Wykład 13

Elementy rachunku wariacyjnego

13.1 Przykładowe zagadnienia

Rachunek wariacyjny zajmuje się metodami wyznaczania wartości ekstremalnych funkcjonałów określonych na pewnych przestrzeniach funkcyjnych. Klasyczna teoria rachunku wariacyjnego pochodzi od Eulera (1707-1783). Poniżej przedstawimy kilka przykładowych problemów prowadzących do zagadnień wariacyjnych.

Zagadnienie brachistochrony

W roku 1696 Johann Bernoulli postawił następujący problem.

Dane są dwa ustalone punkty M_1 i M_2 nie leżące na pionowej prostej. Należy wyznaczyć linię - drogę, po której punkt materialny zsunie się od M_1 do M_2 w najkrótszym czasie pod wpływem siły ciążenia, zakładając, że prędkość początkowa w punkcie M_1 jest równa zeru.

Niech $M_1\left(0,0\right)$, $M_2\left(x_2,y_2\right)$. Zakładając, że szukana krzywa dana jest równaniem $y=u\left(x\right)$ wnioskujemy, że muszą być spełnione warunki brzegowe $u\left(0\right)=0$, $u\left(x_2\right)=y_2$. Z zasady zachowania energii wynika, że

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy,$$

zatem

$$v=\sqrt{2gy}.$$

Ponieważ

$$dt=\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+\left(u'\left(x\right)\right)^2}}{\sqrt{2gu\left(x\right)}}dx,$$

więc całkowity czas zsuwania się punktu materialnego po krzywej $y=u\left(x\right)$ można zapisać wzorem

$$T=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int\limits_0^{x_2}\frac{\sqrt{1+\left(u'\left(x\right)\right)^2}}{\sqrt{u\left(x\right)}}dx. \tag{13.1}$$

T jest funkcjonałem postaci $T\left(u\right)=\int\limits_a^b F\left(x,u,u'\right)dx$. Należy wyznaczyć taką funkcję $u\left(x\right)$, dla której wyrażenie (13.1) przyjmuje wartość minimalną w klasie funkcji różniczkowalnych spełniających zadane warunki brzegowe $u\left(0\right)=0$, $u\left(x_2\right)=y_2$.

Powierzchnia obrotowa o minimalnym polu

Postawmy zagadnienie wyznaczenia funkcji $y = u(x)$, która spełnia warunki brzegowe $u(x_1) = y_1$, $u(x_2) = y_2$ takiej, że pole powierzchni obrotowej otrzymanej przez obrót tej krzywej dookoła osi OX w przedziale $[x_1; x_2]$ jest minimalne. Ponieważ pole powierzchni obrotowej opisane jest wzorem

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} u(x) \sqrt{1 + (u'(x))^2} dx, \tag{13.2}$$

więc zagadnienie powyższe prowadzi do minimalizacji funkcjonału (13.2).

Powierzchnia o minimalnym polu przechodząca przez daną krzywą

Niech Γ będzie daną krzywą zamkniętą w $\mathbb{R}^3$. Poszukujemy powierzchni S, której brzegiem jest Γ, i której pole jest minimalne. Analitycznie oznacza to, że szukamy funkcji dwóch zmiennych $z = u(x, y)$ spełniającej warunek brzegowy

$$u(x, y)_{|\partial\Omega} = f(x, y),$$

gdzie f jest dana, a $\partial\Omega$ jest rzutem Γ na płaszczyznę Oxy, takiej, że funkcjonał

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} dxdy \tag{13.3}$$

przyjmuje wartość minimalną (Ω jest obszarem, którego brzegiem jest $\partial\Omega$). Rozważany funkcjonał (13.3) jest postaci $S(u) = \iint_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y)\, dxdy$.

13.2 Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału

Niech $J : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem określonym na pewnej przestrzeni funkcyjnej X. Niech $\Delta J = J(u + h) - J(u)$ będzie przyrostem wartości funkcjonału odpowiadającym przyrostowi argumentu o h. Zauważmy, że dla ustalonego u przyrost ΔJ jest funkcjonałem zależnym od h - na ogół nieliniowym. Zgodnie z ogólną teorią różniczkowania w przestrzeniach unormowanych, przyjmujemy następującą definicję.

