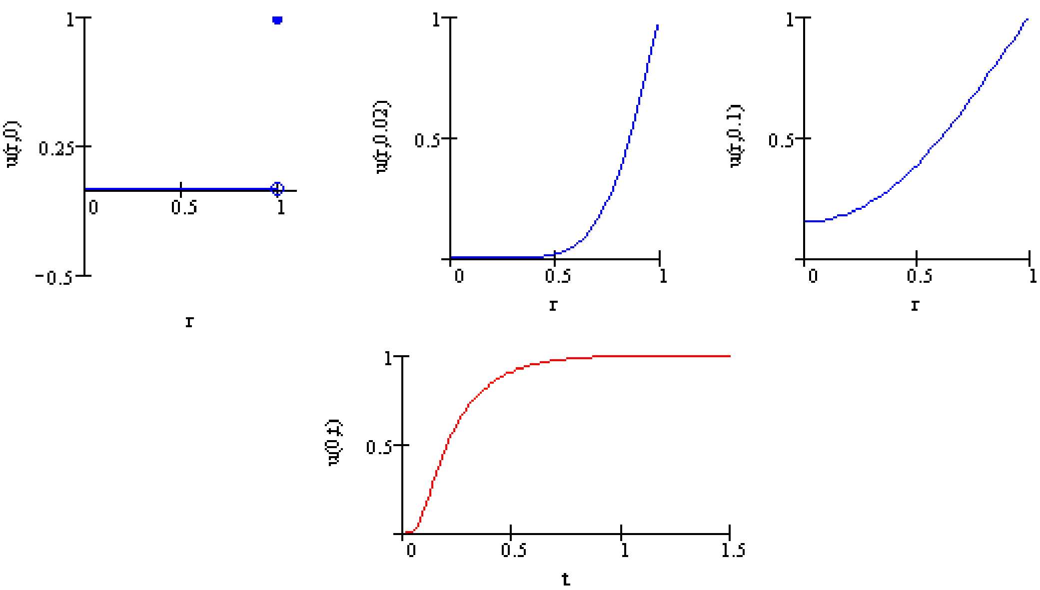
gdzie (x_n) jest ciągiem dodatnich zer funkcji Bessela J_0.

P r z y k ł a d
Rozwiązać powyższe zagadnienie dla $a = 1$, $k = 1$, $V_0 = 1$.

Na podstawie wzoru (5.19) możemy napisać, że

$$u(r,t) = 1 - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{J_0(x_n r)}{x_n J_1(x_n)}e^{-x_n^2 t}.$$

Linie w kolorze niebieskim są wykresami funkcji $u\,(r,t)$ dla $t = 0$, $t = 0{,}2$, $t = 0{,}1$, zaś linia czerwona jest wykresem temperatury jako funkcji czasu w punkcie położonym na osi walca ($x = 0$). W miarę upływu czasu następuje wzrost temperatury do wartości $V_0 = 1$ we wszystkich punktach walca.



5.3 Zadania

1. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \;\; 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach
$$u(0,t) = 0, \; u(l,t) = 0, \; u(x,0) = \begin{cases} x & \text{dla } \; 0 < x \leq \frac{1}{2} l \\ l - x & \text{dla } \; \frac{1}{2} l < x < l. \end{cases}$$

2. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \;\; 0 < x < l, \;\; t > 0.$$
przy warunkach
$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = \frac{cx(l-x)}{l^2}.$$

3. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \;\; 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach
$$u(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = Ax.$$

4. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \;\; 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \;\; u(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = A(l-x).$$

5. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \;\; 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach
$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0, \;\; u(x,0) = U = Const.$$

6. Rozwiązać równanie
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \;\; 0 < x < l, \quad t > 0$$
przy warunkach
$$u(0,t) = T, \;\; u(l,t) = U, \;\; u(x,0) = 0.$$

7. Rozwiązać zagadnienie ostygania walca dla $a = 1$, $\varphi(r) = 1 - r^4$.