Temat 10

Informacja o przestrzeniach Hilberta

10.1 Przestrzenie unitarne, iloczyn skalarny

Niech dana będzie przestrzeń liniowa X. Załóżmy, że każdej parze elementów $x, y \in X$ została przyporządkowana liczba $(x, y) \in \mathbb{C}$ (lub $\mathbb{R}$), przy czym przyporządkowanie to spełnia warunki:

1° $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

2° $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

3° $(\alpha x, y) = \alpha\,(x, y)$,

4° $(x, x) > 0$ dla $x \neq 0$, $(0, 0) = 0$.

Liczbę (x, y) nazywamy *iloczynem skalarnym* elementów x, y.
Warunki 1° − 4° są aksjomatami iloczynu skalarnego.

U w a g a
Prawdziwe są także wzory:

a) $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$,

b) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}\,(x, y)$.

Wynikają one bezpośrednio z aksjomatów iloczynu skalarnego.

■

T w i e r d z e n i e (*tzw. nierówność Schwarza*)
Iloczyn skalarny spełnia nierówność

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)\,(y, y)\,. \tag{10.1}$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ i dowolnego elementu $y \neq 0$ zachodzi nierówność $(x + ty, x + ty) \geq 0$. Z aksjomatów iloczynu skalarnego wynika, że

$$(x + ty, x + ty) = (x, x) + \bar{t}\,(x, y) + t\overline{(x, y)} + |t|^2\,(y, y) \geq 0.$$

Podstawiając

$$t = -\frac{(x,y)}{(y,y)}$$

do powyższej nierówności otrzymujemy ostatecznie

$$(x,x) - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0$$

co jest równoważne nierówności (10.1), a zatem kończy dowód.

■

U w a g a 1

Można pokazać, że nierówność Schwarza (10.1) staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy elementy x i y są liniowo zależne.

U w a g a 2

Jeżeli (x,y) jest iloczynem skalarnym w przestrzeni liniowej X, to wzór

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \tag{10.2}$$

określa normę w przestrzeni X.

Z definicji normy, aksjomatów iloczynu skalarnego i nierówności Schwarza wynika, że

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= (x+y,x+y) = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) \leq \\ &\leq (x,x)+2\,|(x,y)|+(y,y) \leq (x,x)+2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}+(y,y) = \\ &= \|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2 = (\|x\|+\|y\|)^2\end{aligned}$$

oraz

$$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x,\alpha x)} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}\,(x,x)} = |\alpha|\,\|x\|$$

co kończy dowód.

■

D e f i n i c j a

Zbiór X nazywamy *przestrzenią unitarną*, jeżeli:

1° X jest przestrzenią liniową,

2° w X określony jest iloczyn skalarny (x,y),

3° w X zdefiniowana jest norma wzorem (10.2).

D e f i n i c j a

X jest *przestrzenią Hilberta* wtedy i tylko wtedy, gdy X jest przestrzenią unitarną zupełną (zupełność oznacza, że każdy ciąg spełniający warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu ma granicę należącą do tej przestrzeni).

10.2 Przykłady przestrzeni Hilberta

10.2.1 Przestrzeń euklidesowa n-wymiarowa rzeczywista lub zespolona

Niech $X = \mathbb{R}^n$ lub $X = \mathbb{C}^n$ i niech $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X$.
Iloczyn skalarny definiujemy jako

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i. \tag{10.3}$$

Wtedy

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}. \tag{10.4}$$

Nierówność Schwarza (10.1) przybiera równoważną postać

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} \tag{10.5}$$

i znana jest pod nazwą *nierówności Cauchy'ego.*

Zupełność przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (lub $\mathbb{C}^n$) wynika z zupełności zbioru liczb rzeczywistych i zespolonych.

10.2.2 Przestrzeń ciągów sumowalnych z kwadratem

Niech $X = l^2$ będzie przestrzenią ciągów rzeczywistych lub zespolonych (ξ_k) takich, że

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^2 < \infty,$$

ze zwykłymi działaniami dodawania ciągów po współrzędnych i mnożenia przez liczbę.

Iloczyn skalarny ciągów $x = (\xi_k)$ i $y = (\eta_k)$ definiujemy jako

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \overline{\eta}_k. \tag{10.6}$$

Poprawność powyższej definicji wynika z oszacowania $|\xi_k \overline{\eta}_k| \leq \frac{1}{2} \left(|\xi_k|^2 + |\eta_k|^2 \right)$.

Z definicji normy wynika, że

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^2}. \tag{10.7}$$

Nierówność Schwarza przybiera postać

$$\left| \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k \overline{\eta}_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{+\infty} |\eta_k|^2} \tag{10.8}$$

(jest to tzw. *nierówność Cauchy'ego dla szeregów*).