D e f i n i c j a

Mówimy, że funkcjonał J jest różniczkowalny w punkcie u wtedy i tylko wtedy gdy przyrost ΔJ daje się przedstawić w postaci

$$\Delta J = \varphi(h) + \alpha(u, h)\, \|h\|, \tag{13.4}$$

gdzie $\varphi(h)$ jest funkcjonałem liniowym względem h, oraz $\lim_{\|h\| \to 0} \alpha(u, h) = 0$. Funkcjonał $\varphi(h)$ nazywamy *wariacją* (*różniczką w sensie Frécheta*) funkcjonału J. Wariację $\varphi(h)$ zapisujemy symbolicznie jako $\delta J(h)$.

Pojęcie wariacji funkcjonału pozwala sformułować w prosty sposób warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału.

T w i e r d z e n i e
Jeśli funkcjonał $J(u)$ posiada ekstremum dla $u = u_0$ oraz istnieje wariacja funkcjonału J, to

$$\delta J = 0 \text{ dla } u = u_0. \tag{13.5}$$

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $\Delta J = J(u_0 + h) - J(u_0) = \delta J(h) + \alpha(u_0, h)\|h\|$. Ponieważ $\alpha(u_0, h) \to 0$ dla $\|h\| \to 0$, więc znak wyrażenia $\delta J(h) + \alpha(u_0, h)\|h\|$ dla dostatecznie małych $\|h\|$ określony jest przez znak pierwszego składnika. Gdyby $\delta J \neq 0$, z liniowości wariacji δJ wynika, że dla małych $\|h\|$ znak ten może być zarówno dodatni jak i ujemny, zatem funkcjonał J nie może osiągać ekstremum w punkcie u_0.

■

13.2.1 Przypadki funkcjonałów szczególnej postaci

Przedyskutujemy teraz postać warunku koniecznego istnienia ekstremum (13.5) w pewnych szczególnych przypadkach funkcjonałów.

Zagadnienie z nieruchomymi końcami

Rozważmy przestrzeń $C^1([a;b])$ z normą $\|u\| = \sup\limits_{[a;b]}|u(x)| + \sup\limits_{[a;b]}|u'(x)|$. Niech X będzie przestrzenią funkcyjną określoną następująco

$$X = \left\{u : u \in C^1([a;b]),\ u(a) = A,\ u(b) = B\right\}.$$

Rozważamy tzw. zagadnienie z nieruchomymi końcami polegające na wyznaczeniu ekstremów funkcjonału postaci

$$J(u) = \int\limits_a^b F(x, u, u')\, dx \tag{13.6}$$

w przestrzeni X.

Niech h będzie przyrostem funkcji u, tzn. $h \in C^1([a;b])$ oraz $u + h \in X$. Wynika stąd, że

$$h(a) = h(b) = 0.$$

Załóżmy teraz, że $F(x, u, u')$ jest funkcją klasy C^2 na zbiorze $\{(x, u, u') : a \le x \le b,\ u, u' \in \mathbb{R}\}$.

Wyznaczmy wariację δJ. Mamy

$$\Delta J = \int\limits_a^b F(x, u + h, u' + h')\, dx - \int\limits_a^b F(x, u, u')\, dx = \int\limits_a^b \left[F(x, u + h, u' + h') - F(x, u, u')\right] dx.$$

Ze wzoru Taylora wynika, że

$$\begin{aligned} F(x, u + h, u' + h') - F(x, u, u') = {} & h\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u} + h'\frac{\partial F(x, u, u')}{\partial u'} + \\ & + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + hh'\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} + \frac{1}{2}h'^2\frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}, \end{aligned}$$

gdzie pochodne $\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial u'^2}$ obliczone są w punkcie $(x, u + \theta h, u' + \theta h')$, $0 < \theta < 1$.

