Temat 8

Dystrybucje, wiadomości wstępne (I)

Wielkości fizyczne opisujemy najczęściej przyporządkowując im funkcje (np. zależne od czasu). Inną drogą opisu tych wielkości jest przyporządkowanie im funkcjonałów określonych na odpowiednich przestrzeniach funkcyjnych rzeczywistych lub zespolonych. Funkcjonały takie nazywamy *dystrybucjami*. Dystrybucje mogą być określone na różnych przestrzeniach funkcyjnych. Zmieniając odpowiednią przestrzeń funkcyjną zmieniamy klasę dystrybucji.

Poniżej przedstawimy podstawowe pojęcia dotyczące dystrybucji.

8.1 Przestrzeń funkcji próbnych D, przestrzeń D'

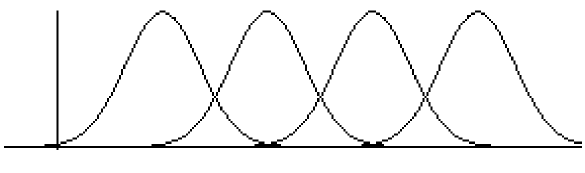
Przyjmujemy następującą definicję.

D e f i n i c j a
D (*zbiór funkcji próbnych*) $= C_0^\infty(R)$ lub $C_0^\infty(R^n)$.

Oznacza to, że $\varphi \in D \Leftrightarrow \varphi \in C^\infty$ oraz $\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}}$ (*nośnik funkcji*) jest zwarty (φ może być funkcją o wartościach rzeczywistych lub zespolonych).

W przestrzeni funkcji próbnych definiujemy *zbieżność ciągu funkcyjnego* w sposób następujący.

D e f i n i c j a
$\varphi_n \to \varphi$ w $D \Leftrightarrow \forall k \in N \;\; \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows \varphi^{(k)}$ oraz nośniki $\operatorname{supp}\varphi_n$ są wspólnie ograniczone.



(to jest kontrprzykład na zbieżność - brak wspólnej ograniczoności nośników).

T w i e r d z e n i e
Każda funkcja ciągła $f(t)$ o nośniku ograniczonym może być jednostajnie przybliżona przez funkcje z przestrzeni D.

Dla dowodu twierdzenia należy rozważyć funkcję

$$\xi(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |t| \geq 1 \\ e^{\frac{1}{t^2-1}} & \text{dla } |t| < 1, \end{cases}$$

następnie zauważyć, że jest ona klasy C^∞ i utworzyć kolejną funkcję pomocniczą określoną wzorem

$$g_\alpha(t) = \frac{\xi\left(\frac{t}{\alpha}\right)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt}, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_\alpha(t)\, dt = 1$$

dla $\alpha > 0$. Funkcja g_a jest tożsamościowo równa zeru poza przedziałem $(-\alpha, \alpha)$.

Niech

$$\varphi_\alpha(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g_\alpha(t-\tau)\, d\tau, \varphi_\alpha \in D.$$

Funkcja φ_α jest żądanym przybliżeniem, ponieważ

$$|f(t) - \varphi_\alpha(t)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [f(t) - f(\tau)]\, g_\alpha(t-\tau)\, d\tau \right| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(\tau)|\, g_\alpha(t-\tau)\, d\tau.$$

Dobierając α tak małe, by dla $|t-\tau| < \alpha$ na mocy jednostajnej ciągłości funkcji f zachodziła nierówność $|f(t) - f(\tau)| < \varepsilon$ otrzymujemy tezę, gdyż

$$|f(t) - \varphi_\alpha(t)| \leq \varepsilon \int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} g_\alpha(t-\tau)\, d\tau = \varepsilon$$

■

D e f i n i c j a

Przestrzenią dystrybucji D' nazywamy przestrzeń funkcjonałów liniowych i ciągłych na D (względem zbieżności określonej w poprzedniej definicji).

W przestrzeni D' określamy zbieżność jak następuje. Niech T_n, $T \in D'$ (oznaczamy równoważnie $T(\varphi) = \langle T|\varphi\rangle$).

