Temat 12

Rozwiązania uogólnione (słabe)

12.1 Eliptyczne operatory różniczkowe rzędu parzystego

Będziemy rozważać operatory różniczkowe postaci

$$A = \sum_{|i|,|j| \leq k} (-1)^{|i|} D^i \left(a_{ij} D^j \right), \tag{12.1}$$

gdzie i oraz j są wielowskaźnikami, $a_{ij} \in C^{|i|}(\Omega)$.

P r z y k ł a d y (*dla* $n = 2$)

1. $(k = 1)$
   Niech

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = (1,0)\,,\ j = (1,0) \quad \text{oraz } i = (0,1)\,,\ j = (0,1)\,, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{12.2}$$

   Wtedy

$$Au = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = -\Delta u \text{ (operator Laplace'a).}$$

2. $(k = 2)$
   Niech

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = (2,0)\,,\ j = (2,0) \quad \text{oraz } i = (0,2)\,,\ j = (0,2)\,, \\ 2 & \text{dla } i = (1,1)\,,\ j = (1,1)\,, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{12.3}$$

   Wtedy

$$\begin{aligned} Au &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) = \\ &= \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = \Delta^2 u \text{ (operator biharmoniczny).} \end{aligned}$$

U w a g a

Operator A nie wyznacza jednoznacznie przedstawienia (12.1). Dla każdego operatora można na ogół wybrać różne reprezentacje, w zależności od prowadzonych rozważań. Np. operator Laplace'a może być otrzymany również przez przyjęcie współczynników a_{ij} jako

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = (1,0)\,,\ j = (1,0) \quad \text{oraz } i = (0,1)\,,\ j = (0,1)\,, \\ c & \text{dla } i = (1,0)\,,\ j = (0,1)\,, \\ -c & \text{dla } i = (0,1)\,,\ j = (1,0)\,. \end{cases} \tag{12.4}$$

D e f i n i c j a

Mówimy, że operator A określony równością (12.1) jest eliptyczny w punkcie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego układu $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \neq 0$ zachodzi

$$\sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(x)\,\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j \neq 0, \tag{12.5}$$

gdzie $\hat{\xi}_i = \xi_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{i_n}$, $\hat{\xi}_j = \xi_1^{j_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{j_n}$.

D e f i n i c j a

Mówimy, że operator A określony równością (12.1) jest jednostajnie eliptyczny w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje liczba $c > 0$ zależna tylko od obszaru Ω i wpółczynników a_{ij} taka, że dla prawie wszystkich punktów $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i dla wszystkich $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ zachodzi

$$\sum_{|i|,|j|=k} a_{ij}(x)\,\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j \geq c\,|\xi|^{2k}\,, \tag{12.6}$$

gdzie $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$.

P r z y k ł a d y

1. Operator Laplace'a $-\Delta$ jest jednostajnie eliptyczny w dowolnym obszarze, ponieważ

   $$\sum_{|i|,|j|=1} a_{ij}(x)\,\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j = \xi_1^2 + \xi_2^2 = |\xi|^2\,,$$

   tak więc można przyjąć $c = 1$.
   Uwaga: Według powyższej definicji operator Δ **nie jest** jednostajnie eliptyczny.

2. Operator biharmoniczny jest jednostajnie eliptyczny, ponieważ

   $$\sum_{|i|,|j|=2} a_{ij}(x)\,\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j = \xi_1^4 + 2\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4 = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)^2 = |\xi|^4\,.$$

3. Operator

   $$Au = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\left(1 + x_1^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right] + 3\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

   nie jest eliptyczny, gdyż

   $$\sum_{|i|,|j|=1} a_{ij}(x)\,\hat{\xi}_i\hat{\xi}_j = \left(1 + x_1^2\right)\xi_1^2 - 3\xi_2^2$$

   i dla pewnych ξ_1, ξ_2 wyrażenie to może przyjmować wartość zero.