W takim razie

$$\Delta J = \int_a^b \left[h \frac{\partial F(x,u,u')}{\partial u} + h' \frac{\partial F(x,u,u')}{\partial u'} \right] dx + \alpha(u,h)\|h\|, \tag{13.7}$$

gdzie

$$\alpha(u,h) = \frac{1}{\|h\|} \int_a^b \left(\frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + h h' \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} + \frac{1}{2} h'^2 \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} \right) dx. \tag{13.8}$$

Szacując wyrażenie (13.8) otrzymujemy

$$|\alpha(u,h)| \leq \frac{1}{\|h\|} \|h\|^2 \int_a^b \left(\frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial u'} \right| + \frac{1}{2} \left| \frac{\partial^2 F}{\partial u'^2} \right| \right) dx = \|h\| \cdot Const$$

co na mocy definicji (13.4) oznacza, że wariacja funkcjonału (13.6) wyraża się wzorem

$$\delta J(h) = \int_a^b \left[h \frac{\partial F(x,u,u')}{\partial u} + h' \frac{\partial F(x,u,u')}{\partial u'} \right] dx. \tag{13.9}$$

Zgodnie ze wzorem (13.5) warunkiem koniecznym istnienia ekstremum funkcjonału jest spełnianie warunku $\delta J(h) \equiv 0$. Całkując przez części drugi składnik we wzorze (13.9) otrzymujemy

$$\int_a^b h' \frac{\partial F(x,u,u')}{\partial u'} dx = \underbrace{h \frac{\partial F(x,u,u')}{\partial u'} \Big|_{x=a}^{x=b}}_{0} - \int_a^b h \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F(x,u,u')}{\partial u'} \right) dx,$$

zatem

$$\delta J(h) = \int_a^b h \left[F_u(x,u,u') - \frac{d}{dx} F_{u'}(x,u,u') \right] dx.$$

Z dowolności funkcji h wynika, że musi być spełnione poniższe równanie (zapisane w uproszczonej postaci z pominięciem argumentów)

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} = 0. \tag{13.10}$$

Równanie to nosi nazwę *równania Eulera*. Jest to właśnie warunek konieczny istnienia ekstremum funkcjonału postaci (13.6). Rozwiązania równania Eulera nazywają się *ekstremalami*. Z udowodnionego uprzednio twierdzenia wynika, że funkcjonał J może posiadać ekstrema tylko na zbiorze ekstremal, zależy to jednak od spełnienia pewnych warunków dostatecznych istnienia ekstremum. Warunków tych nie będziemy w tym miejscu omawiać.

P r z y k ł a d 1 (*zagadnienie brachistochrony*)
Rozważmy funkcjonał opisany wzorem (13.1). Jest on postaci

$$J(u) = \int_a^b F(u,u')\, dx$$

tzn. funkcja F nie zależy w sposób jawny od x. Można pokazać, że w tym przypadku równanie Eulera (13.10) może być sprowadzone do prostszej postaci

$$F - u'F_{u'} = Const.$$

W przypadku funkcjonału zagadnienia brachistochrony przyjmujemy

$$F(u, u') = \frac{\sqrt{1 + (u'(x))^2}}{\sqrt{u(x)}},$$

co prowadzi do równania

$$\frac{\sqrt{1 + (u')^2}}{\sqrt{u}} - \frac{(u')^2}{\sqrt{u}\sqrt{1 + (u')^2}} = Const. \tag{13.11}$$

Wprowadzając parametr $\tau = 2 \operatorname{arcctg} u'$ można zapisać rozwiązanie równania (13.11) w postaci parametrycznej

$$x = a(\tau - \sin\tau), \quad u = a(1 - \cos\tau).$$

Jest to przedstawienie parametryczne cykloidy, gdzie stała a zależy od przyjętego warunku brzegowego $u(x_2) = y_2$.

