# Temat 7

# Zagadnienia brzegowe dla równań eliptycznych

Rozważmy płaski obszar $D \subset \mathbb{R}^2$ ograniczony krzywą $\partial D$. Dla równania Laplace'a (Poissona) stawia się trzy podstawowe zagadnienia brzegowe.

**Zagadnienie Dirichleta** (tzw. *zagadnienie brzegowe pierwszego rodzaju*)
Znaleźć funkcję $u$ spełniającą warunki

$$\Delta u = 0 \quad (\text{lub } \Delta u = f), \quad \text{dla } (x,y) \in D, \tag{7.1}$$

$$u_{|\partial D} = g(x,y), \tag{7.2}$$

gdzie $g$ jest funkcją daną określoną na $\partial D$. Warunek (7.2) rozumiany jest w sensie przejścia granicznego jako $\lim\limits_{D \ni P \to P_0 \in \partial D} u(P) = g(P_0)$.

**Zagadnienie Neumanna** (tzw. *zagadnienie brzegowe drugiego rodzaju*)
Znaleźć funkcję $u$ spełniającą warunki

$$\Delta u = 0 \quad (\text{lub } \Delta u = f), \quad \text{dla } (x,y) \in D, \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial D} = g(x,y), \tag{7.4}$$

gdzie $g$ jest funkcją daną określoną na $\partial D$, $n$ jest wektorem normalnym zewnętrznym. Warunek (7.4) również należy rozumieć w sensie przejścia do granicy od wnętrza obszaru.

**Zagadnienie Robina** (tzw. *zagadnienie brzegowe trzeciego rodzaju*)
Znaleźć funkcję $u$ spełniającą warunki

$$\Delta u = 0 \quad (\text{lub } \Delta u = f), \quad \text{dla } (x,y) \in D, \tag{7.5}$$

$$\left(a\frac{\partial u}{\partial n} + bu\right)_{|\partial D} = g(x,y), \tag{7.6}$$

gdzie $a$, $b$, $g$ są danymi funkcjami określonymi na $\partial D$, $a^2+b^2 > 0$, $n$ jest wektorem normalnym zewnętrznym. Warunek (7.6) również należy rozumieć w sensie przejścia granicznego.

Postawione zagadnienia są tzw. *zagadnieniami wewnętrznymi*. Stawia się ponadto *zagadnienia zewnętrzne* dla obszarów $D$ nieograniczonych, zewnętrznych względem danych krzywych początkowych.

W tym przypadku należy dodatkowo przyjąć, że poszukiwana funkcja spełnia pewien warunek dotyczący zachowania się jej dla punktów odległych od początku układu, tzw. „warunek w nieskończoności".

Dla równania Laplace'a nie stawia się zagadnienia Cauchy'ego, poza jednym przypadkiem, gdy poszukuje się lokalnie rozwiązania w klasie funkcji analitycznych przy analitycznych danych początkowych. Powodem tego jest fakt, że zagadnienie Cauchy'ego dla równania Laplace'a nie jest poprawnie postawione (patrz przykład z wykładu 1).

## 7.1 Metoda funkcji Greena

Skorzystamy teraz z podstawowego wzoru teorii funkcji harmonicznych (6.8)

$$u(P_0) = \int\limits_{\partial D} u(P)\frac{\partial}{\partial n}E(P)\,ds_P - \int\limits_{\partial D}\frac{\partial u(P)}{\partial n}E(P)\,ds_P + \iint\limits_{D}\Delta u(P)\,E(P)\,dxdy, \tag{7.7}$$

gdzie, zgodnie z (6.7)

$$E(P) = \frac{1}{2\pi}\ln|PP_0| = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP_0|}.$$

Załóżmy, że $u$ jest funkcją harmoniczną, zatem $\Delta u = 0$. Powyższy wzór przybiera wówczas postać

$$u(P_0) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial D}\left[u(P)\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|PP_0|} - \ln\frac{1}{|PP_0|}\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right]ds_P. \tag{7.8}$$

W zagadnieniach Dirichleta i Neumanna dla równania Laplace'a wartości brzegowe funkcji $u$ lub jej pochodnej normalnej $\frac{\partial}{\partial n}u$ mogą być zadawane osobno lecz nie jednocześnie razem. W celu uzyskania rozwiązania zagadnienia Dirichleta (7.1)-(7.2) lub Neumanna (7.3)-(7.4) należy tak przekształcić wzór (7.8), aby wyeliminować z niego niewiadome wartości brzegowe. Można to zrobić przez wprowadzenie pojęcia funkcji Greena.

