Wykład 14

Wstęp do metod przybliżonych

14.1 Wariacyjna definicja rozwiązań uogólnionych

Rozważamy równanie

$$Au = f \tag{14.1}$$

w pewnej przestrzeni Hilberta H. Zakładamy, że operator A określony jest na pewnej podprzestrzeni liniowej $D_A \subset H$ i jego wartości leżą w H. Na mocy twierdzenia o minimum funkcjonału kwadratowego (13.39) wiemy, że jeśli równanie $Au = f$ jest spełnione dla $u_0 \in D_A$, tzn. $Au_0 = f$, to funkcjonał $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$ osiąga swoją najmniejszą wartość w D_A w punkcie $u = u_0$. Nie wiadomo jednak, czy taki element $u_0 \in D_A$ istnieje.

Będziemy teraz usiłowali rozszerzyć D_A do takiego zbioru, na którym funkcjonał $F(u)$ osiąga minimum.

Załóżmy, że A jest *dodatnio określony*, tzn. symetryczny oraz dla pewnej stałej $C > 0$ zachodzi nierówność

$$(Au, u) \geq C^2 \|u\|^2 \tag{14.2}$$

dla każdego $u \in D_A$.

W podprzestrzeni D_A definiujemy nowy iloczyn skalarny określony wzorem

$$(u, v)_A = (Au, v). \tag{14.3}$$

Łatwo pokazać, że wszystkie aksjomaty iloczynu skalarnego są spełnione. Iloczyn ten zadaje normę w D_A określoną jako

$$\|u\|_A = \sqrt{(u, u)_A}. \tag{14.4}$$

Z założenia (14.2) wynika, że $\|u\|_A \geq C\|u\|$ zatem ciągi zbieżne w normie $\|\cdot\|_A$ są zbieżne także w normie standardowej $\|\cdot\|$.

Niech teraz H_A oznacza uzupełnienie D_A w normie $\|\cdot\|_A$. Przestrzeń liniową H_A nazywamy *przestrzenią Friedrichsa generowaną przez operator* A. Można pokazać, że wzór (14.3) może być w naturalny sposób rozszerzony dla wszystkich $u, v \in H_A$. Podstawowe własności przestrzeni Friedrichsa opisuje następujące twierdzenie.

T w i e r d z e n i e

Przestrzeń H_A jest przestrzenią Hilberta. Zbiór D_A jest gęsty w H_A, tzn. dowolny element z przestrzeni H_A może być przybliżony przez elementy z D_A.

■

Rozważmy teraz funkcjonał $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$. Na mocy (14.3) może on być zapisany jako

$$F(u) = (u, u)_A - 2(f, u) \quad \text{dla } u \in D_A. \tag{14.5}$$

Z poprzednich uwag wynika, że wzór (14.5) jest w naturalny sposób określony na H_A.

T w i e r d z e n i e

Niech operator A będzie dodatnio określony na gęstej podprzestrzeni liniowej D_A przestrzeni Hilberta H. Niech H_A będzie przestrzenią Friedrichsa generowaną przez operator A. Wówczas funkcjonał F zdefiniowany na H_A za pomocą wzoru (14.5) przyjmuje na H_A swoją najmniejszą wartość. Element u_0, dla którego F osiąga swoją najmniejszą wartość jest wyznaczony jednoznacznie.

Dla dowodu twierdzenia wystarczy zauważyć, że dla ustalonego $f \in H$ wyrażenie (f, u) jest ciągłym funkcjonałem liniowym na H_A, ponieważ na mocy (14.2) zachodzi nierówność

$$|(f, u)| \le \|f\|\|u\| \le \frac{1}{C}\|f\|\|u\|_A.$$

Z twierdzenia Riesza wynika istnienie takiego elementu $u_0 \in H_A$, że dla każdego $u \in H_A$ zachodzi

$$(u_0, u)_A = (f, u). \tag{14.6}$$

W takim razie

$$\begin{aligned} F(u) &= (u, u)_A - 2(u_0, u)_A = (u - u_0, u - u_0)_A - (u_0, u_0)_A = \\ &= \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2, \end{aligned}$$

tzn. $F(u_0) = -\|u_0\|_A^2$ i dla każdego $u \neq u_0$ spełniona jest nierówność $F(u) > F(u_0)$.