D e f i n i c j a

$T_n \to T$ w $D' \Leftrightarrow \forall \varphi \in D \Rightarrow T_n(\varphi) \to T(\varphi)$

T w i e r d z e n i e

Przestrzeń D' jest domknięta ze względu na zbieżność (tzn. granica ciągu funkcjonałów liniowych i ciągłych jest funkcjonałem liniowym i ciągłym).

■

Spośród wszystkich dystrybucji szczególnie wyróżniamy tzw. dystrybucje regularne. Są to dystrybucje wyznaczone przez funkcje lokalnie całkowalne. Niech f będzie funkcją lokalnie całkowalną na $\mathbb{R}$, a więc funkcją, dla której istnieje całka oznaczona po dowolnym przedziale skończonym z funkcji $|f(t)|$.

D e f i n i c j a

Dystrybucją regularną wyznaczoną przez lokalnie całkowalną funkcję f nazywamy dystrybucję określoną wzorem

$$\langle f|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

dla $\varphi \in D$.

Poprawność tej definicji (ciągłość funkcjonału) wynika z oszacowania

$$|\langle f|\varphi\rangle - \langle f|\varphi_n\rangle| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,|\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,dt = \int_K |f(t)|\,|\varphi(t) - \varphi_n(t)|\,dt \leq M_K \cdot \varepsilon$$

gdzie K jest zbiorem zwartym, w którym zawarte są nośniki wszystkich funkcji φ_n, φ.

Wiele własności dystrybucji i pojęć z nimi związanych wprowadza się w ten sposób, by były one uogólnieniem własności dystrybucji regularnych. Dotyczy to przede wszystkim *różniczkowania dystrybucji*, pojęcia *równości dystrybucji na zbiorze otwartym* (mimo, że dystrybucja nie jest funkcją mającą określoną wartość w każdym punkcie) oraz pojęcia *nośnika dystrybucji.*

Rozważmy na początek funkcję lokalnie całkowalną f, której pochodna f' jest także funkcją lokalnie całkowalną. Niech $\varphi \in D$ będzie taka, że $\operatorname{supp}\varphi \subset K = [a,b]$ - zwarty. Wówczas ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\,\varphi(t)\,dt = \int_{a-1}^{b+1} f'(t)\,\varphi(t)\,dt = \underbrace{f(t)\,\varphi(t)|_{a-1}^{b+1}}_{0} - \int_{a-1}^{b+1} f(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

co pozwala przyjąć następującą definicję różniczkowania w przestrzeni D'.

D e f i n i c j a

Pochodną dystrybucji $T \in D'$ nazywamy dystrybucję $T' = DT$ określoną wzorem

$$\langle T'|\varphi\rangle = -\langle T|\varphi'\rangle \tag{8.1}$$

dla $\varphi \in D$ (w ten sposób każda dystrybucja, a więc i każda funkcja lokalnie całkowalna, ma pochodną). Pochodną tą nazywamy pochodną w sensie dystrybucyjnym.

W przypadku wielowymiarowym powyższą definicję modyfikujemy do wzoru

$$\langle D^\alpha T|\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T|D^a\varphi\rangle \tag{8.2}$$

gdzie α jest wielowskaźnikiem $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, zaś

$$D^\alpha\varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}\varphi. \tag{8.3}$$

D e f i n i c j a

Dystrybucje T_1, $T_2 \in D'$ są *równe na zbiorze otwartym* $A \subset \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek

$$\forall\varphi \in D \;\; \operatorname{supp}\varphi \subset A \Rightarrow \langle T_1|\varphi\rangle = \langle T_2|\varphi\rangle \,.$$

D e f i n i c j a

Nośnikiem dystrybucji $T \in D'$ nazywamy najmniejszy zbiór domknięty $F \subset R$ taki, że $T = 0$ na F' w sensie poprzedniej definicji.

Spośród wszystkich dystrybucji wyrózniamy tzw. dystrybucje skończonego rzędu będące pochodnymi dystrybucyjnymi funkcji ciągłych.

D e f i n i c j a

Dystrybucję $T \in D'$ nazywamy *dystrybucją skończonego rzędu* wtedy i tylko wtedy gdy istnieje funkcja $h(t)$ ciągła na $\mathbb{R}$ oraz liczba naturalna k taka, że $T = D^k h$. Najmniejszą liczbę k o tej własności nazywamy rzędem dystrybucji T.