P r z y k ł a d 2 (*powierzchnia obrotowa o minimalnym polu*)
Zagadnienie znalezienia powierzchni obrotowej o minimalnym polu przechodzącej przez ustalone punkty równoważne jest minimalizacji funkcjonału (13.2). Ponieważ

$$F(u, u') = u(x)\sqrt{1 + (u'(x))^2}$$

nie zależy w sposób jawny od x, więc podobnie jak w poprzednim przykładzie otrzymujemy równanie

$$F - u'F_{u'} = u\sqrt{1 + (u')^2} - \frac{u(u')^2}{\sqrt{1 + (u')^2}} = Const.$$

Łatwo pokazać, że jego rozwiązaniami są wszystkie linie opisane równaniem postaci

$$u = C_1 \cosh\frac{x - C_2}{C_1},$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi zależnymi od przyjętych warunków brzegowych. Otrzymane linie noszą nazwę *krzywych łańcuchowych.*

Zagadnienie ze swobodnymi końcami

Rozważmy funkcjonał (13.6) bez zadanych warunków brzegowych, tzn. poszukajmy krzywej, dla której funkcjonał

$$J(u) = \int_a^b F(x, u, u')\,dx$$

osiąga ekstremum, przy założeniu, że końce krzywej $u = u(x)$ leżą na prostych $x = a$, $x = b$. Powtarzając rozumowanie z rozważań dotyczących zagadnienia z nieruchomymi końcami, dochodzimy do ponownie do równania Eulera (13.10) oraz otrzymujemy tzw. *naturalne warunki brzegowe* wyznaczone z równań

$$F_{u'|x=a} = 0, \quad F_{u'|x=b} = 0. \tag{13.12}$$

Warunki te spełnia każda krzywa, na której realizowane jest ekstremum funkcjonału J.

Funkcjonał zależny od więcej niż jednej funkcji

Rozważmy zagadnienie polegające na wyznaczeniu ekstremów funkcjonału postaci

$$J(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \int_a^b F(x, u_1(x), \ldots, u_n(x), u_1'(x), \ldots, u_n'(x))\, dx \tag{13.13}$$

przy założeniu, że funkcje $u_1, \ldots, u_n$ spełniają pewne warunki brzegowe dla $x = a$ i $x = b$.

Wykorzystując rozwinięcie funkcji F za pomocą wzoru Taylora, można pokazać, że w tym przypadku wariacja δJ funkcjonału (13.13) dana jest wzorem

$$\delta J(h) = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} \left(F_{u_i} h_i + F_{u_i'} h_i'\right) dx. \tag{13.14}$$

Wzór ten jest uogólnieniem wzoru (13.9). Dobierając w sposób niezależny funkcje h_i łatwo pokazać, że warunek powyższy prowadzi do układu równań Eulera postaci

$$F_{u_i} - \frac{d}{dx} F_{u_i'} = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.15}$$

P r z y k ł a d (*zasada najmniejszego działania*)

Załóżmy, że dany jest pewien układ punktów materialnych o masach $m_1, m_2, \ldots, m_n$ i współrzędnych (x_i, y_i, z_i) dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zakładamy, że układowi temu nie nałożono żadnych więzów.

Energia kinetyczna układu wyraża się wzorem

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right).$$

Załóżmy ponadto, że układ posiada energię potencjalną, tzn., że istnieje taka funkcja (potencjał) $U = U(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n)$, że składowe siły działającej na $i-$ty punkt są równe odpowiednio

$$X_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Wprowadzamy tzw. *funkcję Lagrange'a* rozważanego układu, wzorem

$$L = T - U.$$

Rozważmy teraz zagadnienie minimalizacji funkcjonału

$$\int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n, \dot{z}_1, \ldots, \dot{z}_n\right) dt. \tag{13.16}$$

Na mocy układu równań Eulera (13.15) zastosowanego do funkcji

$$F = L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right) - U\left(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n\right)$$

otrzymujemy, że

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{x}_i = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{y}_i = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial z_i} - \frac{d}{dt} m_i \dot{z}_i = 0 \ \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n$$

skąd wynika, że

$$m_i \ddot{x}_i = X_i,\ m_i \ddot{y}_i = Y_i,\ m_i \ddot{z}_i = Z_i \ \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13.17}$$

Równania (13.17) sa równaniami ruchu dla układu n punktów materialnych.

Udowodniliśmy w ten sposób następującą zasadę najmniejszego działania.