■

D e f i n i c j a

Element u_0 minimalizujący funkcjonał (14.5) nazywamy rozwiązaniem uogólnionym równania $Au = f$.

U w a g a 1

Równość $(u_0, u)_A = (f, u)$ nie prowadzi do efektywnego algorytmu skonstruowania rozwiązania u_0. W celu znalezienia przybliżeń rozwiązania należy rozpatrzyć zagadnienie minimalizacji funkcjonału $F(u)$.

U w a g a 2

Łatwo zauważyć, że jeśli

$$|(u_0, u)_A| = |(f, u)| \le \frac{1}{C}\|f\|\|u\|_A,$$

to dla $u = u_0$

$$\|u_0\|_A^2 \le \frac{1}{C}\|f\|\|u_0\|_A, \ \text{ a zatem } \|u_0\|_A \le \frac{1}{C}\|f\|. \tag{14.7}$$

Gdy v_0 jest rozwiązaniem zagadnienia $Av_0 = g$, u_0 jest rozwiązaniem zagadnienia $Au_0 = f$, to

$$\|u_0 - v_0\|_A \le \frac{1}{C}\|f - g\| \tag{14.8}$$

co oznacza ciągłą zależność rozwiązania od prawej strony równania. W szczególności, gdy dla pewnych $u_n \in D_A$ oznaczymy $Au_n = f_n$, to

$$\|u_n - u_0\|_A \leq \frac{1}{C}\|f_n - f\| = \frac{1}{C}\|Au_n - f\|, \tag{14.9}$$

tzn. $(Au_n \to f) \Longrightarrow (u_n \to u_0)$.

U w a g a 3
Jeśli $u_0 \in D_A$ minimalizuje $F(u)$ na H_A, to u_0 jest rozwiązaniem zagadnienia $Au = f$. Jeśli jednak $u_0 \notin D_A$, to równanie $Au = f$ nie posiada rozwiązań w D_A.

Istotnie, gdyby $v \in D_A$ było rozwiązaniem równania $Au = f$ w D_A, to $F(v)$ byłoby najmniejszą wartością funkcjonału F w D_A. Ponieważ jednak

$$F(v) = \|v - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2 > F(u_0),$$

więc z gęstości zbioru D_A w H_A wynika istnienie elementów $u_n \in D_A$ takich, że

$$u_n \to u_0, F(u_n) \to F(u_0) < F(v),$$

co na mocy przyjętego założenia nie jest jednak możliwe.

14.2 Metoda szeregów ortonormalnych

Rozważamy równanie (14.1) w pewnej przestrzeni Hilberta H. Zakładamy, że operator A jest dodatnio określony na pewnej gęstej podprzestrzeni liniowej $D_A \subset H$ i jego wartości leżą w H. Na mocy twierdzenia o minimum funkcjonału kwadratowego (13.39) wiemy, że jeśli równanie $Au = f$ jest spełnione dla $u_0 \in H_A$, tzn. $Au_0 = f$, to funkcjonał $F(u) = (Au, u) - 2(f, u)$ osiąga swoją najmniejszą wartość w H_A w punkcie $u = u_0$.

Zakładamy również, że przestrzeń H_A jest ośrodkowa (wystarczy żądać by H była ośrodkowa, np. $H = L^2(\Omega)$).

Niech (φ_k) będzie układem ortonormalnym zupełnym w H_A. Wówczas zgodnie z teorią szeregów Fouriera w przestrzeniach Hilberta i równością (10.17), u_0 można przedstawić jako

$$u_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k, \quad \text{gdzie} \quad a_k = (u_0, \varphi_k)_A. \tag{14.10}$$

Z definicji iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_A$ wynika, że

$$a_k = (u_0, \varphi_k)_A = (Au_0, \varphi_k) = (f, \varphi_k) \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{14.11}$$

Ze zbieżności szeregu (14.10) w H_A wynika jego zbieżność w H, ponieważ

$$\|u_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\| \leq \frac{1}{C}\|u_0 - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k\|_A \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Powyższe rozważania można sformułować w postaci następującego twierdzenia.

T w i e r d z e n i e
Niech A będzie operatorem dodatnio określonym na podprzestrzeni liniowej, gęstej $D_A \subset H$, $f \in H$. Niech (φ_k) będzie układem ortonormalnym zupełnym w H_A. Wówczas rozwiązanie

uogólnione u_0 równania $Au = f$ jest dane jako szereg (14.10) ze współczynnikami określonymi wzorami (14.11).