T w i e r d z e n i e

Każda dystrybucja $T \in D'$ jest lokalnie dystrybucją skończonego rzędu tzn., że dla ustalonego ograniczonego lecz dowolnego przedziału $(a, b) \subset \mathbb{R}$ istnieje $h \in C(a, b)$, $k \geq 0$ taka, że $\forall\varphi \in D$ $\operatorname{supp}\varphi \subset (a, b)$ zachodzi

$$\langle T|\varphi\rangle = (-1)^k \int_a^b h(t)\,\varphi^{(k)}(t)\,dt = (-1)^k \int_R h(t)\,\varphi^{(k)}(t)\,dt = \left\langle D^k h|\varphi\right\rangle \tag{8.4}$$

(dla dystrybucji skończonego rzędu równość powyższa zachodzi dla wszystkich $\varphi \in D$ - bez żadnych dodatkowych ograniczeń co do nośnika φ).

■

T w i e r d z e n i e

Niech f będzie lokalnie całkowalna na $\mathbb{R}$. Niech $h(t) = \int_\alpha^t f(\tau)\,d\tau$. Wówczas $f = Dh$ (w sensie dystrybucyjnym).

W teorii całki Lebesgue'a dowodzi się, że $h(t)$ jest różniczkowalna prawie wszędzie (tzn. ewentualnie poza zbiorem miary zero) i prawie wszędzie $h'(t) = f(t)$. W takim razie mamy na mocy wzoru na całkowanie przez części

$$\langle Dh|\varphi\rangle = -\langle h|\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\varphi'(t)\,dt = \underbrace{-h(t)\,\varphi(t)|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt =$$

$$= \langle f|\varphi\rangle \quad \text{a więc } Dh = f.$$

Ponieważ h jest ciągła, więc f jest skończonego rzędu (0 - gdy f ciągła, 1 - w przeciwnym razie).

■

8.1.1 Przykłady dystrybucji skończonego rzędu

P r z y k ł a d 1

Niech $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$. Wówczas $Dh = 1_+$, gdzie 1_+ jest funkcją skoku jednostkowego (*funkcją Heavyside'a*) określoną jako $1_+(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$.
Obliczając z definicji pochodną Dh otrzymujemy

$$\langle Dh|\varphi\rangle = -\langle h|\varphi'\rangle = -\int\limits_0^{+\infty} t\varphi'(t)\,dt = \underbrace{-t\varphi(t)|_0^{+\infty}}_{0} + \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} 1_+(t)\,\varphi(t)\,dt = \langle 1_+|\varphi\rangle \quad \text{a więc } Dh = 1_+$$

P r z y k ł a d 2

Niech $\delta = D1_+ = D^2h$. Obliczmy wartość $\langle\delta|\varphi\rangle$.

$$\langle\delta|\varphi\rangle = \langle D1_+|\varphi\rangle = -\langle 1_+|\varphi'\rangle = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(t)\,dt = \underbrace{-\varphi(\infty)}_{0} + \varphi(0) = \varphi(0)$$

Dystrybucja δ zwana jest tzw. *deltą Diraca*. Nie jest ona dystrybucją regularną, ponieważ nie istnieje funkcja lokalnie całkowalna f taka, że $\forall\varphi \in D$ zachodzi $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$, jest ona jednakże dystrybucją skończonego rzędu, jej rząd równy jest 2.

P r z y k ł a d 3

Dystrybucje $\delta^{(n)} = D^n\delta = D^{n+2}h$ (pochodne delty Diraca) są także dystrybucjami skończonego ($n + 2$ - go) rzędu. Korzystając z definicji obliczamy natychmiast, że

$$\left\langle\delta^{(n)}|\varphi\right\rangle = (-1)^n \left\langle\delta|\varphi^{(n)}\right\rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

8.2 Transformata Laplace'a dystrybucji

Ze zbioru wszystkich dystrybucji skończonego rzędu wybieramy te, które są pochodnymi dystrybucyjnymi funkcji ciągłych $h(t)$ spełniających dwa dodatkowe warunki:

1. $h(t) = 0$ dla $t < 0$,
2. $L\{h(t)\}$ istnieje i jest zbieżna bezwzględnie dla $\operatorname{Re} s > \sigma$.

Zbiór takich dystrybucji oznaczamy przez D'_o.