Załóżmy teraz, że $v$ jest pewną funkcją harmoniczną, tzn. $\Delta v = 0$. Z drugiej tożsamości Greena (6.6) otrzymujemy

$$\int\limits_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)ds - \iint\limits_{D} v\Delta u\,dxdy = 0. \tag{7.9}$$

Dodając stronami (7.7) i (7.9), po pogrupowaniu odpowiadających sobie wyrazów, otrzymujemy wzór

$$u(P_0) = \int\limits_{\partial D}\left[G(P,P_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n}G(P,P_0)\,u(P)\right]ds_P - \iint\limits_{D} G(P,P_0)\,\Delta u(P)\,dxdy, \tag{7.10}$$

gdzie

$$G(P,P_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP_0|} + v. \tag{7.11}$$

Funkcja $G$ spełnia równanie $\Delta u = 0$ w $D$ za wyjątkiem punktu $P = P_0$. Funkcję $v$ występującą we wzorze (7.11) wybieramy w ten sposób, aby

$$v_{|\partial D} = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP_0|} \quad \text{dla } P \in \partial D, \tag{7.12}$$

a to oznacza, że $G_{|\partial D} = 0$.

Funkcja $G$ dana wzorem (7.11) i spełniająca warunek brzegowy (7.12) nazywana jest *funkcją Greena zagadnienia Dirichleta* dla równania Laplace'a.

Jeśli funkcja ta jest znana, to wzór (7.10) przedstawia rozwiązanie zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a (7.1)-(7.2) w postaci

$$u(P_0) = -\int_{\partial D} g(P) \frac{\partial}{\partial n} G(P, P_0)\, ds_P. \tag{7.13}$$

Aby wyznaczyć funkcję Greena $G(P, P_0)$, należy rozwiązać szczególne zagadnienie Dirichleta z warunkiem brzegowym (7.12). Jest ono jednak znacznie łatwiejsze do rozwiązania niż rozważane zagadnienie wyjściowe, ponieważ w warunku brzegowym występuje konkretna funkcja.

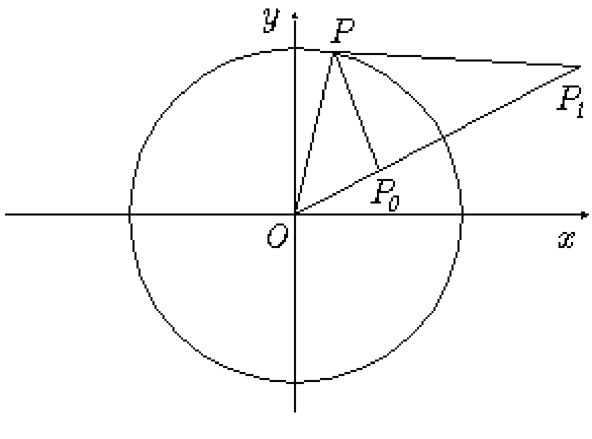
Analogicznie można wyprowadzić wzór przedstawiający rozwiązanie zagadnienia Neumanna.

### 7.1.1 Funkcja Greena dla koła - metoda punktów symetrycznych

Niech teraz $D$ będzie kołem o środku w $O(0,0)$ i promieniu $a$, $\partial D$ jego brzegiem, tzn. okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = a^2$. Niech $P_0 \in D$ będzie dowolnym punktem. Z $O$ wyprowadzamy półprostą przechodzącą przez $P_0$. Na tej półprostej wybieramy punkt $P_1$ taki, że

$$\rho_0 \rho_1 = a^2, \ \ \rho_0 = |OP_0|, \ \ \rho_1 = |OP_1|.$$

Punkt $P_1$ nazywamy punktem symetrycznym (*harmonicznie sprzężonym*) do $P$ względem okręgu $\partial D: \ x^2 + y^2 = a^2$.




Rozważmy funkcję

$$v(P) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{a}{\rho_0}\frac{1}{|PP_1|}\right).$$

Łatwo sprawdzić, że jest ona harmoniczna w kole $D$.

Gdy $P \in \partial D$, to z podobieństwa trójkątów $\triangle OPP_0$ i $\triangle OPP_1$ (jeden kąt wspólny oraz $|OP_0| : |OP| = |OP| : |OP_1|$) wynika, że

$$\frac{a}{\rho_0}\frac{1}{|PP_1|} = \frac{1}{|PP_0|},$$

zatem

$$v_{|\partial D} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|PP_0|},$$

a to oznacza, że spełniony jest warunek (7.12) z definicji funkcji Greena.

