Wykład 6

Funkcje harmoniczne

Ważną rolę odgrywają tzw. *funkcje harmoniczne*. Przyjmujemy następującą definicję.

D e f i n i c j a

Funkcję $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazywamy harmoniczną w obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasy C^2 oraz

$$\Delta u = 0, \tag{6.1}$$

gdzie $\Delta u = u_{x_1 x_1} + \ldots + u_{x_n x_n}$ jest operatorem Laplace'a.

■

W przypadku $n = 2$ można wykazać, że lokalnie każda funkcja harmoniczna jest częścią rzeczywistą pewnej funkcji holomorficznej.

T w i e r d z e n i e

Jeżeli funkcja $u(x, y)$ jest harmoniczna w kole $K \subset \mathbb{R}^2$, to istnieje funkcja harmoniczna $v(x, y)$ określona wzorem

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y(\xi, \eta)\, d\xi + u_x(\xi, \eta)\, d\eta \tag{6.2}$$

taka, że $f = u + iv$ jest funkcją holomorficzną.

Dowód polega na sprawdzeniu, że spełnione są tzw. równania Cauchy'ego-Riemanna gwarantujące holomorficzność funkcji f. Równania te są postaci: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$.

■

6.1 Tożsamości Greena, wzór podstawowy teorii funkcji harmonicznych

6.1.1 Przypadek funkcji dwóch zmiennych niezależnych

Rozważmy teraz przypadek $n = 2$. Niech $D \subset \mathbb{R}^2$ będzie obszarem ograniczonym krzywą gładką ∂D.

Rozważmy znany wzór Greena w postaci

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy \tag{6.3}$$

dla funkcji P i Q klasy C^2. Podstawiając $u \equiv Q$, $v \equiv -P$ otrzymujemy

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\partial D} \left[u \cos(x,n) + v \cos(y,n)\right] ds, \tag{6.4}$$

gdzie n oznacza wektor normalny zewnętrzny do ∂D.

Zastępując we wzorze (6.4) u przez $u\frac{\partial v}{\partial x}$ i v przez $u\frac{\partial v}{\partial y}$, dostajemy tzw. *pierwszą tożsamość Greena*

$$\iint\limits_D \left(u\Delta v + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n} ds. \tag{6.5}$$

Zamieniając rolami u i v we wzorze (6.5) i odejmując otrzymany wzór od (6.5) otrzymujemy tzw. *drugą tożsamość Greena*

$$\iint\limits_D (u\Delta v - v\Delta u)\, dxdy = \int\limits_{\partial D} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) ds. \tag{6.6}$$

Niech teraz $P_0(x_0, y_0)$ będzie ustalonym punktem, zaś $P(x,y)$ zmiennym. Wprowadzając funkcję

$$E(P) = \frac{1}{2\pi} \ln |PP_0| \tag{6.7}$$

można pokazać, że zachodzi równość

$$u(P_0) = \int\limits_{\partial D} u(P) \frac{\partial}{\partial n} E(P)\, ds_P - \int\limits_{\partial D} \frac{\partial u(P)}{\partial n} E(P)\, ds_P + \iint\limits_D \Delta u(P)\, E(P)\, dxdy. \tag{6.8}$$

Równość (6.8) zwana jest *trzecią tożsamością Greena* lub *wzorem podstawowym teorii funkcji harmonicznych.* Funkcję $E(P)$ określoną wzorem (6.7) nazywamy *rozwiązaniem podstawowym* równania Laplace'a.

6.1.2 Przypadek dowolnej liczby zmiennych niezależnych

W przypadku $n > 2$ można wyprowadzić odpowiednik wzoru (6.8). Wprowadzając rozwiązanie podstawowe równania Laplace'a wzorem

$$E(P) = -\frac{1}{(n-2)\,\theta_n\, |PP_0|^{n-2}} \quad \text{dla } n > 2, \tag{6.9}$$

gdzie P, $P_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, θ_n oznacza miarę powierzchni kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$

$$\theta_n = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(n-2)} & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \frac{2\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-2)} & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \end{cases} \tag{6.10}$$

można wyprowadzić wzór podstawowy dla $n > 2$, postaci

$$u(P_0) = \int\limits_{\partial\Omega} u(P) \frac{\partial}{\partial n} E(P)\, d\sigma_P - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u(P)}{\partial n} E(P)\, d\sigma_P + \iint\limits_\Omega \Delta u(P)\, E(P)\, dP. \tag{6.11}$$

Jest to odpowiednik wzoru (6.8).