D e f i n i c j a

Dla dystrybucji $T = D^k h \in D'_0$ definiujemy przekształcenie Laplace'a wzorem

$$L\{T\}(s) = s^k L\{h(t)\}(s) = s^k H(s),$$

gdzie $H(s) = L\{h(t)\}(s)$.jest klasyczną transformatą Laplace'a funkcji $h(t)$.

T w i e r d z e n i e
Jeśli funkcja $f(t)$ posiada L transformatę w sensie klasycznym, to posiada również transformatę w sensie dystrybucyjnym i transformaty te są równe.

Niech $h(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$ oraz niech $L\{f\}(s) = F(s)$ w sensie klasycznym. Wówczas h spełnia warunki 1 i 2 oraz $Dh = f$. Ponadto, zgodnie z tw. o transformacie całki w sensie klasycznym $L\{h\}(s) = \frac{1}{s}L\{f\}(s) = \frac{1}{s}F(s)$. Zatem z poprzedniej definicji wynika, że wyznaczając tę transformatę w sensie dystrybucyjnym dostajemy

$$L\{f\}(s) = L\{Dh\} = sH(s) = s \cdot \frac{1}{s}F(s) = F(s)$$

co kończy dowód.

■

8.2.1 Przykłady transformaty Laplace'a dystrybucji

P r z y k ł a d 1
$T = \delta$. Ponieważ $\delta = D^2 h(t)$, gdzie $h(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ t & \text{dla } t \geq 0 \end{cases}$ spełnia 1 i 2, więc

$$L\{\delta\}(s) = s^2 L\{h(t)\}(s) = s^2\frac{1}{s^2} = 1$$

(funkcja stała nie należy do przestrzeni obrazów klasycznej transformaty Laplace'a).

P r z y k ł a d 2
$T = \delta^{(n)}$. Ponieważ $\delta^{(n)} = D^{n+2}h(t)$, więc

$$L\left\{\delta^{(n)}\right\}(s) = s^{n+2}\frac{1}{s^2} = s^n \text{ (wielomian).}$$

P r z y k ł a d 3
$T = \delta(t-a)$, gdzie $\langle \delta(t-a), \varphi\rangle := \varphi(a)$. Ponieważ $\delta(t-a) = D^2 h(t-a)$, więc na mocy własności klasycznej transformaty (tw. o przesunięciu) otrzymujemy

$$L\{\delta(t-a)\}(s) = s^2 e^{-as}\frac{1}{s^2} = e^{-as}$$

8.2.2 Najważniejsze własności L-transformaty dystrybucji

Załóżmy, że $T \in D_0'$ tzn. $T = D^k h(t)$, $h(t)$ spełnia warunki 1 i 2 oraz

$$L\{T\}(s) = s^k L\{h\}(s) = s^k H(s) = F(s)$$

D e f i n i c j a

Niech $b \in \mathbb{R}$. Wówczas *operator przesunięcia* τ_b określony na funkcjach próbnych równością $\tau_b\varphi(t) = \varphi(t-b)$ definiujemy w przestrzeni dystrybucji jako

$$\langle \tau_b T|\varphi\rangle = \langle T|\varphi(t+b)\rangle$$

„Uzasadnieniem" tej definicji jest następująca równość dla funkcji lokalnie całkowalnych

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-b)\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\varphi(t+b)\,dt.$$

Przykładowo, $\langle \tau_b\delta|\varphi\rangle = \langle \delta|\varphi(t+b)\rangle = \varphi(b)$ - por. przykład 3.

T w i e r d z e n i e (*o przesunięciu*)

Dla każdego $b > 0$ prawdziwy jest wzór

$$L\{\tau_b T\}(s) = e^{-bs}F(s).$$

Dla dowodu zauważmy, że

$$\begin{aligned}
\langle \tau_b T|\varphi(t)\rangle &= \left\langle D^k h(t)\,|\varphi(t+b)\right\rangle = (-1)^k\left\langle h(t)\,|\varphi^{(k)}(t+b)\right\rangle = \\
&= (-1)^k\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,\varphi^{(k)}(t+b)\,dt = \\
&= (-1)^k\int_{-\infty}^{+\infty} h(t-b)\,\varphi^{(k)}(t)\,dt = \left\langle D^k h(t-b)\,|\varphi\right\rangle
\end{aligned}$$

co oznacza, że $\tau_b T = D^k h(t-b)$. Zatem

$$L\{\tau_b T\}(s) = L\left\{D^k h(t-b)\right\}(s) = s^k e^{-bs}H(s) = e^{-bs}F(s).$$