12.2 Wprowadzenie definicji słabego rozwiązania

12.2.1 Słabe rozwiązanie równania różniczkowego

Rozpoczniemy od rozważenia kilku przypadków szczególnych. Na początek rozważmy równanie Poissona postaci

$$-\Delta u = f. \tag{12.7}$$

Niech $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$, u - będzie rozwiązaniem klasycznym tego równania. Niech ponadto $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Wówczas

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u dx = \int_\Omega \varphi f dx. \tag{12.8}$$

Stosując do lewej strony powyższej równości twierdzenie Greena postaci

$$\int_\Omega b \frac{\partial c}{\partial x_i} dx = \int_{\partial\Omega} bc\nu_i ds - \int_\Omega \frac{\partial b}{\partial x_i} c dx \quad \text{dla } b,\, c \in H^1(\Omega)$$

otrzymujemy

$$-\int_\Omega \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} dx = \underbrace{-\int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i ds}_{0} + \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

W takim razie z (12.8) wynika, że

$$\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int_\Omega \varphi f dx \tag{12.9}$$

dla dowolnej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Tożsamość (12.9) ma sens nawet wtedy, gdy równanie (12.7) nie ma rozwiązań klasycznych należących do $C^2(\Omega)$ np. wtedy, gdy funkcja $f \in L^2(\Omega)$ i f nie jest funkcją ciągłą. W tym przypadku uzasadnione jest przyjęcie następującej definicji *słabego* (lub *uogólnionego*) rozwiązania rozważanego równania różniczkowego.

D e f i n i c j a

Niech $u \in H^1(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Jeżeli dla każdej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ zachodzi tożsamość (12.9), to mówimy, że u jest słabym (uogólnionym) rozwiązaniem równania (12.7).

Koncepcja słabego rozwiązania jest znacznie ogólniejsza od koncepcji rozwiązania klasycznego, np. słabe rozwiązanie równania rzędu drugiego może nie posiadać pochodnych (nawet w sensie dystrybucyjnym) rzędu drugiego. Ponadto, jeżeli u jest rozwiązaniem równania (12.7) w sensie powyższej definicji oraz $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$, to stosując ponownie wzór Greena łatwo pokazać, że u jest także rozwiązaniem w sensie klasycznym.

Analogiczne rozważania przeprowadzić można np. w przypadku operatora biharmonicznego. Rozważmy równanie biharmoniczne

$$\Delta^2 u = f. \tag{12.10}$$

Mnożąc obie strony tego równania przez dowolną funkcję $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ i całkując otrzymujemy

$$\int_\Omega \varphi \Delta^2 u dx = \int_\Omega \varphi f dx. \tag{12.11}$$

Stosując dwukrotnie wzór Greena do lewej strony równości (12.11) możemy napisać, że

$$\int_\Omega \varphi \Delta^2 u dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) dx$$

tzn. tożsamość (12.11) może być zapisana w postaci

$$\sum_{|i|,|j| \le 2} \int_\Omega a_{ij} D^i \varphi D^j u dx = (\varphi, f) = \int_\Omega \varphi f dx, \tag{12.12}$$

gdzie a_{ij} są takie jak w przykładzie 2.

Podobnie jak w przypadku operatora Laplace'a, możemy sformułować definicję słabego rozwiązania równania biharmonicznego (12.10) jako funkcji $u \in H^2(\Omega)$ spełniającej tożsamość (12.12) dla każdej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Sformułujemy teraz ogólną definicję słabego rozwiązania równania różniczkowego $Au = f$, gdzie A jest operatorem eliptycznym rzędu $2k$.

D e f i n i c j a

Niech $f \in L^2(\Omega)$, a_{ij} - ograniczone i mierzalne na Ω. Mówimy, że $u \in H^k(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem równania $Au = f$, gdzie

$$A = \sum_{|i|,|j| \le k} (-1)^{|i|} D^i \left(a_{ij} D^j \right),$$

wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej funkcji $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ zachodzi tożsamość

$$\sum_{|i|,|j| \le k} \int_\Omega a_{ij} D^i \varphi D^j u dx = (\varphi, f) = \int_\Omega \varphi f dx. \tag{12.13}$$

Szczególnymi przypadkami tożsamości (12.13) są tożsamości (12.9) i (12.12) definiujące słabe rozwiązania równania Poissona i równania biharmonicznego.

12.2.2 Stabilne i niestabilne warunki brzegowe

Wszystkie zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych cząstkowych zawierają w swoich sformułowaniach pewne tzw. warunki brzegowe. Warunki te najczęściej dotyczą wartości funkcji niewiadomej i jej pochodnych na brzegu obszaru lub na pewnej krzywej zawartej w obszarze. Warunki brzegowe dzielimy na *warunki stabilne* i *warunki niestabilne*.

