Temat 9

Dystrybucje, wiadomości wstępne (II)

9.1 Splot dystrybucji z przestrzeni D_0'

D e f i n i c j a
Niech $T_1 = D^{k_1} h_1$, $T_2 = D^{k_2} h_2 \in D_0'$. Wówczas określamy splot

$$T_1 * T_2 = D^{k_1+k_2} [h_1 * h_2]$$

Powyższa definicja jest poprawna, ponieważ splot funkcji ciągłych prawostronnych h_1 i h_2 jest funkcją ciągłą prawostronną posiadającą transformatę Laplace'a (tw. Borela), zatem $T_1 * T_2 \in D_0'$. W przypadku, gdy T_1 i T_2 są generowane przez funkcje lokalnie całkowalne f_1 i f_2, to powyższa definicja jest równoważna definicji klasycznej.

Istotnie, w tym przypadku niech $h_1 = f_1 * 1$, $h_2 = f_2 * 1$, tzn. $T_1 = Dh_1$, $T_2 = Dh_2$. Wtedy zgodnie z powyższą definicją

$$T_1 * T_2 = D^2 [f_1 * 1 * f_2 * 1] = D^2 [(f_1 * f_2 * 1) * 1] = D [(f_1 * f_2) * 1] = f_1 * f_2.$$

T w i e r d z e n i e (*Borela dla dystrybucji*)
Niech $T_1, T_2 \in D_0'$ mają transformaty Laplace'a równe odpowiednio $F_1(s)$, $F_2(s)$. Wówczas

$$L\{T_1 * T_2\}(s) = F_1(s) F_2(s)$$

Dla dowodu niech $T_1 = D^{k_1} h_1$, $T_2 = D^{k_2} h_2$. Wtedy

$$L\{T_1 * T_2\}(s) = L\left\{D^{k_1+k_2}[h_1 * h_2]\right\}(s) = s^{k_1+k_2} L\{h_1 * h_2\} \underbrace{=}_{\text{tw. Borela}} s^{k_1+k_2} H_1(s) H_2(s) =$$

$$= \underbrace{s^{k_1} H_1(s)}_{F_1(s)} \underbrace{s^{k_2} H_2(s)}_{F_2(s)} = F_1(s) F_2(s)$$

■

9.1.1 Własności splotu dystrybucji

Omówimy teraz najważniejsze własności splotu dystrybycji, związane z różniczkowaniem i dystrybucją δ Diraca.

W ł a s n o ś ć 1 (*splot z dystrybucją* δ)
Ponieważ $\delta = D^2 [1 * 1]$, zatem dla dowolnej dystrybucji $T \in D'_0$ zachodzi

$$T * \delta = D^{k+2} [h * 1 * 1] = D^{k+1} [h * 1] = D [h] = T \tag{9.1}$$

co oznacza, że δ jest jedynką algebry dystrybucji.

■

W ł a s n o ś ć 2 (*splot z dystrybucją* $\delta^{(n)}$)
Podobnie jak w poprzednim przypadku zapisujemy $\delta^{(n)} = D^{n+2} [1 * 1]$, więc

$$T * \delta^{(n)} = D^{k+n+2} [h * 1 * 1] = D^n D^k h = D^n T, \tag{9.2}$$

zatem splot z dystrybucją $\delta^{(n)}$ jest różniczkowaniem. Pozwala to zapisać równanie różniczkowe w przestrzeni dystrybucji

$$c_n D^n y + c_{n-1} D^{n-1} y + ... + c_1 D y + c_0 y = f \tag{9.3}$$

w równoważnej postaci splotowej

$$\left(c_n \delta^{(n)} + c_{n-1} \delta^{(n-1)} + ... + c_1 \delta' + c_0 \delta\right) * y = f. \tag{9.4}$$

■

W ł a s n o ś ć 3 (*różniczkowanie dystrybucyjne splotu*)
Jeżeli T_1, $T_2 \in D'_0$, to wykorzystując własność 2 możemy napisać

$$D^m (T_1 * T_2) = T_1 * T_2 * \delta^{(m)} = \underbrace{\left(T_1 * \delta^{(m)}\right)}_{D^m T_1} * T_2 = T_1 * \underbrace{\left(T_2 * \delta^{(m)}\right)}_{D^m T_2}$$

co oznacza, że

$$D^m (T_1 * T_2) = (D^m T_1) * T_2 = T_1 * (D^m T_2). \tag{9.5}$$

■

W ł a s n o ś ć 4 (*własność rozwiązania podstawowego*)
Jeżeli y_δ jest taką dystrybucją, że $L [y_\delta] = \delta$, gdzie L jest operatorem różniczkowym określonym wzorem

$$L [y] = c_n D^n y + c_{n-1} D^{n-1} y + \ldots + c_1 D y + c_0 y,$$

to na mocy wzorów (9.5) i (9.1) możemy napisać, że

$$L [y_\delta * f] = L [y_\delta] * f = \delta * f = f. \tag{9.6}$$

Dystrybucję y_δ taką, że $L [y_\delta] = \delta$ nazywamy *rozwiązaniem podstawowym* równania $L [y] = f$.