Zatem funkcja Greena zagadnienia Dirichleta dla koła dana jest wzorem

$$G(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|PP_0|}-\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{a}{\rho_0}\frac{1}{|PP_1|}\right). \tag{7.14}$$

Dowodzi się, że pochodna $\frac{\partial}{\partial n}G$ dla $P\in\partial D$ może być obliczona ze wzoru

$$\frac{\partial G}{\partial n}_{|\partial D}=-\frac{1}{2\pi a}\frac{a^2-\rho_0^2}{|PP_0|^2}.$$

W takim razie rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta (7.1)-(7.2) na podstawie wzoru (7.13) jest funkcja

$$u(P_0)=\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{\partial D}g(P)\frac{a^2-\rho_0^2}{|PP_0|^2}ds_P. \tag{7.15}$$

Wzór (7.15) we współrzędnych biegunowych można zapisać jako

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g(\varphi)\frac{a^2-r^2}{a^2-2ar\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi, \tag{7.16}$$

gdzie współrzędne biegunowe punktu $P_0$ oznaczone są przez $(r,\theta)$ a współrzędne punktu $P$ na okręgu przez $(a,\varphi)$. Wzór (7.16) nosi nazwę *wzoru całkowego Poissona* dla funkcji harmonicznej w kole.

## 7.2 Metoda szeregów Fouriera dla koła

Rozważamy równanie Laplace'a (7.1) z funkcją niewiadomą $u=u(x,y)$

$$\Delta u=0 \text{ dla } (x,y)\in D=\left\{(x,y):x^2+y^2<a^2\right\} \tag{7.17}$$

z warunkiem brzegowym

$$u_{|\partial D}=\varphi(\alpha) \text{ dla } \alpha\in[0,2\pi],$$

gdzie $\varphi$ jest daną funkcją ciągłą, która może być przedstawiona w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera.

Jedna z metod rozwiązania oparta jest na przedstawieniu niewiadomej funkcji harmonicznej $u$ w postaci części rzeczywistej pewnej funkcji holomorficznej w kole $D$

$$u(r,\alpha)=\operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}r^n\left(a_n\cos n\alpha-b_n\sin n\alpha\right), \tag{7.18}$$

gdzie

$$z=re^{i\alpha},\ r=\sqrt{x^2+y^2}=|z|,\ \alpha=\arg z,\ c_n=a_n+ib_n.$$

Z warunku brzegowego otrzymujemy, że dla $z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ musi zachodzić równość

$$\varphi(\alpha)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n\left(a_n\cos n\alpha-b_n\sin n\alpha\right) \quad \text{dla } \alpha\in[0,2\pi].$$

Z własności trygonometrycznych szeregów Fouriera wynika stąd, że

$$a_n = \frac{1}{2\pi a^n}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\alpha)\cos n\alpha d\alpha, \; b_n = -\frac{1}{2\pi a^n}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(\alpha)\sin n\alpha d\alpha \tag{7.19}$$

dla $n = 0, 1, 2, ...$

Otrzymane rozwiązanie należy ostatecznie zapisać w postaci jawnej $u = u\,(x, y)$.

**P r z y k ł a d**

Rozwiązać zagadnienie Dirichleta (7.17) dla $a = 1$, $\varphi(x, y) = \varphi(\alpha) = 0,6-0,5\cos 4\alpha+0,5\sin\alpha$.

Ze wzorów (7.19) wynika, że

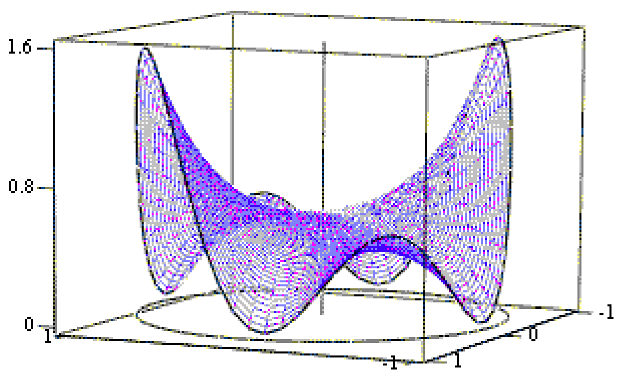
$$a_0 = \frac{6}{10}, \; a_4 = -\frac{1}{2}, \; b_2 = -\frac{1}{2}$$

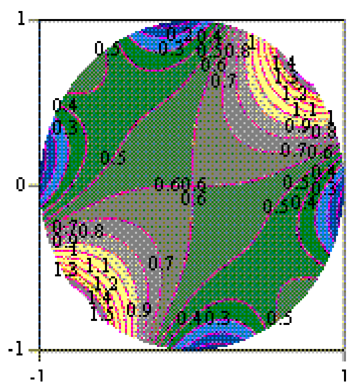
zaś pozostałe współczynniki są równe zero.