Dowodzi się, że przestrzeń $X = l^2$ jest zupełna.

10.2.3 Przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem

Niech $X = L^2(\Omega)$ będzie przestrzenią funkcji $f(x)$ określonych na zbiorze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o wartościach rzeczywistych lub zespolonych takich, że

$$\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Zakładamy, że $|\Omega| > 0$, gdzie $|\Omega|$ oznacza miarę zbioru Ω. W przestrzeni $L^2(\Omega)$ wprowadzamy zwykłe działania dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez liczby.

Iloczyn skalarny definiujemy jako

$$(f, g) = \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)} dx. \tag{10.9}$$

Jego istnienie wynika z nierówności $\left| f(x)\, \overline{g(x)} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 \right)$.

Normę definiujemy następująco

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx}. \tag{10.10}$$

Nierówność Schwarza jest postaci

$$\left| \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)} dx \right| \leq \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx} \sqrt{\int_\Omega |g(x)|^2 \, dx} \tag{10.11}$$

i znana jest pod nazwą *nierówności Buniakowskiego dla całek*.

Można dowieść, że przestrzeń $L^2(\Omega)$ jest zupełna.

Zbieżność w przestrzeni $L^2(\Omega)$ nie jest równoważna zbieżności punktowej, ale prawdziwe jest następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e
Jeśli $f_n \to f_0$ w $L^2(\Omega)$ i $f_n(x) \to f(x)$ prawie wszędzie na Ω, to $f \in L^2(\Omega)$ i $f = f_0$.

10.3 Ortogonalność, twierdzenie o rzucie ortogonalnym

Niech X będzie przestrzenią unitarną.

D e f i n i c j a
Elementy $x, y \in X$ są *ortogonalne* wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, y) = 0$ (oznaczamy $x \perp y$).

U w a g a
Jeśli $x \perp y$, to

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (\textit{tw. Pitagorasa}). \tag{10.12}$$

Z definicji normy i ortgonalności elementów x, y wynika, że

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = \\ = (x,x) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

■

Niech $X_0 \subset X$ będzie podprzestrzenią liniową X.

D e f i n i c j a

Mówimy, że element $x \in X$ jest *ortogonalny do podprzestrzeni* X_0 (oznaczamy $x \perp X_0$) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego elementu $y \in X_0$ zachodzi $x \perp y$.

T w i e r d z e n i e (*o rzucie ortogonalnym*)

Niech X_0 będzie podprzestrzenią liniową domkniętą przestrzeni Hilberta X. Wtedy każdy element $x \in X$ da się przedstawić w postaci

$$x = x_0 + z, \text{ gdzie } x_0 \in X_0,\ z \perp X_0 \tag{10.13}$$

przy czym rozkład ten jest jednoznaczny.

Element x_0 nazywa się *rzutem ortogonalnym* elementu x na podprzestrzeń X_0.

■

Można udowodnić, że z twierdzenia o rzucie ortogonalnym wynika następujący wniosek.

T w i e r d z e n i e

Niech $X_0 \subset X$ będzie podprzestrzenią liniową domkniętą przestrzeni Hilberta X. Jeżeli x_0 jest rzutem ortogonalnym elementu x na X_0, to

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\| \tag{10.14}$$

dla każdego $y \in X_0$. Powyższa nierówność staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $y = x_0$.

■

D e f i n i c j a

Mówimy, że ciąg (a_n) elementów przestrzeni Hilberta X *generuje przestrzeń* X wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest gęsty w X (tzn. każdy element przestrzeni X może być przybliżony z dowolną dokładnością przez kombinację liniową elementów $a_1, a_2, \ldots, a_n$.)

T w i e r d z e n i e

Ciąg (a_n) elementów przestrzeni Hilberta X generuje przestrzeń X wtedy i tylko wtedy, gdy jedynym elementem ortogonalnym do wszystkich elementów a_n jest $x = 0$.

■

10.4 Układy ortonormalne w przestrzeniach Hilberta

W teorii przestrzeni Hilberta wielką rolę odgrywają tzw. *układy ortogonalne* i *uklady ortonormalne.* Pozwalają one znajdować rozwinięcia elementów przestrzeni Hilberta na szeregi względem tych układów.

D e f i n i c j a

Układem ortogonalnym w przestrzeni Hilberta X nazywamy zbiór $Z \subset X$ taki, że dla każdego $x,\ y \in Z,\ x \neq y$ zachodzi $(x, y) = 0$.

D e f i n i c j a

Układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X nazywamy układ ortogonalny $Z \subset X$ taki, że dla każdego $x \in Z$ zachodzi $\|x\| = 1$.