6.2 Własności funkcji harmonicznych

Podamy teraz podstawowe własności funkcji harmonicznych. Rozważymy najpierw przypadek $n = 2$.

T w i e r d z e n i e 1
Jeśli funkcja u jest harmoniczna w pewnym ograniczonym obszarze $D_1 \supset \overline{D}$, to

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

Dowód wynika z pierwszej tożsamości Greena (6.5), w którym należy podstawić w miejsce funkcji u funkcję stałą równą 1, a w miejsce funkcji v funkcję u.

■

T w i e r d z e n i e 2
Jeśli funkcja u jest klasy C^2 w obszarze ograniczonym D oraz

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

dla każdego gładkiego i zamkniętego łuku Γ ograniczającego obszar $D_0 \subset D$, to u jest harmoniczna w D.

D o w ó d
Stosując wzór (6.5) dla $u = 1$ i $v = u$ otrzymujemy, że

$$\iint\limits_{D_0} \Delta u dx dy = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

dla dowolnego $D_0 \subset D$, zatem $\Delta u = 0$ dla $(x, y) \in D_0$.

■

T w i e r d z e n i e 3
Niech u będzie funkcją harmoniczną w ograniczonym obszarze D i klasy C^1 w $\overline{D}$. Jeśli $u_{|\partial D} = 0$, to $u \equiv 0$ w D. Jeśli $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial D} = 0$, to $u \equiv const$ w D.

D o w ó d
Podstawiając $u = v$ w pierwszej tożsamości Greena (6.5) otrzymujemy

$$\iint\limits_{D} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int\limits_{\partial D} u \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0,$$

skąd wynika natychmiast, że $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \equiv 0$ w D. W takim razie u jest stała, lub stała i równa zero, w zależności od przyjętego założenia.

■

Załóżmy teraz, że $n \geq 2$. Można wykazać prawdziwość następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e 4 *(tw. Gaussa o wartości średniej funkcji harmonicznej)*
Jeśli u jest funkcją harmoniczną w kuli $K(a,R)$, klasy C^2 w $\overline{K}(a,R)$, to w środku tej kuli przyjmuje ona wartość równą średniej wartości na powierzchni kuli. Zależność tę opisuje wzór

$$u(a) = \frac{1}{\theta_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial K} u(y)\, d\sigma_y, \tag{6.12}$$

gdzie θ_n oznacza miarę powierzchni kuli jednostkowej w $\mathbb{R}^n$ określoną wzorem (6.10).

■

W przypadku $n = 2$ dla $a = (x_0, y_0)$ wzór (6.12) przybiera postać

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{\partial K} u(P)\, d\sigma_P, \tag{6.13}$$

zaś dla $n = 3$ i $a = (x_0, y_0, z_0)$ mamy

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{\partial K} u(P)\, d\sigma_P. \tag{6.14}$$

U w a g a
W przypadku $n = 2$ łatwo pokazać, że

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint\limits_{K} u(x, y)\, dxdy, \tag{6.15}$$

a więc wartość funkcji harmonicznej w środku koła równa jest średniej wartości tej funkcji w całym kole.

■

Ważnym wnioskiem wynikającym z twierdzenia Gaussa o wartości średniej funkcji harmonicznej, jest tzw. *zasada maksimum dla funkcji harmonicznych.*

T w i e r d z e n i e 5 *(zasada maksimum)*
Niech u będzie funkcją harmoniczną w obszarze D (ograniczonym lub nie) przyjmującą wartości rzeczywiste. Jeżeli u nie jest tożsamościowo równa stałej, to nie może ona przyjmować w żadnym punkcie obszaru D swego kresu górnego ani dolnego.

■

Bezpośrednio z zasady maksimum można wyprowadzić dwa ważne wnioski.