■

Niedogodnością metody szeregów ortonormalnych jest jest trudność efektywnego uzyskania układów ortonormalnych zupełnych (tzw. baz ortonormalnych) w H_A.

14.3 Metoda Ritza

Niech A będzie operatorem dodatnio określonym na D_A, D_A gęsty w H, H - ośrodkowa przestrzeń Hilberta. Rozważmy bazę (φ_k) w H_A (tzn. układ przeliczalny elementów liniowo niezależnych, zupełny). Nie zakładamy ortogonalności tego układu.

Niech $F(u) = (u,u)_A - 2(f,u)$. Rozwiązaniem uogólnionym zagadnienia $Au = f$ jest taki punkt $u_0 \in H_A$, że

$$F(u_0) = \min_{u \in H_A} F(u).$$

Ustalmy n naturalne i rozważmy zbiór elementów postaci $u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$.

Współczynniki a_k wyznaczamy żądając, aby

$$F(u_n) = \min F(v_n), \quad \text{gdzie } v_n \in \operatorname{lin}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n), \text{ tzn. } v_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k.$$

$F(v_n)$ jest formą kwadratową zmiennych $b_1, b_2, \ldots, b_n$ postaci

$$F(v_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k, \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k \right)_A - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k \right). \tag{14.12}$$

Warunkiem koniecznym istnienia ekstremum wyrażenia (14.12) jest, aby

$$\frac{\partial F}{\partial b_1} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial b_2} = 0, \ldots, \frac{\partial F}{\partial b_n} = 0.$$

Warunek ten prowadzi do następującego układu równań liniowych względem $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} (\varphi_1, \varphi_1)_A b_1 & + \ (\varphi_1, \varphi_2)_A b_2 & + \ldots + & (\varphi_1, \varphi_n)_A b_n & = (f, \varphi_1) \\ (\varphi_2, \varphi_1)_A b_1 & + \ (\varphi_2, \varphi_2)_A b_2 & + \ldots + & (\varphi_2, \varphi_n)_A b_n & = (f, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\varphi_n, \varphi_1)_A b_1 & + \ (\varphi_n, \varphi_2)_A b_2 & + \ldots + & (\varphi_n, \varphi_n)_A b_n & = (f, \varphi_n) \end{array} \right. \tag{14.13}$$

Wyznacznik układu (14.13) jest różny od zera, ponieważ elementy φ_k są liniowo niezależne (jest to tzw. wyznacznik Grama układu (φ_k)), a więc wartości $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są jednoznacznie określone. W przypadku, gdy (φ_k) jest układem ortonormalnym otrzymujemy natychmiast, że

$$b_k = (f, \varphi_k), \quad \text{dla } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Tak określony ciąg $u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k$ nazywamy ciągiem Ritza.

T w i e r d z e n i e
Niech A będzie operatorem dodatnio określonym na $D_A \subset H$, D_A gęste w H, $f \in H$, H - ośrodkowa przestrzeń Hilberta. Niech (φ_k) będzie bazą w H_A (niekoniecznie ortogonalną). Wówczas ciąg Ritza (u_n) ze współczynnikami $b_1, b_2, \dots, b_n$ określonymi jednoznacznie przez układ równań (14.13) zbiega w H_A (a więc i w H) do uogólnionego rozwiązania u_0 równania $Au = f$.

■

U w a g a 1
Chociaż dla ciągu Ritza $u_n \to u_0$, to nie musi zachodzić $Au_n \to f$.

U w a g a 2
Korzystając z nierówności (10.20) i własności przestrzeni Hilberta, można pokazać, że dla $m > n$ zachodzi zawsze nierówność

$$\|u_m - u_0\|_A \le \|u_n - u_0\|_A. \tag{14.14}$$

U w a g a 3
Jeśli elementy bazy (φ_k) należą do D_A, to układ równań (14.13) można zapisać w postaci

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} (A\varphi_1, \varphi_1)\, b_1 & + & (A\varphi_1, \varphi_2)\, b_2 & +\dots+ & (A\varphi_1, \varphi_n)\, b_n & = & (f, \varphi_1) \\ (A\varphi_2, \varphi_1)\, b_1 & + & (A\varphi_2, \varphi_2)\, b_2 & +\dots+ & (A\varphi_2, \varphi_n)\, b_n & = & (f, \varphi_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (A\varphi_n, \varphi_1)\, b_1 & + & (A\varphi_n, \varphi_2)\, b_2 & +\dots+ & (A\varphi_n, \varphi_n)\, b_n & = & (f, \varphi_n) \end{array}\right. \tag{14.15}$$