Ruch układu w przedziale czasowym $(t_0; t_1)$ *opisują te funkcje* $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *dla których całka* (13.16) *osiąga minimum.*

Funkcjonały zależne od pochodnych wyższych rzędów

Rozważmy teraz funkcjonały postaci

$$J(u) = \int_a^b F\left(x, u, u', \ldots, u^{(n)}\right) dx \tag{13.18}$$

z warunkami brzegowymi

$$u^{(i)}(a) = A_i, \ \ u^{(i)}(b) = B_i \ \text{ dla } i = 0, 2, \ldots, n-1. \tag{13.19}$$

Rozumując analogicznie jak w poprzednich przypadkach można pokazać, że wariacja δJ wyraża się wzorem

$$\delta J(h) = \int_a^b \left(F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{u^{(n)}}\right) h(x)\, dx.$$

Z warunku koniecznego istnienia ekstremum (13.5) wynika następujące równanie zwane *równaniem Eulera-Poissona*

$$F_u - \frac{d}{dx} F_{u'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{u''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{u^{(n)}} = 0. \tag{13.20}$$

Funkcjonał zależny od funkcji dwóch zmiennych

Rozważmy teraz przypadek funkcjonału zależnego od funkcji dwóch zmiennych. Niech Ω będzie obszarem zawartym w $\mathbb{R}^2$ ograniczonym krzywą $\partial\Omega$. Poszukujemy funkcji $u(x, y)$ takiej, że funkcjonał

$$J(u) = \iint\limits_{\Omega} F\left(x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)\right) dxdy \tag{13.21}$$

osiąga wartość ekstremalną. Od funkcji $u(x, y)$ wymagamy, aby spełniała warunek brzegowy postaci

$$u_{|\partial\Omega} = \varphi, \tag{13.22}$$

gdzie φ jest daną funkcją określoną na brzegu $\partial\Omega$.

Zakładając, że F jest klasy C^2 i analizując postać przyrostu ΔJ można wyprowadzić następujący wzór na wariację funkcjonału

$$\delta J(h) = \iint\limits_{\Omega} \left(F_u h + F_{u_x} h_x + F_{u_y} h_y\right) dxdy. \tag{13.23}$$

Przekształcając wzór (13.23) za pomocą wzoru Greena i zakładając, że $h_{|\partial\Omega} = 0$, otrzymujemy ostatecznie, że

$$\delta J(h) = \iint\limits_{\Omega} \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y}\right) h(x, y)\, dxdy. \tag{13.24}$$

Wynika stąd następujące równanie Eulera

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0. \tag{13.25}$$

Równanie (13.25) wraz z warunkiem brzegowym $u_{|\partial\Omega} = \varphi$ jest sformułowaniem warunku koniecznego dla istnienia ekstremum funkcjonału (13.21). Jest to równanie różniczkowe cząstkowe.

P r z y k ł a d 1
Rozważmy funkcjonał

$$J(u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dxdy \tag{13.26}$$

z warunkiem brzegowym $u_{|\partial\Omega} = \varphi$.

W tym przypadku

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$

zatem równanie Eulera (13.25) przybiera postać

$$\Delta u = 0 \ \text{ z warunkiem } u_{|\partial\Omega} = \varphi. \tag{13.27}$$

Oznacza to, ze funkcja u jest rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta dla równania Laplace'a.

Łatwo pokazać, ze funkcja u będąca rozwiązaniem zagadnienia (13.27) realizuje minimum funkcjonału (13.26).

Niech $u = u_0 + h$, gdzie $h_{|\partial\Omega} = 0$. Wówczas

$$J(u) = J(u_0 + h) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy + \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy +$$

$$+ 2 \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] dxdy.$$

Stosując twierdzenie Greena i uwzględniając fakt, że $\Delta u_0 = 0$ łatwo pokazać, że

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] dxdy = 0,$$

zatem

$$J(u_0 + h) = J(u_0) + \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \geq J(u_0)$$

co kończy dowód.

P r z y k ł a d 2

Rozważmy funkcjonał

$$J(u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2uf(x, y) \right] dxdy \tag{13.28}$$

z warunkiem brzegowym $u_{|\partial\Omega} = \varphi$.