W n i o s e k 1
Jeżeli u_1, u_2 są harmoniczne w D, ciągłe w $\overline{D}$ oraz

$$u_{1|\partial D} \leq u_{2|\partial D},$$

to $u_1 \leq u_2$ w D.
Dowód wynika z zastosowania zasady maksimum do funkcji harmonicznej $u_2 - u_1$.

■

W n i o s e k 2
Jeżeli u_1, u_2 są harmoniczne w D, ciągłe w $\overline{D}$ oraz

$$|u_1| \leq u_2 \quad \text{na } \partial D,$$

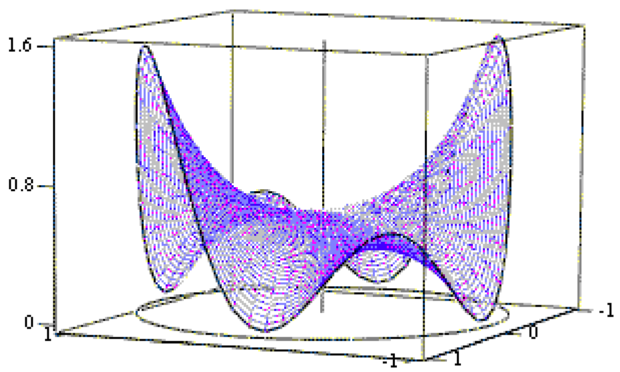
to $|u_1| \leq u_2$ w D.
Dowód wynika z zastosowania wniosku 1 do par funkcji $-u_2$, u_1 oraz u_1, u_2.

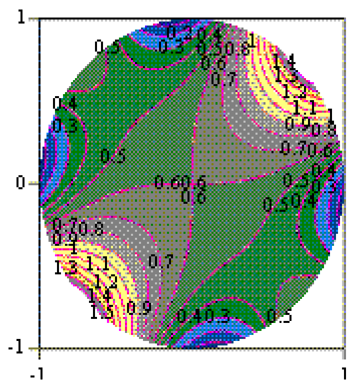
■

Poniższy rysunek ilustruje pewne charakterystyczne cechy funkcji harmonicznych. Przedstawia on powierzchnię opisaną wzorem

$$u(x,y) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}\left(x^4 + y^4\right) + 3x^2y^2 + xy,$$

która jest przykładem funkcji harmonicznej dwóch zmiennych. Powierzchnia jest widoczna dla (x,y) należących do koła jednostkowego $x^2 + y^2 \leq 1$. Widoczny jest także plan warstwicowy.





6.3 Zadania

1. Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ wiedząc, że:

   (a) $u = x^3 - 3xy^2$
   (b) $u = x^2 - y^2 + 2x$
   (c) $u = \frac{x}{x^2+y^2}$
   (d) $u = \frac{x}{x^2+y^2} - 2y$
   (e) $u = 2xy + 3x$
   (f) $v = -\frac{y}{(x+1)^2+y^2}$
   (g) $v = \exp(x)(y\cos y + x\sin y) + x + y$
   (h) $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x > 0$
   (i) $u = \exp(x^2 - y^2)(x\cos 2xy - y\sin 2xy)$
   (j) $u = \exp(x)\left[(x^2 - y^2 + 1)\cos y - 2xy\sin y\right]$

(k) $v = \ln(x^2 + y^2)$

2. Znaleźć punkty, w których funkcja $u(x, y)$ osiąga swój kres górny i dolny w zbiorze D, jeżeli:

   (a) $u(x, y) = x^2 - y^2$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   (b) $u(x, y) = x + y$, $D = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$

3. Udowodnić wzór (6.15) wykorzystując twierdzenie Gaussa o wartości średniej w przypadku $n = 2$.

4. Udowodnić, że funkcja harmoniczna o wartościach rzeczywistych, nie będąca stałą, nie może posiadać ekstremów lokalnych w żadnym punkcie obszaru, w którym jest określona.

5. Załóżmy, że funkcja $u(\xi, \eta)$ jest harmoniczna, a funkcja $f(x, y) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ jest holomorficzna, tzn. spełniony jest układ równań Cauchy'ego-Riemanna $\xi_x = \eta_y$, $\xi_y = -\eta_x$. Pokazać, że złożenie $(u \circ f)(x, y) = u(\xi(x, y), \eta(x, y))$ jest funkcją harmoniczną (zakładamy wykonalność złożenia).