■

9.2 Przestrzeń dystrybucji temperowanych

D e f i n i c j a

Przestrzenią *funkcji szybkomalejących* nazywamy zbiór funkcji klasy C^{∞} spełniających dla $|t| \to \infty$, dowolnych n, k naturalnych, nierówności

$$\left|t^n \varphi^{(k)}\right| \leq c_{n,k} \tag{9.7}$$

dla pewnych stałych $c_{n,k}$ (zależnych tylko od n i k). Przestrzeń funkcji szybkomalejących oznaczamy symbolem Φ.

Powyższy warunek oznacza, że dowolna pochodna funkcji φ dąży do zera w nieskończoności szybciej niż dowolna potęga $\frac{1}{|t|}$.

U w a g a

Zachodzi oczywista inkluzja $D \subset \Phi$, bowiem każda funkcja o nośniku zwartym jest szybkomalejąca. Co więcej, rozważając przykład funkcji $\varphi(t) = e^{-t^2} \in \Phi$ łatwo zauważyć, że $\varphi \notin D$, zatem $D \subsetneq \Phi$.

■

D e f i n i c j a

Mówimy, że ciąg funkcji $\varphi_n \in \Phi$ zbiega do $\varphi \in \Phi \Leftrightarrow \forall m, k \in N \Rightarrow t^m \varphi_n^{(k)} \rightrightarrows t^m \varphi^{(k)}$ (zb. jednostajna)

D e f i n i c j a

Dystrybucją wolnorosnącą (*temperowaną*) nazywamy funkcjonał liniowy i ciągły na przestrzeni Φ. Zbiór dytrybucji wolnorosnących oznaczamy Φ'.

U w a g a

Oczywiście jeżeli $f \in \Phi'$, to $f \in D'$, zatem $\Phi' \subset D'$. Rozważając przykład dystrybucji określonej wzorem

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{n^2} \delta(t-n) \quad \text{tzn} \quad \langle f|\varphi\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{n^2} \varphi(n) \tag{9.8}$$

widać, że jest ona poprawnie zdefiniowana dla $\varphi \in D$ (odpowiednia suma jest skończona, bowiem nośnik φ jest zwarty), natomiast nie jest określona np. dla $\varphi(t) = e^{-t^2} \in \Phi$ (otrzymujemy nieskończony szereg rozbieżny $\sum 1$). W takim razie $\Phi' \subsetneq D'$.

■

Przyjęcie powyższej definicji dystrybucji temperowanej jest uzasadnione tym, że w przypadku funkcji klasycznych (dystrybucji regularnych) dla uzyskania zbieżności całki postaci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \varphi(t)\, dt,$$

gdzie $\varphi \in \Phi$ należy np. założyć, że dla pewnego N zachodzi warunek $\lim\limits_{|t| \to \infty} |t|^{-N} f(t) = 0$. Funkcje takie nazywamy *wolnorosnącymi*. Każda wolnorosnąca funkcja wyznacza dystrybucję wolnorosnącą.

9.2.1 Transformata Fouriera dystrybucji temperowanych

W teorii przekształcenia Fouriera dowodzi się następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e (*równość Parsevala*)
Niech g_1, g_2 będą bezwzględnie całkowalne na R. Niech $G_1 = \Im g_1$, $G_2 = \Im g_2$. Wówczas zachodzi równość

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\,G_2(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\omega)\,g_2(\omega)\,d\omega \tag{9.9}$$

Przekształcając lewą stronę wzoru (9.9) otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\,G_2(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\,du \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\omega)\,e^{-iu\omega}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\,g_2(\omega)\,e^{-iu\omega}du =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iu\omega} g_1(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(\omega)\,g_2(\omega)\,d\omega$$

co kończy dowód.

■

Opierając się na powyższym twierdzeniu obowiązującym dla funkcji klasycznych (dystrybucji regularnych) wprowadzamy definicję transformaty Fouriera dystrybucji temperowanych.

D e f i n i c j a
Dla $f \in \Phi'$ określamy

$$\langle \Im f | \varphi \rangle = \langle f | \Im \varphi \rangle \tag{9.10}$$

dla $\varphi \in \Phi'$.

Następujące dwa twierdzenia uzasadniają poprawność przyjętej definicji.