14.4 Metoda Galerkina

Niech A będzie operatorem określonym na D_A, D_A gęsty w H, H - ośrodkowa przestrzeń Hilberta. Rozważmy bazę (φ_k) w H_A taką, że $\varphi_k \in D_A$ dla $k = 1, 2, \dots$. Nie zakładamy ortogonalności tego układu.

Poszukujemy przybliżenia rozwiązania uogólnionego równania $Au = f$ w postaci

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

gdzie stałe a_k wyznaczamy z układu równań

$$(Au_n - f, \varphi_k) = 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{14.16}$$

Z gęstości D_A w H wynika, że gdyby warunek (14.16) spełniony był dla wszystkich k, to u_n byłoby rozwiązaniem równania $Au = f$. Ciąg u_n nazywamy ciągiem przybliżeń Galerkina.

W przypadku, gdy operator A jest liniowy warunek (14.16) prowadzi do układu równań

$$(a_1 A\varphi_1 + a_2 A\varphi_2 + \dots + a_n A\varphi_n - f, \varphi_k) = 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{14.17}$$

tzn. w postaci rozwiniętej

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} (A\varphi_1, \varphi_1)\, a_1 & + & (A\varphi_2, \varphi_1)\, a_2 & +\dots+ & (A\varphi_n, \varphi_1)\, a_n & = & (f, \varphi_1) \\ (A\varphi_1, \varphi_2)\, a_1 & + & (A\varphi_2, \varphi_2)\, a_2 & +\dots+ & (A\varphi_n, \varphi_2)\, a_n & = & (f, \varphi_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (A\varphi_1, \varphi_n)\, a_1 & + & (A\varphi_2, \varphi_n)\, a_2 & +\dots+ & (A\varphi_n, \varphi_n)\, a_n & = & (f, \varphi_n) \end{array}\right. \tag{14.18}$$

Jeśli dodatkowo założymy, że A jest operatorem dodatnio określonym (a więc symetrycznym), to łatwo zauważyć, że układ (14.18) jest identyczny z układem równań (14.15) otrzymanym w wyniku stosowania metody Ritza. W tym przypadku otrzymane ciągi przybliżeń są identyczne.

T w i e r d z e n i e

Niech A będzie operatorem dodatnio określonym na D_A, D_A gęsty w H, $f \in H$, H - ośrodkowa przestrzeń Hilberta. Niech (φ_k) będzie bazą w H_A (niekoniecznie ortogonalną) oraz $\varphi_k \in D_A$ dla $k = 1, 2, \dots$. Wówczas ciąg przybliżeń Galerkina, gdzie stałe $a_1, a_2, \dots, a_n$ są wyznaczone z układu równań (14.18) jest zbieżny w H_A do rozwiązania uogólnionego równania $Au = f$.

■

U w a g a 1 (*porównanie z metodą Ritza*)

Zakres stosowania metody Galerkina jest o wiele szerszy niż metody Ritza. Dla zastosowania warunku (14.16) nie jest konieczne, aby operator A był dodatnio określony, symetryczny ani nawet liniowy. W metodzie Galerkina punktem wyjścia jest równanie $Au = f$, zaś w metodzie Ritza - minimalizacja funkcjonału $F(u)$.

U w a g a 2

Można rozważać dwie różne bazy w przestrzeni H_A, tzn. (φ_k) i (ψ_k). Poszukujemy przybliżenia rozwiązania uogólnionego równania $Au = f$, podobnie jak poprzednio, w postaci

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k,$$

gdzie stałe a_k wyznaczamy z warunku

$$(Au_n - f, \psi_k) = 0 \quad \text{dla} \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{14.19}$$

Metoda ta nosi nazwę metody Galerkina-Pietrowa.