W tym przypadku

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2uf,$$

zatem równanie Eulera (13.25) przybiera postać

$$\Delta u = f \quad \text{z warunkiem } u_{|\partial\Omega} = \varphi. \tag{13.29}$$

Jest to zagadnienie Dirichleta dla równania Poissona.

P r z y k ł a d 3

Zagadnienie znajdowania powierzchni o minimalnym polu przechodzącej przez daną krzywą w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ prowadzi do poszukiwania minimum funkcjonału

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} dxdy \tag{13.30}$$

z warunkiem $u_{|\partial\Omega} = \varphi$.

W tym przypadku równanie Eulera (13.25) przybiera postać

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{13.31}$$

Fizycznie powierzchnię o minimalnym polu realizuje powierzchnia bańki mydlanej przechodzącej przez zadaną krzywą w przestrzeni.

Funkcjonały zależne od funkcji wielu zmiennych i pochodnych wyższych rzędów

Dla funkcjonału

$$J(u) = \int\limits_{\Omega}\cdots\int F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})\, dx_1 \ldots dx_n \tag{13.32}$$

równanie Eulera przybiera postać

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x_1} F_{u_{x_1}} - \ldots - \frac{\partial}{\partial x_n} F_{u_{x_n}} = 0. \tag{13.33}$$

Podobnie dla funkcjonału

$$J(u) = \iint\limits_{\Omega} F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})\, dxdy \tag{13.34}$$

można wyprowadzić następujące równanie Eulera

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u_{xx}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{u_{xy}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F_{u_{yy}} = 0. \tag{13.35}$$

Przykładowo dla funkcjonału

$$J(u) = \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - 2uf(x, y)\right] dxdy$$

równanie Eulera (13.35) ma postać

$$\Delta^2 u = f.$$

Dla $f \equiv 0$ jest to równanie biharmoniczne.

13.3 Twierdzenie o minimum funkcjonału kwadratowego

Z poprzednich rozważań wynika, że zagadnienia poszukiwania ekstremali funkcjonałów prowadzą do pewnych zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych cząstkowych. Okazuje się, że również zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych związane są z wyznaczeniem ekstremów funkcjonałów.

Niech H będzie pewną przestrzenią Hilberta, w której rozważane jest równanie

$$Au = f, \tag{13.36}$$

gdzie A jest operatorem określonym na pewnej podprzestrzeni liniowej $D_A \subset H$ o wartościach w przestrzeni H. Zakładamy, że $\overline{D}_A = H$, tzn. D_A jest gęsta w H. Załóżmy również, że A jest operatorem liniowym *symetrycznym*, tzn.

$$(Au, v) = (u, Av) \tag{13.37}$$

dla wszystkich $u, v \in D_A$, oraz *dodatnim*, tzn.

$$(Au, u) \geq 0 \text{ oraz } (Au, u) = 0 \Longrightarrow u = 0 \text{ dla } u \in D_A. \tag{13.38}$$

T w i er d z e n i e

Jeśli A jest dodatni w podprzestrzeni D_A, wówczas równanie $Au = f$, gdzie $f \in H$, posiada co najwyżej jedno rozwiązanie $u \in D_A \subset H$.

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że gdyby elementy u_1 i u_2 były dwoma różnymi rozwiązaniami tego równania, to

$$0 = Au_1 - Au_2 = A(u_1 - u_2)$$

skąd wynika, że

$$(A(u_1 - u_2), u_1 - u_2) = 0 \Longrightarrow u_1 - u_2 = 0,$$

a zatem $u_1 = u_2$.

■

T w i e r d z e n i e (*o minimum funkcjonału kwadratowego*)

Niech A będzie symetryczny i dodatni w podprzestrzeni D_A, niech $f \in H$. Wówczas jeśli równanie $Au = f$ jest spełnione dla $u_0 \in D_A$, tzn. $Au_0 = f$, to funkcjonał

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u) \tag{13.39}$$

osiąga swoją najmniejszą wartość w D_A w punkcie $u = u_0$.

