Wykład 11

Informacja o przestrzeniach Sobolewa

11.1 Definicja przestrzeni Sobolewa

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem mierzalnym. Rozważmy przestrzeń Hilberta $X = L^2(\Omega)$ z iloczynem skalarnym zdefiniowanym równością (10.9) i normą zdefiniowaną wzorem (10.10). W tej przestrzeni rozważamy podzbiór składający się z funkcji f, których pochodne cząstkowe w sensie dystrybucyjnym do rzędu m włącznie (patrz również wzory (8.1)-(8.3)) należą do $L^2(\Omega)$.

W podzbiorze takich funkcji wprowadzamy funkcjonał $\|f\|_{m,2}$ określony wzorem

$$\|f\|_{m,2} = \sqrt{\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_2^2}. \tag{11.1}$$

Można pokazać, że $\|f\|_{m,2}$ spełnia wszystkie aksjomaty normy.

D e f i n i c j a
Przestrzenią Sobolewa $H^m(\Omega)$ nazywamy zbiór

$$H^m(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) : D^\alpha f \in L^2(\Omega) \quad \text{dla } 0 \leq |\alpha| \leq m \right\}. \tag{11.2}$$

T w i e r d z e n i e
Przestrzeń $H^m(\Omega)$ jest zupełna, jest zatem przestrzenią Hilberta. Funkcjonał $\|f\|_{m,2}$ określa normę w $H^m(\Omega)$, zaś iloczyn skalarny zadany jest wzorem

$$(f, g) = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha f \overline{D^\alpha g} dx. \tag{11.3}$$

■

U w a g a
Powyższą definicję przestrzeni Sobolewa można rozszerzyć na przypadek przestrzeni $L^p(\Omega)$, w których norma zadana jest wzorem

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{dla } p > 1. \tag{11.4}$$

11.2 Ślady funkcji z przestrzeni Sobolewa na powierzchniach

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $S \subset \Omega$ będzie powierzchnią $(n-1)$ wymiarową. Jeśli f jest funkcją, która w każdym punkcie $x \in \Omega$ ma jednoznacznie określoną wartość, to wyznacza ona w sposób naturalny funkcję $f_{|S} := f(x)$ dla $x \in S$.

Jeśli natomiast funkcja f jest określona *prawie wszędzie* (tzn. z dokładnością do zbiorów miary zero), wtedy jej wartość na powierzchni S nie jest już wyznaczona w tak naturalny sposób, ponieważ $|S| = 0$, gdzie $|S|$ oznacza $n-$wymiarową miarę Lebesgue'a powierzchni S. Oznacza to, że nie można prostym, naturalnym sposobem określić funkcji $f_{|S}$ za pomocą rozważenia wyłącznie wartości tej funkcji w pewnych punktach.

Dla prostoty załóżmy teraz, że $S = \overline{\Omega} \cap \{x_n = const\}$. Wówczas można udowodnić, że dla prawie wszystkich x_n funkcja f (określona prawie wszędzie na Ω) posiada wartość $f_{|S}$ zdefiniowaną prawie wszędzie jako funkcję $(n-1)$ zmiennych.

Wprowadzimy teraz bardziej sformalizowaną definicję *śladu funkcji*. Rozpoczniemy od przypadku funkcji f ciągłej na na $\overline{\Omega}$.

D e f i n i c j a

Śladem funkcji $f \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ na $(n-1)$ wymiarowej powierzchni $S \subset \Omega$ nazywamy funkcję ciągłą na S, która prawie wszędzie pokrywa się z f. Ślad oznaczamy jako $f_{|S}$.

Rozważmy teraz funkcje f z przestrzeni Sobolewa $H^1(\Omega)$. Niech S będzie powierzchnią klasy C^1. Niech $S_1 \subset S$ będzie częścią tej powierzchni reprezentowaną za pomocą przedstawienia

$$x_n = \varphi(x'), \quad x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad \varphi \in C^1\left(\overline{D}\right), \quad D \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

Załóżmy, że Ω zawarty jest w kostce $\{0 < x_i < a, \ \text{dla } i = 1, 2, \dots, n\}$. Załóżmy również chwilowo, że $f \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ (zbiór funkcji klasy C^1 o nośniku zwartym). Wtedy

$$f_{|S_1}(x) = f(x', \varphi(x')) = \int\limits_0^{\varphi(x')} 1 \cdot \frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n} d\xi_n.$$