14.5 Metoda najmniejszych kwadratów

Niech A będzie operatorem liniowym określonym na D_A, D_A gęsty w H, H - ośrodkowa przestrzeń Hilberta. Załóżmy, że dany jest układ funkcji (φ_k) w H taki, że $\varphi_k \in D_A$ dla $k = 1, 2, \dots$ oraz $(A\varphi_k)$ stanowi bazę w H (układ taki nazywamy $A-$bazą w H)

Metoda najmniejszych kwadratów polega na poszukiwaniu ciągu

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

przybliżeń rozwiązania uogólnionego u_0 równania $Au = f$. Stałe a_k wyznacza się za pomocą warunku

$$\|Au_n - f\|^2 = \min_{v_n} \|Av_n - f\|^2, \tag{14.20}$$

gdzie minimum rozpatruje się po wszytkich funkcjach postaci $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \varphi_k$.

Obliczając $\|Av_n - f\|^2$ otrzymujemy

$$\|Av_n - f\|^2 = (Av_n - f, Av_n - f) = \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A\varphi_k - f, \sum_{k=1}^{n} b_k A\varphi_k - f\right) =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n} b_i b_j (A\varphi_i, A\varphi_j) - 2\left(f, \sum_{k=1}^{n} b_k A\varphi_k\right) + (f, f).$$

Wyrażenie to osiąga minimum gdy $\frac{\partial}{\partial b_i}\|Av_n - f\|^2 = 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ co można zapisać w postaci układu równań

$$\left\{\begin{array}{lllll}(A\varphi_1, A\varphi_1) b_1 & + (A\varphi_1, A\varphi_2) b_2 & + \ldots + & (A\varphi_1, A\varphi_n) b_n & = (f, A\varphi_1) \\ (A\varphi_2, A\varphi_1) b_1 & + (A\varphi_2, A\varphi_2) b_2 & + \ldots + & (A\varphi_2, A\varphi_n) b_n & = (f, A\varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (A\varphi_n, A\varphi_1) b_1 & + (A\varphi_n, A\varphi_2) b_2 & + \ldots + & (A\varphi_n, A\varphi_n) b_n & = (f, A\varphi_n)\end{array}\right. \tag{14.21}$$

Z założenia wynika, że wyznacznik układu (14.21) jest różny od zera, zatem współczynniki b_i są jednoznacznie wyznaczone.

T w i e r d z e n i e

Niech A będzie operatorem liniowym dodatnio określonym na D_A, D_A gęsty w H, $f \in H$, H - ośrodkowa przestrzeń Hilberta. Niech (φ_k) będzie $A-$bazą w H (tzn. $(A\varphi_k)$ jest bazą w H) oraz $\varphi_k \in D_A$ dla $k = 1, 2, \ldots$. Wówczas ciąg u_n postaci

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \varphi_k$$

gdzie stałe $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są wyznaczone z układu równań (14.21) jest zbieżny w H_A (a więc i w H) do rozwiązania uogólnionego u_0 równania $Au = f$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} Au_n = f$ w H.

■

U w a g a 1 (*porównanie z metodą Ritza*)

Niech (v_n) oznacza ciąg Ritza, zaś (u_n) ciąg otrzymany metodą najmniejszych kwadratów. Wówczas, ponieważ $F(u) = \|u - u_0\|_A^2 - \|u_0\|_A^2$, więc z konstrukcji ciągu Ritza wynika, że

$$\|v_n - u_0\|_A \leq \|u_n - u_0\|_A, \tag{14.22}$$

co oznacza, że ciąg Ritza jest „szybciej" zbieżny. Z drugiej strony metoda najmniejszych kwadratów pozwala prosto oszacować popełniony błąd, bowiem na mocy nierówności (14.9) prawdziwe jest oszacowanie $\|u_n - u_0\|_A \leq \frac{1}{C}\|Au_n - f\|$.

U w a g a 2

W przypadku, gdy wiadomo, że $u_0 \in D_A$ można rozważyć funkcjonał

$$\hat{F}(u) = F(u) + \|Au - f\|^2$$

i zastosować do niego metodę Ritza. Wówczas ciąg minimalizujący $\hat{F}$ spełnia dodatkowo warunek $\lim\limits_{n\to\infty} Au_n = f$ w H. Metoda ta nosi nazwę metody Couranta.

U w a g a 3

Do formalnego zastosowania metody najmniejszych kwadratów nie jest konieczne, żeby operator A był dodatnio określony. Problem jednoznaczności wyznaczenia współczynników b_k i zbieżności ciągu (u_n) ma odpowiedź pozytywną przy następujących założeniach:

1. A - liniowy, $\overline{D}_A = H$;
2. $(A\varphi_k)$ jest bazą w H;
3. Równanie $Au = f$ ma rozwiązanie $u_0 \in D_A$;
4. Istnieje stała $K > 0$ taka, że dla każdego $u \in D_A$ zachodzi nierówność $\|Au\| \geq K\|u\|$.