■

Analogicznie do operatora przesunięcia wprowadzamy w przestrzeni dystrybucji *operację mnożenia dystrybucji przez funkcję klasy* C^∞. Ponieważ dla f - lokalnie całkowalnych, $\varphi \in D$, $\psi \in C^\infty$ zachodzi oczywisty wzór

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t)\,\psi(t))\,\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,(\psi(t)\,\varphi(t))\,dt,$$

więc w naturalny sposób wprowadzamy następującą definicję mnożenia dystrybucji $T \in D'$ przez funkcję $\psi \in C^\infty$.

D e f i n i c j a (*mnożenia dystrybucji przez funkcje klasy* C^∞)
$\langle T\psi|\varphi\rangle := \langle T|\psi\varphi\rangle$.

T w i e r d z e n i e (*przesunięcie w dziedzinie zespolonej*)
Jeżeli $T \in D'_o$, $\alpha \in C$, to zachodzi wzór

$$L\left\{e^{-\alpha t}T\right\}(s) = F(s+\alpha)$$

Dla dowodu skorzystamy ze wzoru Leibniza na pochodną iloczynu funkcji. Niech $T = D^k h$. Wówczas otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left\langle e^{-\alpha t}T|\varphi\right\rangle &= \left\langle T|e^{-\alpha t}\varphi\right\rangle = \left\langle D^k h|e^{-\alpha t}\varphi\right\rangle = (-1)^k\left\langle h|\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-\alpha)^i e^{-\alpha t}D^{k-i}\varphi\right\rangle = \\ &= (-1)^k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-\alpha)^i\underbrace{\left\langle h|e^{-\alpha t}\varphi^{(k-i)}\right\rangle}_{\left\langle he^{-\alpha t}|\varphi^{(k-i)}\right\rangle} = \\ &= (-1)^k\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-\alpha)^i(-1)^{k-i}\left\langle D^{k-i}\left(h(t)e^{-\alpha t}\right)|\varphi\right\rangle = \\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\alpha^i\left\langle D^{k-i}\left(h(t)e^{-\alpha t}\right)|\varphi\right\rangle.\end{aligned}$$

W takim razie $e^{-\alpha t}T = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\alpha^i D^{k-i}\left(h(t)e^{-\alpha t}\right)$, a więc

$$L\left\{e^{-\alpha t}T\right\}(s) = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\alpha^i s^{k-i}H(s+\alpha) = H(s+\alpha)(s+\alpha)^k = F(s+\alpha)$$

co kończy dowód.

■

T w i e r d z e n i e (*o transformacie pochodnej*)
Jeśli $T \in D'_0$, $n \in N$, to prawdziwy jest wzór

$$L\{D^n T\}(s) = s^n F(s).$$

Niech $T = D^k h(t)$, zatem $D^n T = D^{n+k}h(t)$. Stąd

$$L\{D^n T\}(s) = L\left\{D^{n+k}h\right\}(s) = s^{n+k}H(s) = s^n F(s).$$

co kończy dowód.

■

U w a g a

Powyższy wzór różni się pozornie od sformułowania klasycznego. W sformułowaniu klasycznym prawdziwy jest wzór

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - f\left(0^+\right)s^{n-1} - f'\left(0^+\right)s^{n-2} - ... - f^{(n-1)}\left(0^+\right). \tag{8.5}$$

Występująca między obydwoma przypadkami różnica jest jednak tylko pozorna. Jeżeli oznaczymy przez $[f]$ dystrybucję generowaną przez funkcję f (równą 0 dla $t < 0$), to łatwo pokazać przez indukcję względem n, że pochodna w sensie dystrybucyjnym $D^n[f]$ może być wyznaczona jako

$$D^n[f] = \left[f^{(n)}\right] + f^{(n-1)}\left(0^+\right)\delta + ... + f\left(0^+\right)\delta^{(n-1)}. \tag{8.6}$$