Na mocy nierówności (10.11) możemy napisać, że

$$\left|f_{|S_1}(x)\right|^2 \leq \varphi(x') \int\limits_0^{\varphi(x')} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n \leq a \int\limits_0^{a} \left|\frac{\partial f(x', \xi_n)}{\partial \xi_n}\right|^2 d\xi_n.$$

Mnożąc obustronnie powyższą nierówność przez $\sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \ldots + \varphi_{x_{n-1}}^2}$ i całkując po D dostajemy

$$\begin{aligned} \|f_{|S_1}\|^2_{L^2(S_1)} &= \int\limits_{S_1} \left|f_{|S_1}(x)\right|^2 dS_1 = \\ &= \int\limits_D \left|f_{|S_1}(x)\right|^2 \sqrt{1 + \varphi_{x_1}^2 + \ldots + \varphi_{x_{n-1}}^2} dx_1 \ldots dx_{n-1} \leq C_1 \|f\|_{1,2} \end{aligned} \tag{11.5}$$

gdzie C_1 jest stałą, która nie zależy od funkcji f tylko od obszaru Ω i powierzchni S_1 ($\|f\|_{1,2}$ oznacza normę w przestrzeni Sobolewa zdefiniowaną wzorem (11.1)).

Zakładając, że powierzchnia S składa się ze skończonej liczby powierzchni typu S_1 reprezentowanych przez różne przedstawienia, można wnioskować, że zachodzi nierówność postaci

$$\|f_{|S}\|_{L^2(S)} \leq C\|f\|_{1,2} \tag{11.6}$$

gdzie C zależy wyłącznie od obszaru Ω i powierzchni S. Przez aproksymację funkcji z przestrzeni $C^1(\Omega)$ funkcjami z $C_0^1(\Omega)$ łatwo pokazać, że powyższa nierówność zachodzi dla dowolnych funkcji $f \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Przypuśćmy teraz, że $f \in H^1(\Omega)$. Wynika stąd, że istnieje ciąg (f_n) funkcji klasy $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ taki, że $f_n \to f$ w normie $H^1(\Omega)$. Z nierówności (11.6) wynika, że

$$\|f_{n|S} - f_{m|S}\|_{L^2(S)} \leq C\|f_n - f_m\|_{1,2},$$

zatem ciąg śladów funkcji ciągłych $\left(f_{n|S}\right)$ jest ciągiem Cauchy'ego w $L^2(S)$. Z zupełności przestrzeni $L^2(S)$ wnioskujemy, ze istnieje funkcja $f_{|S} \in L^2(S)$ będąca granicą tego ciągu, tzn.

$$f_{|S} = \lim_{n\to\infty} f_{n|S}. \tag{11.7}$$

D e f i n i c j a

Funkcję $f_{|S}$ określoną równością (11.7) nazywamy śladem funkcji $f \in H^1(\Omega)$ na $(n-1)$ wymiarowej powierzchni S.

U w a g a

Można pokazać, że ślad funkcji z przestrzeni $H^1(\Omega)$ jest wyznaczony jednoznacznie. Za pomocą odpowiedniego przejścia granicznego możemy wywnioskować, że nierówność (11.6) zachodzi dla wszystkich funkcji $f \in H^1(\Omega)$, gdzie $f_{|S}$ oznacza ślad funkcji f na powierzchni S.

■

Poprzednie rozważania można sformułować w postaci następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e

Niech $S \subset \Omega$ będzie $(n-1)$ wymiarową powierzchnią klasy C^1. Wówczas dowolna funkcja f z przestrzeni $H^1(\Omega)$ ma jednoznacznie określony ślad $f_{|S}$ na powierzchni S. Funkcja $f_{|S}$ należy do przestrzeni $L^2(S)$ i spełnia nierówność (11.6).

■

U w a g a 1

Analogicznie do poprzednich rozważań można pokazać, że jeśli α jest wielowskaźnikiem postaci $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ oraz $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, to każda funkcja $f \in H^{|\alpha|+1}(\Omega)$ wyznacza jednoznacznie ślad pochodnej $D^a f_{|S}$ na powierzchni S, przy czym zachodzi nierówność

$$\|D^\alpha f_{|S}\|_{L^2(S)} \leq C\|f\|_{|\alpha|+1,2}. \tag{11.8}$$

Oznacza to, że funkcje z przestrzeni $H^k(\Omega)$ wyznaczają na powierzchni S ślady pochodnych do rzędu $(k-1)$ włącznie.