W takim razie rozwiązanie zagadnienia wyraża się wzorem

$$u(x, y) = \frac{3}{5} - \frac{1}{4}r^4\cos 4\alpha + \frac{1}{2}r^2\sin 2\alpha = \frac{6}{10} - \frac{1}{2}\left(x^4 + y^4\right) + 3x^2y^2 + xy.$$

Poniższy rysunek przedstawia wykres rozwiązania $u(x, y)$ oraz jego plan warstwicowy.




## 7.3 Metoda odwzorowań konforemnych

Rozważmy zagadnienie Dirichleta dla równania Laplace'a w półpłaszczyźnie

$$\Delta u = 0 \;\text{ dla } (x, y) \in D = \{(x, y) : y > 0\}\,. \tag{7.20}$$

Załóżmy, że szukana funkcja $u\,(x, y)$ jest ciągła dla $y \geq 0$, ograniczona w nieskończoności i spełnia warunek brzegowy

$$u\,(x, 0) = \alpha\,(x)\,, \;\text{ dla } x \in \mathbb{R}, \tag{7.21}$$

gdzie $\alpha\,(x)$ jest daną funkcją ograniczoną w nieskończoności.

Z teorii funkcji zmiennych zespolonych wiadomo, że funkcja

$$w = f(z) = \frac{z - z_0}{z - \overline{z}_0}$$

jest odwzorowaniem konforemnym półpłaszczyzny $y > 0$ w koło jednostkowe $|w| < 1$, przy którym brzeg półpłaszczyzny (tzn. prosta $y = 0$) przechodzi na okrąg $|w| = 1$, a punkt $z_0$ w punkt $w = 0$. Wówczas funkcja $U$ określona jako $U(w) = u(z)$, gdzie $z = x + iy$, jest funkcją harmoniczną w kole $|w| < 1$ taką, że

$$U_{||w|=1} = u(x, 0) = \alpha(x) =: A(\psi),$$

gdzie $w = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ (patrz zadanie 5 z poprzedniego wykładu).

Z twierdzenia Gaussa o wartości średniej dla funkcji harmonicznych wynika, że

$$U(0) = u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\left(e^{i\psi}\right) d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(\psi)\, d\psi. \tag{7.22}$$

Ponieważ

$$e^{i\psi} = \frac{x - z_0}{x - \overline{z}_0}, \text{ więc } d\psi = \frac{2y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} dx.$$

Zamieniając zmienne w całce (7.22), otrzymujemy

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0}{(x - x_0)^2 + y_0^2} \alpha(x)\, dx. \tag{7.23}$$

Wzór (7.23) przedstawia rozwiązanie zagadnienia (7.20)-(7.21).

## 7.4 Jednoznaczność zagadnienia Dirichleta i Neumanna

Niech $u_1$ i $u_2$ będą dwoma rozwiązaniami zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a (Poissona). Wówczas różnica $u = u_1 - u_2$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\Delta u = 0, \text{ dla } x \in D, \ u_{|\partial D} = 0.$$

Z własności funkcji harmonicznych wynika, że $u \equiv 0$, zatem $u_1 \equiv u_2$ w $D$.

W przypadku zagadnienia Neumanna różnica $u = u_1 - u_2$ dwóch rozwiązań tego zagadnienia jest rozwiązaniem problemu

$$\Delta u = 0, \text{ dla } x \in D, \ \frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial D} = 0.$$

Na mocy własności 3 funkcji harmonicznych wnioskujemy, że $u = Const$. O ile więc nie przyjmiemy jakiegoś dodatkowego założenia , to nie możemy twierdzić, że rozwiązanie zagadnienia Neumanna, o ile istnieje, jest jedyne. Zwykle takim dodatkowym założeniem gwarantującym jednoznaczność rozwiązania jest podanie wartości $u$ w jakimś punkcie obszaru $D$.