Dla dowodu konieczności warunku wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} F(u) &= (Au, u) - 2(f, u) = (Au, u) - 2(Au_0, u) = \\ &= (Au, u) - (Au_0, u) - (u, Au_0) = (Au, u) - (Au_0, u) - (Au, u_0) = \\ &= (A(u - u_0), u - u_0) - (Au_0, u_0). \end{aligned}$$

Z warunku (13.38) wynika, że wartość $F(u)$ jest najmniejsza gdy $(A(u - u_0), u - u_0) = 0$, tzn. gdy $u = u_0$.

Dla dowodu implikacji w stronę przeciwną rozważmy funkcję zmiennej $t \in \mathbb{R}$ określoną dla dowolnego $v \in D_A$ wzorem

$$\begin{aligned} F(u_0 + tv) &= (A(u_0 + tv), u_0 + tv) - 2(f, u_0 + tv) = \\ &= t^2 (Av, v) + 2t(Au_0, v) - 2t(f, v) + (Au_0, u_0) - 2(f, u_0). \end{aligned}$$

Funkcja ta zgodnie z założeniem ma minimum lokalne w punkcie $t = 0$, zatem

$$\frac{d}{dt} F(u_0 + tv)_{|t=0} = 0$$

tzn.

$$2(Au_0, v) - 2(f, v) = 0 \Longrightarrow (Au_0 - f, v) = 0 \text{ dla dowolnego } v \in D_A.$$

Na mocy gęstości podprzestrzeni D_A wnioskujemy, że $Au_0 = f$ w H.

■

P r z y k ł a d
Rozważmy równanie

$$\left(E(x) I(x) u''(x)\right)'' = q(x) \tag{13.40}$$

z warunkami

$$u(0) = u(l) = 0, \;\; u'(0) = u'(l) = 0, \tag{13.41}$$

gdzie $E, I \in C^2([0;l])$, $q \in C([0;l])$ oraz $E(x) > 0$, $I(x) > 0$.

Równanie (13.40) opisuje ugięcie pręta o długości l, module sprężystości $E(x)$, momencie bezwładności przekroju względem osi ugięcia $I(x)$, pod działaniem obciążenia $q(x)$. Warunki (13.41) oznaczają, że pręt jest zamocowany na końcach.

Niech $H = L^2(0;l)$, D_A - zbiór funkcji klasy C^4 spełniających warunki brzegowe (13.41), operator A zdefiniowany jest jako

$$A : D_A \to H, \;\; Au = (EIu'')''.$$

Operator ten jest symetryczny, ponieważ na mocy wzoru o całkowaniu przez części otrzymujemy dla $u, v \in D_A$

$$(Au, v) = \int_0^l (EIu'')'' v dx = \underbrace{(EIu'')' v\Big|_{x=0}^{x=l}}_{0} - \int_0^l (EIu'')' v' dx =$$

$$= -\underbrace{EIu''v'\Big|_{x=0}^{x=l}}_{0} + \int_0^l EIu''v''dx = \int_0^l EIu''v''dx.$$

Analogicznie łatwo przeliczyć, że

$$(u, Av) = \int_0^l EIu''v''dx,$$

zatem $(Au, v) = (u, Av)$ dla dowolnych $u, v \in D_A$.

Ponadto

$$(Au, u) = \int_0^l EI(u'')^2 dx \geq 0$$

oraz z równości $(Au, u) = 0$ wynika, że $u'' \equiv 0$, a więc $u(x) = ax + b$. Ponieważ każda funkcja u należąca do podprzestrzeni D_A spelnia jednorodne warunki brzegowe (13.41), więc $u \equiv 0$. Oznacza to, że operator A jest dodatni.

Funkcjonał F jest w tym przypadku postaci

$$F(u) = \int_0^l EI(u'')^2\,dx - 2\int_0^l qu\,dx \tag{13.42}$$

i wyraża dla danego ugięcia podwojoną energię potencjalną pręta.