D e f i n i c j a

Warunki brzegowe dla równania rzędu $2k$ nazywamy stabilnymi wtedy i tylko wtedy gdy nie zawierają one pochodnych rzędu wyższego niż $k-1$.

Typowym przykładem stabilnego warunku brzegowego jest warunek występujący w zagadnieniu Dirichleta dla równania Laplace'a ($k = 1$)

$$\Delta u = 0, \text{ dla } x \in \Omega, \ u_{|\partial\Omega} = g.$$

Dla równań rzędu $2k$ stabilnymi będą warunki postaci

$$u_{|\partial\Omega} = g, \ \frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = g_1, \ldots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}_{|\partial\Omega} = g_{k-1}, \tag{12.14}$$

gdzie ν oznacza wektor normalny zewnętrzny do brzegu $\partial\Omega$. Warunki te należy rozumieć w sensie śladu, ponieważ funkcje z przestrzeni $H^k(\Omega)$ wyznaczają na brzegu $\partial\Omega$ ślady swoich pochodnych do rzędu $(k-1)$ włącznie.

U w a g a
Jeżeli u_n, $u \in H^1(\Omega)$ oraz $u_n \to u$ w przestrzeni $H^k(\Omega)$, to z ciągłości operatora śladu wynika (patrz nierówność (11.8)), że $D^\alpha u_{n|\partial\Omega} \to D^\alpha u_{|\partial\Omega}$ w $L^2(\partial\Omega)$ dla takich wielowskaźników α, że $|\alpha| \le k-1$. W szczególności, jeżeli $u_{n|\partial\Omega} = g$, to $u_{|\partial\Omega} = g$. Uzasadnia to przyjętą nazwę stabilnych warunków brzegowych.

D e f i n i c j a
Warunki brzegowe zawierające pochodne rzędu wyższego niż $(k-1)$ nazywane są niestabilnymi warunkami brzegowymi dla równania rzędu $2k$.

Warunki niestabilne nie mogą być rozumiane jako ślady funkcji, ponieważ funkcje z przestrzeni $H^k(\Omega)$ nie wyznaczają śladów pochodnych rzędu wyższego niż $(k-1)$. Następujący przykład świadczy o tym, że jeśli ciąg funkcji u_n zbiega do u w $H^k(\Omega)$ oraz jeśli każda z funkcji u_n spełnia w sensie śladu pewne warunki brzegowe z pochodnymi rzędu wyższego niż $(k-1)$, to funkcja graniczna u nie musi spełniać tych warunków (stąd warunki te zwane są niestabilnymi).

P r z y k ł a d
Niech $k = 1$, $\Omega = [-1, 1]$, $u(x) = 1 - x^2$,

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dla } x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{n} + (n-1)(1-x)^2 & \text{dla } x \in \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right] \end{cases} \quad \text{i przedłużona do funkcji parzystej.}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$\|u - u_n\|_{1,2} \le \frac{32}{n^3} + \frac{32}{n},$$

zatem $u_n \to u$ w $H^1(\Omega)$. Oczywiście $u_n(-1) = u_n(1) = \frac{1}{n} \to 0 = u(1) = u(-1)$, ale

$$u_n'(-1) = u_n'(1) = 0, \ u'(1) = -2, \, u'(-1) = 2.$$

12.2.3 Słabe rozwiązania zagadnień brzegowych

Rozważmy równanie

$$Au = f, \tag{12.15}$$

gdzie A jest operatorem eliptycznym rzędu $2k$ z warunkami brzegowymi, wśród których jest μ warunków stabilnych postaci

$$B_1 u(s) = g_1(s), \, B_2 u(s) = g_2(s), \ldots, B_\mu u(s) = g_\mu(s) \quad \text{dla } s \in \partial\Omega$$

(B_1, $B_2, \ldots, B_\mu$ są pewnymi operatorami różniczkowymi rzędu co najwyżej $(k-1)$). Oprócz tego dane jest $(k-\mu)$ warunków brzegowych niestabilnych, scharakteryzowanych przez funkcje h_1, $h_2, \ldots, h_{k-\mu}$.

Na początek rozważymy kilka szczególnych przypadków zagadnień brzegowych.

Zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (ze stabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \ \text{ dla } x \in \Omega, \ \ u_{|\partial\Omega} = g. \tag{12.16}$$

Niech $v \in V = \left\{ u \in H^1(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = 0 \right\}$. Przypuśćmy, że $f, \ g \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.16). Stosując wzór Greena otrzymujemy

$$-\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx = \int\limits_{\Omega} vf dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\Omega} vf dx \tag{12.17}$$

(porównaj wyprowadzenie wzoru (12.9)). Łatwo zauważyć, ze całki występujące po prawej stronie wzoru (12.17) są poprawnie określone dla $u \in H^1(\Omega)$ i $f \in L^2(\Omega)$.

Niech g będzie śladem pewnej funkcji $w \in H^1(\Omega)$ i niech $f \in L^2(\Omega)$. Przyjmujemy następującą definicję.

D e f i n i c j a

Funkcję $u \in H^1(\Omega)$ nazywamy słabym rozwiązaniem zagadnienia (12.16) wtedy i tylko wtedy gdy

1. $u - w \in V$,

2. dla każdej funkcji $v \in V$ spełniona jest równość (12.17).

U w a g a

Problem istnienia rozwiązania zagadnienia Dirichleta sprowadza się do tego, czy dana funkcja g jest śladem pewnej funkcji $w \in H^1(\Omega)$. Jeśli tak jest, to pokażemy później, że wystarcza to do istnienia rozwiązania.

Zagadnienie Neumanna dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (z niestabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \ \text{ dla } x \in \Omega, \ \ \frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = h. \tag{12.18}$$

Niech $v \in V = H^1(\Omega)$. Przypuśćmy, że $f, h \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.18). Ponieważ

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i,$$

więc stosując, podobnie jak poprzednio, wzór Greena otrzymujemy.

$$-\int\limits_{\Omega} v\Delta u dx = -\int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx = \int\limits_{\Omega} vf dx + \int\limits_{\partial\Omega} vh ds. \tag{12.19}$$

Rezygnując z założenia o ciągłości danych funkcji f i h możemy sformułować definicję.

D e f i n i c j a

Niech $h \in L^2(\partial\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Słabym rozwiązaniem zagadnienia (12.18) nazywamy taką funkcję $u \in H^1(\Omega)$, że dla dowolnej funkcji $v \in V$ spełniona jest równość (12.19).

U w a g a

Rozwiązania zagadnienia Neumanna nie można zdefiniować za pomocą założenia o istnieniu takiej funkcji $w \in H^1(\Omega)$, że $\frac{\partial w}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = h$, ponieważ funkcje z przestrzeni $H^1(\Omega)$ nie wyznaczają śladów swoich pochodnych pierwszego rzędu na brzegu $\partial\Omega$.

Zagadnienie Newtona dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (z niestabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \ \text{dla } x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right)_{|\partial\Omega} = h. \tag{12.20}$$

Niech $v \in V = H^1(\Omega)$. Przypuśćmy, że $f, h \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia (12.20). Ponieważ

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i,$$

więc

$$\begin{aligned}\int_\Omega vf dx = -\int_\Omega v\Delta u dx = -\int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx = \\ = \int_{\partial\Omega} \sigma uv ds - \int_{\partial\Omega} vh ds + \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx.\end{aligned} \tag{12.21}$$

Zapiszmy ostatnią równość w postaci

$$A(v,u) + a(v,u) = \int_\Omega vf dx + \int_{\partial\Omega} vh ds, \tag{12.22}$$

gdzie

$$A(v,u) = \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx, \quad a(v,u) = \int_{\partial\Omega} \sigma uv ds.$$

Wyrażenie $a(v,u)$ jest tzw. brzegową ciągłą formą dwuliniową określoną na $H^1(\Omega)$ taką, że $|a(v,u)| \le C\|v\|_{1,2}\|u\|_{1,2}$.

Rezygnując z założenia o ciągłości danych funkcji f i h możemy sformułować definicję.

D e f i n i c j a

Niech $h \in L^2(\partial\Omega)$, $\sigma \in C(\partial\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$. Słabym rozwiązaniem zagadnienia (12.20) nazywamy taką funkcję $u \in H^1(\Omega)$, że dla dowolnej funkcji $v \in V$ spełniona jest równość (12.22).