**U w a g a**
Z pierwszej tożsamości Greena (6.5) dla $u = 1$, $v = u$ wynika, że

$$\iint_D \Delta u\,(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

Oznacza to, że w zagadnieniu Neumanna nie można zadać wartości pochodnej $\frac{\partial u}{\partial n}$ na brzegu $\partial D$ w sposób dowolny. W szczególności funkcje dane muszą spełniać warunek

$$\iint_D f\,(x,y)\,dxdy = \int_{\partial D} g\,(s)\,ds. \tag{7.24}$$

Jest to warunek konieczny rozwiązalności tego zagadnienia.

## 7.5 Stabilność rozwiązania zagadnienia Dirichleta

Załóżmy, że $u_1$ i $u_2$ są rozwiązaniami zagadnienia Dirichleta dla równania Poissona

$$\Delta u_i = f \quad \text{dla} \quad (x,y) \in D, \quad i = 1,2$$

z warunkami brzegowymi

$$u_{i|\partial D} = g_i, \quad i = 1,2.$$

W takim razie funkcja $u = u_1 - u_2$ jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a

$$\Delta u = 0 \quad \text{w } D, \quad u_{|\partial D} = g_1 - g_2.$$

Przypuśćmy, że dla każdego $P \in \partial D$ zachodzi nierówność

$$|g_1(P) - g_2(P)| \le \varepsilon.$$

Ponieważ funkcja stała równa $\varepsilon$, jest funkcją harmoniczną, więc na mocy wniosku 2 z zasady maksimum dla funkcji harmonicznych (patrz poprzedni wykład), zachodzi nierówność

$$|u_1(x,y) - u_2(x,y)| \le \varepsilon$$

dla dowolnych punktów $(x,y) \in D$, co dowodzi stabilności rozwiązania.

## 7.6 Zadania

1. Znaleźć funkcję harmoniczną $u\,(x,y)$ w obszarze $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ spełniającą warunek brzegowy $u_{|\partial D} = x + xy$.

2. Znaleźć funkcję harmoniczną $u\,(x,y)$ w obszarze $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}$ spełniającą warunek brzegowy $u_{|\partial D} = x^2 - 2xy + 2y^2$.

3. Znaleźć funkcję harmoniczną $u\,(x,y)$ w obszarze $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < a^2\}$ spełniającą warunek brzegowy $u_{|\partial D} = 3x^2 + xy - 3y^2 + x - y - 2$, $a > 0$.

4. Znaleźć funkcję harmoniczną $u\,(x,y)$ w obszarze $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}$ spełniającą warunek brzegowy $u_{|\partial D} = x + 3xy - x^2y$.

5. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x,y)$ w obszarze $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ spełniającą warunek brzegowy $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial D} = x + y$ i taką, że $u(0,0) = 0$.

6. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x,y)$ w obszarze $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ spełniającą warunek brzegowy $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial D} = x^3 - y^3$ i taką, że $u(0,0) = 3$.

7. Znaleźć funkcję harmoniczną $u(x,y)$ w obszarze $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ spełniającą warunek brzegowy $\frac{\partial u}{\partial n}_{|\partial D} = x^2$ i taką, że $u(0,0) = 0$.

8. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a $\Delta u = 0$ w prostokącie $D = [0,a] \times [0,b]$, jeżeli na brzegu prostokąta określone są warunki $u(0,y) = \varphi_0(y)$, $u(a,y) = \varphi_1(y)$, $u(x,0) = \psi_0(x)$, $u(x,b) = \psi_1(x)$ oraz funkcje dane spełniają odpowiednie warunki zgodności. Rozwiązać powyższe zagadnienie w przypadku szczególnym
$$\varphi_0(y) = Ay(b-y)\,,\ \psi_0(x) = B\sin\frac{\pi x}{a},\ \varphi_1(y) = \psi_1(x) = 0.$$

9. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a $\Delta u = 0$ w prostokącie $D = [0,a] \times [0,b]$, jeżeli na brzegu prostokąta określone są warunki $u(0,y) = A$, $u(a,y) = Ay$, $u_y(x,0) = 0$, $u_y(x,b) = 0$.

10. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a $\Delta u = 0$ w prostokącie $D = [0,a] \times [0,b]$, jeżeli na brzegu prostokąta określone są warunki $u(0,y) = A$, $u_x(a,y) = 0$, $u_y(x,0) = T\sin\frac{\pi x}{2a}$, $u(x,b) = 0$.