T w i e r d z e n i e
Jeśli $\varphi \in \Phi$, to $F = \Im\varphi \in \Phi$. Ponadto $\Im : \Phi \to \Phi$ jest ciągła.

Dla dowodu zauważmy, że jeśli $\varphi \in \Phi$, to φ jest całkowalna na R, zatem $F = \Im\varphi$ istnieje. Ze wzorów na transformatę Fouriera funkcji całkowalnych wynika, że o ile $t^k\varphi(t)$ jest całkowalna (a tak jest dla funkcji $\varphi \in \Phi$), to istnieje pochodna $F^{(k)}$ i zachodzi

$$F^{(k)}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-it)^k\, e^{-i\omega t}\varphi(t)\,dt$$

Łatwo zauważyć, że stosując m-krotnie wzór na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\left|(i\omega)^m F^{(k)}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\frac{d^m}{dt^m}\left[(-it)^k\varphi(t)\right]dt\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{d^m}{dt^m}\left[(-it)^k\varphi(t)\right]\right|dt \le Const$$

Istnienie stałej $Const$ wynika z definicji przestrzeni Φ, której elementem jest φ. Oznacza to, że $F = \Im\varphi$ jest także funkcją szybkomalejącą. Ciągłość $\Im$ jako odwzorowania liniowego wynika z ciągłości w zerze.

■

T w i e r d z e n i e
Jeśli $f \in \Phi'$, to jej transformata Fouriera $\Im f \in \Phi'$.

Wystarczy wykazać, że $\Im f$ jest liniowa i ciągła. Liniowość jest oczywista - wynika wprost z przyjętej definicji. Ciągłość wynika z ciągłości transformaty Fouriera dla funkcji szybkomalejących i ciągłości f, ponieważ o ile $\varphi_n \to 0$ w Φ, to

$$\langle \Im f|\varphi_n\rangle = \langle f|\Im\varphi_n\rangle \to \langle f|0\rangle = 0$$

co kończy dowód. ■

9.2.2 Najważniejsze własności i przykłady transformat Fouriera

Niech $F = \Im f$ dla $f \in \Phi'$. Wówczas można sformułować następujące własności - analogiczne do wzorów z teorii klasycznej.

1. $\Im\left[(-it)^k f(t)\right] = F^{(k)}(\omega)$.
   Istotnie, korzystając z definicji transformaty i definicji mnożenia dystrybucji przez funkcje gładkie otrzymujemy dla $k = 1$ (a potem dalej stosujemy indukcję)

$$\langle F'|\varphi\rangle = \langle F| - \varphi'\rangle = \langle f| - \Im\varphi'\rangle = \left\langle f| - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\varphi'(\omega)\,d\omega\right\rangle = \text{ (całk. przez części)}$$

$$= \left\langle f| - it\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\varphi(\omega)\,d\omega\right\rangle = \langle -itf(t)\,|\Im\varphi\rangle = \langle \Im[-itf(t)]\,|\varphi\rangle$$

   zatem $\Im[-itf(t)] = F'$.

2. $\Im\left[D^k f\right] = (i\omega)^k F(\omega)$ - dowód podobnie jak w poprzednim przypadku.

$$\left\langle \Im D^k f|\varphi\right\rangle = \left\langle D^k f|\Im\varphi\right\rangle = (-1)^k\left\langle f|\frac{d^k}{d\omega^k}\Im\varphi\right\rangle = (-1)^k\left\langle f|\Im\left[(-it)^k\varphi(t)\right]\right\rangle =$$
$$= \left\langle \Im f|\,(it)^k\varphi(t)\right\rangle = \left\langle (it)^k F(t)\,|\varphi(t)\right\rangle.$$

3. $\Im[f(t-\tau)](\omega) = e^{-i\omega\tau}F(\omega)$ - analogicznie z definicji operatora przesunięcia τ_b.

4. Niech $f = \delta^{(k)}(t-\tau)$. Wówczas

$$\left\langle \Im\delta^{(k)}(t-\tau)\,|\varphi\right\rangle = \left\langle \delta^{(k)}(t-\tau)\,|\Im\varphi\right\rangle = (-1)^k(\Im\varphi)^{(k)}(\tau) =$$
$$= (-1)^k\,\Im\left[(-it)^k\varphi(t)\right](\tau) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(it)^k e^{-it\tau}\varphi(t)\,dt = \left\langle (it)^k e^{-it\tau}|\varphi(t)\right\rangle, \text{ zatem}$$

$$\Im\delta^{(k)}(t-\tau) = (it)^k e^{-it\tau}.$$

Wynika stąd, że w szczególności

$$\Im\delta = 1, \quad \Im\delta(t-\tau) = e^{-i\omega\tau}, \quad \Im\delta^{(k)} = (it)^k .$$