14.6 Metoda gradientów

Metoda ta dotyczy operatorów ograniczonych, dodatnio określonych na pewnym gęstym podzbiorze $D_A \subset H$ (nie nadaje się więc do operatorów różniczkowych).

Niech u_0 będzie rozwiązaniem uogólnionym równania $Au = f$ w H. Wówczas u_0 minimalizuje funkcjonał

$$F(u) = (Au, u) - 2(f, u).$$

Funkcjonał ten, jako funkcjonał ograniczony, określony na podzbiorze gęstym w H może być przedłużony na całą przestrzeń H z zachowaniem ograniczoności.

Niech u_1 będzie dowolnym elementem przestrzeni H. Załóżmy, że $Au_1 - f \neq 0$ (w przeciwnym razie $u_1 = u_0$ i procedura jest zakończona). Wówczas poszukujemy takiego elementu v_1, że

$$\|v_1\| = \|Au_1 - f\| \;\text{ i }\; \frac{d}{dt}F(u_1 + tv_1)_{|t=0} = \max_v \frac{d}{dt}F(u_1 + tv)_{|t=0}. \tag{14.23}$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} F(u_1 + tv_1) &= (A(u_1 + tv_1), u_1 + tv_1) - 2(f, u_1 + tv_1) = \\ &= F(u_1) + 2t(Au_1 - f, v_1) + t^2(Av_1, v_1), \end{aligned}$$

zatem

$$\frac{d}{dt}F(u_1 + tv_1)_{|t=0} = 2(Au_1 - f, v_1).$$

Wyrażenie to osiąga wartość największą gdy $v_1 = Au_1 - f$. Dla wyznaczonego v_1 wyrażenie $F(u_1 + tv_1)$ osiąga wartość najmniejszą gdy

$$t = t_1 = -\frac{(Au_1 - f, v_1)}{(Av_1, v_1)} = -\frac{(v_1, v_1)}{(Av_1, v_1)}. \tag{14.24}$$

Niech teraz $u_2 = u_1 + t_1 v_1$. Powtarzamy powyższe rozumowanie dla elementu wyjściowego u_2 i otrzymujemy

$$v_2 = Au_2 - f, \;\; t_2 = -\frac{(v_2, v_2)}{(Av_2, v_2)}, \;\; u_3 = u_2 + t_2 v_2.$$

W ten sam sposób można skonstruować rekurencyjnie kolejne elementy ciągu u_n takie, że

$$v_n = Au_n - f, \;\; t_n = -\frac{(v_n, v_n)}{(Av_n, v_n)}, \;\; u_{n+1} = u_n + t_n v_n. \tag{14.25}$$

T w i e r d z e n i e
Jeśli istnieją takie stałe dodatnie m i M, że dla każdego $u \in H$ spełniona jest nierówność

$$m\|u\|^2 \leq (Au, u) \leq M\|u\|^2,$$

to otrzymany powyżej ciąg (u_n) zbiega do rozwiązania uogólnionego u_0 równania $Au = f$ w H_A (więc i w H), przy czym zachodzi nierówność

$$\|u_{n+1} - u_0\|_A \leq \|u_1 - u_0\|_A \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^n \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$

∎

14.7 Zadania

1. Rozważyć operator $Au = (EIu'')''$ odpowiadający równaniu ugięcia pręta (13.40) z przykładu z wykładu „Elementy rachunku wariacyjnego" - nr 13. Napisać dla tego operatora układ równań (14.18) występujący w metodzie Galerkina oraz układ równań (14.13) występujący w metodzie Ritza. Pokazać, ze układy te są identyczne.

2. Niech $H = L^2(0; \pi)$. Rozważmy równanie całkowe

$$(Au)(x) = u(x) - 0{,}1 \int_0^\pi \sin(x + s)\, u(s)\, ds = h(x), \quad \text{gdzie } h \in L^2(0; \pi).$$

   Do operatora A zastosować metodę gradientów i wyznaczyć przybliżenie u_2 rozwiązania. Wyznaczyć również rozwiązanie dokładne równania.