T w i e r d z e n i e

Niech (a_k) będzie dowolnym ciągiem liniowo niezależnych elementów przestrzeni Hilberta X. Istnieje wtedy w przestrzeni X układ ortonormalny (e_k) taki, że

$$\operatorname{lin}(e_1, e_2, \ldots, e_m) = \operatorname{lin}(a_1, a_2, \ldots, a_m) \quad \text{dla } m = 1, 2, \ldots,$$

gdzie $\operatorname{lin}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich kombinacji liniowych elementów $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Dla dowodu wystarczy zastosować tzw. procedurę ortonormalizacji

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|},$$
$$e_2 = \frac{x_2}{\|x_2\|}, \text{ gdzie } x_2 = a_2 - (a_2, e_1)\, e_1$$
$$e_m = \frac{x_m}{\|x_m\|}, \text{ gdzie } x_m = a_m - \sum_{k=1}^{m-1} (a_m, e_k)\, e_k, \tag{10.15}$$

z której bezpośrednio wynika, że (e_k) jest układem ortonormalnym spełniającym tezę twierdzenia.

■

10.4.1 Przykłady układów ortonormalnych

1. Niech $X = l^2$ - zbiór ciągów nieskończonych (ξ_k) takich, że szereg $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\xi_k|^2$ jest zbieżny, z iloczynem skalarnym $((\xi_k), (\eta_k)) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \xi_k \eta_k$.
   Wówczas elementy e_n, gdzie
   $$e_n = \Big(0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0 \ldots\Big)$$
   tworzą układ ortonormalny w X.

2. Niech $X = L^2([0; 2\pi])$ (przestrzeń funkcji rzeczywistych całkowalnych z kwadratem).
   Ciąg funkcji
   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots \tag{10.16}$$
   tworzy układ ortonormalny w tej przestrzeni.

3. Niech $X = L^2([0; 2\pi])$ (przestrzeń funkcji zespolonych całkowalnych z kwadratem).
   Ciąg funkcji
   $$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \quad \text{dla } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$
   tworzy układ ortonormalny w tej przestrzeni ($e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$).

10.5 Szeregi Fouriera względem układów ortonormalnych

Załóżmy teraz, że dane jest rozwinięcie elementu x z pewnej przestrzeni Hilberta X na szereg w postaci

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k e_k, \tag{10.17}$$

gdzie (e_k) jest układem ortonormalnym w X.

Mnożąc obie strony równości (10.17) skalarnie przez e_n i korzystając z ortonormalności układu (e_k) otrzymujemy, że

$$\alpha_n = (x, e_n)\,. \tag{10.18}$$

D e f i n i c j a

Liczby $\alpha_n = (x, e_n)$ określone wzorem (10.18) nazywamy *współczynnikami Fouriera* elementu x względem układu ortonormalnego (e_n), a szereg $\sum_{k=1}^{+\infty} (x, e_k)\, e_k$ nazywamy *szeregiem Fouriera* elementu x względem tego układu.

T w i e r d z e n i e

Jeśli (e_k) jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X, to dla każdego $x \in X$ szereg $\sum_{k=1}^{+\infty} |(x, e_k)|^2$ jest zbieżny i zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \text{(tzw. \textit{nierówność Bessela})}, \tag{10.19}$$

która staje się równością wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \sum_{k=1}^{+\infty} (x, e_k)\, e_k$, tzn. gdy x jest równy sumie swojego szeregu Fouriera.

■

T w i e r d z e n i e

Jeśli (e_k) jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X, to dla każdego $x \in X$ i dowolnych stałych $\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_n$ zachodzi nierówność

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k\| \leq \|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\|, \tag{10.20}$$

która oznacza, że $n-$ta suma częściowa szeregu Fouriera elementu x jest najlepszym możliwym przybliżeniem tego elementu w podprzestrzeni $\mathrm{lin}\,(e_1, e_2, \dots , e_n)$.

Dowód wynika z faktu, że $\sum_{k=1}^{n} (x, e_k)\, e_k$ jest rzutem ortogonalnym elementu x na $\mathrm{lin}\,(e_1, e_2, \dots , e_n)$.

■

Następne twierdzenie precyzuje warunki rozwijalności dowolnego elementu przestrzeni Hilberta X na szereg Fouriera względem układu ortonormalnego (e_k).

T w i e r d z e n i e

Niech (e_k) będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta X. Wówczas każdy element x jest sumą swojego szeregu Fouriera (10.17) wtedy i tylko wtedy, gdy układ (e_k) generuje całą przestrzeń X.

■

10.5.1 Trygonometryczne szeregi Fouriera

Rozważmy przestrzeń Hilberta $X = L^2([-l;l])$, $l > 0$. Można udowodnić, że układ funkcji

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{k\pi x}{l}, \quad \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{k\pi x}{l} \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots \tag{10.21}$$

jest układem ortonormalnym w X, generującym całą przestrzeń (por. przykład 2 i wzory (10.16)).