5. Jeśli $f(t) = 1$, to $\Im[1] = 2\pi\delta$, ponieważ

$$\langle \Im[1] | \varphi \rangle = \langle 1 | \Im\varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \varphi(t)\, dt = 2\pi\varphi(0) = \langle 2\pi\delta | \varphi \rangle .$$

6. $\Im[e^{-it\tau}] = 2\pi\delta(\omega+\tau)$ - dowód analogiczny jak w przypadku poprzednim gdyż

$$\left\langle \Im\left[e^{-it\tau}\right] | \varphi \right\rangle = \left\langle e^{-it\tau} | \Im\varphi \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\tau} dt \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\omega} \varphi(\omega)\, d\omega}_{\Im[\varphi](t)} = 2\pi\varphi(-\tau) =$$

$$= \langle 2\pi\delta(\omega+\tau) | \varphi \rangle .$$

7. $\Im\left[\left(it^k\right)\right] = (-1)^k 2\pi\delta^{(k)} \Longrightarrow \Im\left[t^k\right] = 2\pi (i)^k \delta^{(k)}$ - analogicznie.

8. $\Im\left[(it)^k e^{-it\tau}\right] = (-1)^k 2\pi\delta^{(k)}(\omega+\tau)$ - j. w.

9. $\Im[a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0] = 2\pi\left[a_n i^n \delta^{(n)} + a_{n-1} i^{n-1} \delta^{(n-1)} + ... + a_0\delta\right]$.

10. **Lemat**
Zachodzi tożsamość

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - 2n\pi) . \tag{9.11}$$

Dowód
Niech $\varphi \in \Phi$. Wówczas

$$\left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} | \varphi(\lambda) \right\rangle = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda}\varphi(\lambda)\, d\lambda = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{(2k-1)\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-in\lambda}\varphi(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \lambda - 2k\pi = r \\ d\lambda = dr \end{array} \right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in(r+2k\pi)} \varphi(r+2k\pi)\, dr =$$

$$= |\text{niech } \varphi_k(r) = \varphi(r+2k\pi)| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-in2k\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inr} \varphi_k(r)\, dr =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k) ,$$

gdzie $c_n(\varphi_k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inr}\varphi_k(r)\, dr$ są współczynnikami Fouriera funkcji φ_k. Wyrażenie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n$ (jest wartością sumy szeregu Fouriera tej funkcji w punkcie $r_k = -2k\pi$, a zatem z okresowości tej sumy mamy

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k) = \varphi_k(-2k\pi) = \varphi_k(0) = \varphi(2k\pi).$$

Wynika stąd, że

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in(-2k\pi)} c_n(\varphi_k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(2k\pi) = \left\langle 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - 2k\pi) | \varphi \right\rangle$$

co kończy dowód. ■

11. (*Wzór sumacyjny Poissona*)
Niech $\varphi \in \Phi$, $F = \Im\varphi$. Wówczas zachodzi

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - n) | \Im\varphi \right\rangle = \left\langle \Im \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - n) \right] | \varphi \right\rangle =$$

$$= \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in\lambda} | \varphi \right\rangle \overset{\text{(z lematu)}}{=} 2\pi \left\langle \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\lambda - 2n\pi) | \varphi \right\rangle =$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2n\pi).$$

Udowodniony został zatem wzór

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi(2n\pi). \tag{9.12}$$

12. (*Tożsamość Jacobiego*)
Niech $\varphi(x) = e^{-tx^2}$ dla $t > 0$. Wtedy $F(x) = (\Im\varphi)(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$. Stosując wzór sumacyjny Poissona otrzymujemy

$$\sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2}{4t}} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-4t\pi^2 n^2}.$$

Podstawiając $t = \frac{\tau}{4\pi^2}$ dostajemy inną postać tej tożsamości

$$\sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{\tau}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\tau n^2}. \tag{9.13}$$

9.3 Zadania

1. Udowodnić, że $[t \cdot 1_+(t)] * [e^t \cdot 1_+(t)] = (e^t - t - 1) \cdot 1_+(t)$.
2. Udowodnić, że $[1_+(t) \cdot \sin t] * [1_+(t) \cdot \cos t] = \frac{1}{2} 1_+(t) \cdot t \sin t$.
3. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = 1_+(t-a) - 1_+(t-b)$ dla $a < b$.
4. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = e^{-a|t|}$ dla $a > 0$.

5. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = t^k e^{-at} 1_+(t)$.

6. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ dla $a \in \mathbb{R}$.

7. Wyznaczyć transformatę Fouriera funkcji $f(t) = e^{-at^2}$.