■

U w a g a 2

Poprzednie twierdzenia mówią, że każda funkcja z przestrzeni $H^1(\Omega)$ wyznacza swój ślad na powierzchni S i ślad ten należy do przestrzeni $L^2(S)$. Powstaje pytanie, czy każda funkcja

$v \in L^2(S)$ jest śladem pewnej funkcji z $H^1(\Omega)$. Odpowiedź na to pytanie jest negatywna. Już dla $n = 2$ można podać przykład funkcji z przestrzeni $L^2(S)$, gdzie S jest okręgiem jednostkowym, która nie jest śladem żadnej funkcji z $H^1(\Omega)$, Ω - koło jednostkowe. Można natomiast pokazać, że zbiór śladów funkcji z $H^1(\Omega)$ jest gęsty w $L^2(S)$.

■

Dla badania rozwiązalności pewnych zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych duże znaczenie mają następujące dwa twierdzenia dotyczące zachowania się funkcji z przestrzeni Sobolewa.

T w i e r d z e n i e
Dowolny zbiór ograniczony w przestrzeni $H^1(\Omega)$ jest prezwarty w przestrzeni $L^2(\Omega)$ (tzn. każdy ciąg funkcji (f_n), których normy $\|f_n\|_{1,2}$ są wspólnie ograniczone przez pewną stałą zawiera podciąg zbieżny w przestrzeni $L^2(\Omega)$).

Dowód twierdzenia polega na wykorzystaniu charakteryzacji zbiorów prezwartych w $L^2(\Omega)$, której nie będziemy w tym miejscu omawiać.

■

T w i e r d z e n i e
Jeśli pewien zbiór funkcji jest ograniczony w przestrzeni $H^1(\Omega)$, wtedy zbiór ich śladów na $(n-1)$ wymiarowej powierzchni S klasy C^1 jest prezwarty w przestrzeni $L^2(S)$.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy pokazać, że istnieją stałe C_1 i C_2 takie, że dla dowolnej liczby $\delta > 0$ i dowolnej funkcji $f \in H^1(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\|f_{|S}\|^2_{L^2(S)} \leq \frac{C_1}{\delta}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + C_2\delta\|f\|^2_{1,2} \tag{11.9}$$

i następnie skorzystać z poprzedniego twierdzenia.

■

11.3 Normy równoważne w przestrzeniach Sobolewa

W praktycznych rozważaniach dotyczących rozwiązalności zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych dużą wagę odgrywa możliwość wprowadzenia norm w przestrzeniach Sobolewa, które są równoważne normie standardowej i jednocześnie są postaci umożliwiającej bezpośrednie zastosowanie do tych zagadnień. Możliwości te dają tzw. *nierówność Friedrichsa* i *nierówność Poincaré*.

T w i e r d z e n i e (*nierówność Friedrichsa*)
Niech Ω będzie obszarem z brzegiem Lipschitza $\partial\Omega = \Gamma$. Wówczas istnieje stała $k > 0$ zależna tylko od obszaru Ω taka, że dla każdej funkcji $f \in H^1(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\|f\|^2_{1,2} \leq k\left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Gamma f^2_{|\Gamma}(s)\,ds\right), \tag{11.10}$$

gdzie wartości funkcji f na brzegu obszaru Ω rozumiane są w sensie śladu.

■

Nierówność Friedrichsa (11.10) może być uogólniona w sposób następujący.

T w i e r d z e n i e

Niech Ω będzie obszarem z brzegiem Lipschitza $\partial\Omega = \Gamma$ i niech $\Gamma_1 \subset \Gamma$ będzie podzbiorem o mierze dodatniej $|\Gamma_1| > 0$. Wówczas istnieje stała $k > 0$ zależna tylko od obszaru Ω i Γ_1 taka, że dla każdej funkcji $f \in H^1(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\|f\|_{1,2}^2 \leq k \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\Gamma_1} f_{|\Gamma_1}^2 (s)\, ds \right). \tag{11.11}$$

■

T w i e r d z e n i e (*nierówność Poincaré*)

Niech Ω będzie obszarem z brzegiem Lipschitza. Istnieje wówczas stała $k > 0$ zależna tylko od obszaru Ω taka, że dla każdej funkcji $f \in H^m(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\|f\|_{m,2}^2 \leq k \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} (D^\alpha f)^2\, dx + \sum_{|\alpha|<m} \left(\int_{\Omega} D^\alpha f dx \right)^2 \right). \tag{11.12}$$

■