Definicja słabego rozwiązania zagadnienia brzegowego - przypadek ogólny

Rozważone powyżej przypadki zagadnień brzegowych prowadzą do sformułowania ogólnej definicji słabego rozwiązania zagadnienia brzegowego.

Rozważmy równanie

$$Au = f, \text{ dla } x \in \Omega, \tag{12.23}$$

gdzie A jest operatorem eliptycznym rzędu $2k$ postaci (12.1) z warunkami brzegowymi, wśród których jest μ warunków stabilnych postaci

$$B_1 u = g_1,\ B_2 u = g_2, \dots, B_\mu u = g_\mu \tag{12.24}$$

(B_1, $B_2, \dots, B_\mu$ są pewnymi operatorami różniczkowymi rzędu co najwyżej $(k-1)$). Oprócz tego dane jest $(k-\mu)$ warunków brzegowych niestabilnych, scharakteryzowanych przez funkcje h_1, $h_2, \dots, h_{k-\mu} \in L^2(\partial\Omega)$.

Niech

$$V = \left\{ v \in H^k(\Omega) : B_1 v = 0,\ B_2 v = 0, \dots, B_\mu v = 0 \text{ w sensie śladu na } \partial\Omega \right\}. \tag{12.25}$$

Niech $A(v,u) = \sum\limits_{|i|,|j|\le k} \int\limits_\Omega a_{ij} D^i v D^j u dx$ oraz $a(v,u)$ będzie brzegową ciągłą formą dwuliniową określoną na $H^k(\Omega)$.

Niech $w \in H^k(\Omega)$ będzie taką funkcją, że

$$B_1 w = g_1, B_2 w = g_2, \dots, B_\mu w = g_\mu \text{ w sensie śladu na } \partial\Omega. \tag{12.26}$$

D e f i n i c j a (*przypadek ogólny*)

Mówimy, że $u \in H^k(\Omega)$ jest słabym rozwiązaniem zagadnienia brzegowego określonego przez powyższe dane wtedy i tylko wtedy gdy $u - w \in V$ oraz dla każdej funkcji $v \in V$ zachodzi tożsamość

$$((v,u)) := A(v,u) + a(v,u) = \int\limits_\Omega v f dx + \sum_{i=1}^{k-\mu} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial^{t_i} v}{\partial \nu^{t_i}} h_i ds. \tag{12.27}$$

12.3 Istnienie słabych rozwiązań zagadnień brzegowych

W dowodzie istnienia i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego ważną rolę odgrywa pojęcie tzw. *form V-eliptycznych*.

D e f i n i c j a

Niech dana będzie przestrzeń Hilberta V i dwuliniowa forma $((v,u))$ określona na tej przestrzeni. Mówimy, że forma $((v,u))$ jest $V-$eliptyczna wtedy i tylko wtedy gdy istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że dla każdej funkcji $v \in V$ zachodzi nierówność

$$((v,v)) \ge \alpha \|v\|_V^2. \tag{12.28}$$

T w i e r d z e n i e (*Laxa-Milgrama*)
Niech H będzie przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym (v, u). Niech $B(v, u)$ będzie formą dwuliniową określoną na $H \times H$ taką, że

$$|B(v, u)| \leq K\|v\|\|u\| \text{ oraz } B(v, v) \geq \alpha\|v\|_V^2. \tag{12.29}$$

Wówczas każdy funkcjonał liniowy F ograniczony na H może być przedstawiony w formie

$$F(v) = B(v, z), \quad v \in V, \tag{12.30}$$

gdzie element $z \in H$ jest jednoznacznie wyznaczony przez funkcjonał F. Ponadto zachodzi nierówność

$$\|z\| \leq \frac{\|F\|}{\alpha}. \tag{12.31}$$

Dowód twierdzenia oparty jest na zastosowaniu twierdzenia Riesza dla reprezentacji funkcjonału liniowego w przestrzeniach Hilberta.