Jeśli $f \in L^2([-l;l])$, to na mocy poprzedniego twierdzenia możemy napisać, że

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right), \tag{10.22}$$

gdzie

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{10.23}$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots. \tag{10.24}$$

Zbieżność szeregu (10.22) w przestrzeni $L^2([-l;l])$ nie oznacza zbieżności w każdym punkcie $x \in [-l;l]$. Zgodnie z definicją normy, zbieżność w przestrzeni $L^2([-l;l])$ oznacza tylko, że

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l}\left|f(x) - \frac{1}{2}a_0 - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right|^2 dx = 0. \tag{10.25}$$

W celu zagwarantowania zbieżności punktowej, należy założyć o funkcji danej pewne dodatkowe warunki.

10.5.2 Zbieżność punktowa trygonometrycznych szeregów Fouriera

Załóżmy, że dana jest funkcja rzeczywista $f(x)$ określona na przedziale $[-l;l]$. Przyjmujemy następującą definicję.

D e f i n i c j a

Mówimy, że funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $[-l;l]$ *warunki Dirichleta* wtedy i tylko wtedy, gdy:

1° $f(x)$ jest przedziałami monotoniczna;

2° w każdym punkcie $x_0 \in [-l;l]$, w którym funkcja nie jest ciągła spełniony jest warunek

$$f(x_0) = \frac{1}{2}\left(f\left(x_0^+\right) + f\left(x_0^-\right)\right),$$

gdzie $f\left(x_0^+\right)$ i $f\left(x_0^-\right)$ oznaczają odpowiednio granicę prawo i lewostronną funkcji $f(x)$ w punkcie x_0;

3° na końcach przedziału spełnione są warunki

$$f(-l) = f(l) = \frac{1}{2}\left(f\left(-l^+\right) + f\left(l^-\right)\right).$$

T w i e r d z e n i e (*Dirichleta*)
Jeżeli funkcja $f(x)$ spełnia w przedziale $[-l;l]$ warunki Dirichleta, to w każdym punkcie tego przedziału jest ona sumą swojego szeregu Fouriera (10.22).

■

10.6 Zadania

1. Zbadać, czy równość $(x,y) = xy + x + 2y + 1$ określa iloczyn skalarny w $\mathbb{R}$?

2. Niech $X = L^2([0,1])$ z normą $\|f\| = \sqrt{\int\limits_0^1 |f(x)|^2\,dx}$, $X_0 = \operatorname{lin}(1,\ x) \subset X$. Zortonormalizować układ $\{1,\ x\}$ oraz wyznaczyć rzut ortogonalny elementu $f(x) = x^2$ na X_0.

3. Niech $X = L^2([0,\pi])$ z normą $\|f\| = \sqrt{\int\limits_0^\pi |f(x)|^2\,dx}$, $X_0 = \operatorname{lin}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sin x\right) \subset X$. Zortonormalizować układ $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sin x\right\}$ oraz wyznaczyć rzut ortogonalny elementu $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x$ na X_0.

4. Znaleźć rzut ortogonalny w przestrzeni $X = L^2(-1;1)$ funkcji $f(x) = 1 + \sin x$ na podprzestrzeń domkniętą $X_0 = \operatorname{lin}(e_1, e_2)$, gdzie $e_1(x)$, $e_2(x)$ są funkcjami otrzymanymi z ortonormalizacji układu funkcji $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1 + x$.

5. Znaleźć rzut ortogonalny w przestrzeni $X = L^2(-1;1)$ funkcji $f(x) = 1 + \cos x$ na podprzestrzeń domkniętą $X_0 = \operatorname{lin}(e_1, e_2)$, gdzie $e_1(x)$, $e_2(x)$ są funkcjami otrzymanymi z ortonormalizacji układu funkcji $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1 - x$.

6. Funkcję $f(x) = 1 - 2x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi;+\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-\pi;+3\pi]$.

7. Funkcję $f(x) = 2\cos^2 x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi;+\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-3\pi;+3\pi]$.

8. Funkcję $f(x) = 2\sin^2 x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi;+\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-3\pi;+3\pi]$.

9. Funkcję $f(x) = 1+2\sin 2x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi; +\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-3\pi; +3\pi]$.

10. Funkcję $f(x) = 1 + 2\cos 2x$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi; +\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-3\pi; +3\pi]$.

11. Funkcję $f(x) = x(\pi - x)(\pi + x)$ przedstawić w postaci sumy trygonometrycznego szeregu Fouriera w przedziale $(-\pi; +\pi)$. Narysować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-2\pi; +2\pi]$.