Jeśli u_0 jest rozwiązaniem problemu, to rozumując podobnie jak w dowodzie twierdzenia o minimum funkcjonału kwadratowego, łatwo pokazać, że

$$F(u) = \int_0^l EI(u'' - u_0'')^2\,dx - \int_0^l EI(u_0'')^2\,dx.$$

U w a g a

Twierdzenie o minimum funkcjonału kwadratowego transformuje problem znalezienia rozwiązania równania $Au = f$ do problemu znalezienia elementu $u_0 \in D_A$ minimalizującego funkcjonał $F(u)$ na D_A. Twierdzenie to ma charakter warunkowy, tzn. nie gwarantuje a priori istnienia takiego elementu w danej podprzestrzeni D_A. W przypadku, gdy $F(u)$ nie przyjmuje najmniejszej wartości na D_A, zbiór D_A wymaga rozszerzenia. Tą drogą można skonstruować definicję słabego rozwiązania rozważanego zagadnienia brzegowego, równoważną definicji słabego rozwiązania w przestrzeniach Sobolewa $H^k(\Omega)$.

■

13.4 Zadania

W zadaniach 1-7 wyznaczyć ekstremale funkcjonałów zależnych od jednej funkcji, przyjmując dowolne lecz ustalone warunki brzegowe.

1.

$$J(u) = \int_a^b u'\left(1 + x^2 u'\right)dx$$

Odp.: $u = \frac{C_1}{x} + C_2$

2.

$$J(u) = \int_a^b \left[(u')^2 + 2u'u - 16u^2\right]dx$$

Odp.: $u = C_1 \sin(4x - C_2)$

3.

$$J(u) = \int_a^b \left[xu' + (u')^2\right]dx$$

Odp.: $u = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2$

4.

$$J(u) = \int_a^b \frac{1+u^2}{(u')^2} dx$$

Odp.: $u = \sinh(C_1 x + C_2)$

5.

$$J(u) = \int_a^b \left[u^2 + (u')^2 - 2u \sin x\right] dx$$

Odp.: $u = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin x$

6.

$$J(u) = \int_a^b \left[x^2 (u')^2 + 2u^2 + 2xu\right] dx$$

Odp.: $u = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{1}{3} x \ln|x|$

7.

$$J(u) = 2\pi \int_a^b u\sqrt{1 + (u')^2} dx$$

Odp.: $u = C_1 \cosh \frac{x - C_2}{C_1}$

8. Wyznaczyć ekstremale funkcjonału zależnego od dwóch funkcji, przyjmując dowolne lecz ustalone warunki brzegowe

$$J(u_1, u_2) = \int_a^b \left[2u_1 u_2 - 2u_1^2 + (u_1')^2 - (u_2')^2\right] dx$$

Odp.: $u_1 = (C_1 x + C_2) \cos x + (C_3 x + C_4) \sin x$

9. Wyznaczyć ekstremale funkcjonału zależnego od dwóch funkcji

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2u_1 u_2 + (u_1')^2 + (u_2')^2\right] dx$$

przyjmując warunki brzegowe: $u_1(0) = 0$, $u_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $u_2(0) = 0$, $u_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
Odp.: $u_1 = \sin x$, $u_2 = -\sin x$

W zadaniach 10-12 wyznaczyć ekstremale funkcjonałów zależnych od jednej funkcji, przyjmując dowolne lecz ustalone warunki brzegowe.

10.

$$J(u) = \int_a^b \left[(u'')^2 - 2(u')^2 + u^2 - 2u\sin x \right] dx$$

Odp.: $u = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x - \frac{x^2 \sin x}{4}$

11.

$$J(u) = \int_a^b \left[(u''')^2 + 2xu \right] dx$$

Odp.: $u = \frac{x^7}{7!} + C_1 x^5 + C_2 x^4 + C_3 x^3 + C_4 x^2 + C_5 x + C_6$

12.

$$J(u) = \int_a^b \left[(u''')^2 + u^2 - 2x^3 u \right] dx$$

Odp.: $u = C_1 x + C_2 e^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(C_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + e^{-\frac{x}{2}} \left(C_5 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_6 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + x^3$

13. Wyznaczyć ekstremale funkcjonału

$$J(u) = \int_a^b \left[(u'')^2 - u^2 + x^2 \right] dx$$

przyjmując warunki brzegowe: $u(0) = 1,\ u'(0) = 0,\ u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\ u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$
Odp.: $u = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$