Najpierw obliczamy dla $n = 1$ jak następuje

$$\langle Df|\varphi\rangle = -\langle f|\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(t)}_{0}\varphi'(t)\,dt - \int_{0}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt =$$

$$= -f(t)\varphi(t)\big|_{t=0}^{t=+\infty} + \int_{0}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)\,dt = f\left(0^+\right)\underbrace{\langle\delta|\varphi\rangle}_{\varphi(0)} + \langle f'|\varphi\rangle,$$

tzn. $D[f] = [f'] + f(0^+)\delta$. Stąd dalej łatwo przez indukcję uzyskać wzór (8.6) dla dowolnego n. Stosując do wzoru (8.6) twierdzenie o transformacie pochodnej (w sensie dystrybucyjnym) otrzymujemy

$$s^n L\{f\}(s) = L\left\{f^{(n)}\right\}(s) + f^{(n-1)}\left(0^+\right) + ... + f\left(0^+\right)s^{n-1},$$

który jest równoważny wzorowi klasycznemu (8.5).

■

T w i e r d z e n i e (*o różniczkowaniu transformaty*)

Dla dowolnego $n \in N$ prawdziwy jest wzór

$$L\{(-t)^n T\}(s) = F^{(n)}(s).$$

Widać, że wystarczy przeprowadzić dowód w przypadku $n = 1$ (dalej natychmiast przez indukcję). Niech $F(s) = s^k H(s)$. Stąd $F'(s) = ks^{k-1}H(s) + s^k H'(s)$. Ponieważ na mocy własności klasycznej transformaty Laplace'a $L\{(-t)h(t)\} = H'(s)$, więc

$$L\left\{kD^{k-1}h(t) + D^k[(-t)h(t)]\right\}(s) = F'(s).$$

Stosując wzór Leibniza do wyrażenia $D^k[(-t)h(t)]$ mamy

$$D^k[(-t)h(t)] = -\binom{k}{0}tD^k h(t) - \binom{k}{1}1\cdot D^{k-1}h(t) = -tD^k h(t) - kD^{k-1}h(t)$$

zatem

$$F'(s) = L\left\{kD^{k-1}h(t) - tD^k h(t) - kD^{k-1}h(t)\right\}(s) = L\left\{(-t)D^k h(t)\right\} = L\{(-t)T\}$$

co kończy dowód.

■

8.3 Zadania

1. Niech T będzie funkcjonałem określonym następująco

$$\langle T|\varphi\rangle := \int_0^1 \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t}dt \quad \text{dla } \varphi \in D.$$

   Pokazać, że: a) $T \in D'$, b) $T = D\left[1_+(t)\ln t\right]$.

2. Niech T będzie funkcjonałem określonym następująco

$$\langle T|\varphi\rangle := -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t\sqrt{t}}dt \quad \text{dla } \varphi \in D.$$

   Pokazać, że a) $T \in D'$, b) $T = D\left[1_+(t)\, t^{-\frac{1}{2}}\right]$.

3. Obliczyć pochodne dystrybucyjne do rzędu trzeciego włącznie funkcji $f(t) = |\sin t|$.

4. Obliczyć pochodne dystrybucyjne do rzędu trzeciego włącznie funkcji $f(t) = |t|\sin t$.

5. Obliczyć pochodne dystrybucyjne do rzędu trzeciego włącznie funkcji $f(t) = |t\sin t|$.

6. Wiedząc, że $L\{J_0(t)\}(s) = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$ wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji $F(s) = \sqrt{s^2+\alpha^2}$.

7. Pokazać, że w przestrzeni dystrybucji D_0' prawdziwa jest równość

$$t^k\delta^{(k)} = (-1)^k k!\delta.$$

8. Pokazać, że w przestrzeni dystrybucji D_0' prawdziwa jest równość

$$(\sin at)\,\delta^{(1)} = -a\delta.$$

9. Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$D^3y + 3D^2y + 3Dy + y = \delta^{(4)}(t-1).$$

10. Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$tDy + 2y = 0.$$

11. Rozwiązać w przestrzeni dystrybucji równanie różniczkowe

$$t^2D^2y + 4tDy + 2y = \delta.$$

12. Przedyskutować szeregowy układ RLC w przypadku impulsu wejściowego $U(t) = U_0 \cdot 1_+(t)$.