■

T w i e r d z e n i e (*o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego*)
Niech zgodnie z definicją słabego rozwiązania (12.27) dane będzie zagadnienie brzegowe dla operatora eliptycznego rzędu $2k$. Jeśli forma $((v, u)) = A(v, u) + a(v, u)$ jest $V-$eliptyczna wtedy dany problem posiada dokładnie jedno słabe rozwiązanie $u \in H^k(\Omega)$ i istnieje stała $C > 0$ niezależna od f i h_i taka, że

$$\|u\|_{k,2} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{k,2} + \sum_{i=1}^{k-\mu}\|h_i\|_{L^2(\partial\Omega)}\right). \tag{12.32}$$

Dowód istnienia rozwiązania polega na zastosowaniu twierdzenia Laxa-Milgrama do funkcjonału F postaci

$$F(v) = \int_\Omega vf dx + \sum_{i=1}^{k-\mu}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial^{t_i}v}{\partial\nu^{t_i}}h_i ds - ((v, w))$$

i formy $B(v, u) = ((v, u))$. Jednoznaczność rozwiązania wynika natychmiast z zastosowania nierówności

$$0 = ((u_1 - u_2, u_1 - u_2)) \geq \alpha\|u_1 - u_2\|_V^2$$

dla dwóch rozwiązań u_1 i u_2 rozważanego zagadnienia. Stała C jest postaci $C = \frac{1}{\alpha}M$, gdzie M jest dowolną stałą ograniczającą z góry normę $\|F\|$.

■

12.4 Przykłady zagadnień brzegowych - analiza rozwiązalności

Zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona

Rozważamy zagadnienie (ze stabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \text{ dla } x \in \Omega, \ u_{|\partial\Omega} = g.$$

Niech $v \in V = \left\{u \in H^1(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = 0\right\}$, $w \in H^1(\Omega)$ taka, że $w_{|\partial\Omega} = g$. Wtedy z (12.17) wynika, że $a(v,u) = 0$ oraz

$$((v,u)) = A(v,u) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx.$$

Forma $((v,u))$ jest $V-$eliptyczna, ponieważ dla dowolnej funkcji v z przestrzeni V, na mocy nierówności Friedrichsa (11.10) prawdziwe jest oszacowanie postaci

$$((v,v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 dx \geq \frac{1}{k} \|v\|_{1,2}^2$$

dla pewnej stałej dodatniej k.

W takim razie z istnienia funkcji $w \in H^1(\Omega)$ takiej, że jej śladem na brzegu $\partial\Omega$ jest g, wynika istnienie i jednoznaczność rozwiązania tego zagadnienia.

Zagadnienie Neumanna dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (z niestabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \text{ dla } x \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}_{|\partial\Omega} = h.$$

Niech $v \in V = H^1(\Omega)$. Wtedy $a(v,u) = 0$ oraz

$$((v,u)) = A(v,u) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx.$$

W tym przypadku forma $((v,u))$ nie jest $V-$eliptyczna, ponieważ dla $a \neq 0$ funkcja stała $v \equiv a$ spełnia warunek $((v,v)) = 0$, ale $\|v\| \neq 0$. Oznacza to, że nie można stosować twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia brzegowego.

Wykazanie rozwiązalności zagadnienia Neumanna wymaga przyjęcia pewnych dodatkowych założeń, których nie będziemy w tym miejscu omawiać. W przypadku klasycznym warunkiem tym jest równość (7.24).

Zagadnienie Newtona dla równania Poissona

Rozważmy zagadnienie (z niestabilnym warunkiem brzegowym)

$$-\Delta u = f, \text{ dla } x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right)_{|\partial\Omega} = h.$$

Niech $v \in V = H^1(\Omega)$. Wtedy, zgodnie z równością (12.22)

$$A(v,u) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad a(v,u) = \int_{\partial\Omega} \sigma u v ds,$$

zatem

$$((v,u)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} \sigma u v ds.$$

Załóżmy ponadto, że we wszystkich punktach $P \in \partial\Omega$ spełniona jest nierówność $\sigma(P) \geq \sigma_0 > 0$. Oznaczając $C = \min\{1, \sigma_0\}$ i stosując nierówność Friedrichsa (11.10) otrzymujemy

$$((v,v)) \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \sigma_0 \int_{\partial\Omega} v^2 ds \geq C \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx + \int_{\partial\Omega} v^2 ds \right) \geq \frac{C}{k} \|v\|_{1,2}^2$$

co dowodzi $V-$eliptyczności formy $((v,u))$. Oznacza to, że rozważany problem posiada jednoznaczne rozwiązanie.