

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 1

1. Oblicz pochodne cząstkowe funkcji:

a) $f(x, y) = x \cdot \sin \frac{y}{x}$

b) $f(x, y) = e^{\frac{y}{1+x^2}}$

c) $f(x, y, z) = z \cdot \cos \frac{x+y}{z}$

2. Oblicz pochodne cząstkowe rzędu drugiego funkcji:

$$f(x, y, z) = xy^2 + xe^z$$

3. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x, y) = (x + y^2) \cdot e^{\frac{x}{3}}$

b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x + 2z$

4. Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji:

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 2x - 3y + 1$$

w obszarze domkniętym

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 2

1. Rozwiązać równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

a) $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$

b) $y' \cos x = \frac{y}{\ln y} \sin x$

c) $\frac{yy'}{x} + e^y = 0$

2. Rozwiązać jednorodne równania różniczkowe:

a) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$

b) $y' = \frac{y^2}{xy - x^2}$

c) $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2$

3. Rozwiązać równania różniczkowe:

a) $y' = 2x + y + 3$

b) $y' = (2y + 6x + 1)^2$

c) $y' = \cos^2(x - y)$

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 3

1. Rozwiązać liniowe równania różniczkowe:

a) $y' + y = e^{-x}$

b) $y' - 2yx = x - x^3$

c) $y' - 3y = e^{3x}$, $y(0) = 1$.

2. Znaleźć ogólne rozwiązanie równania różniczkowego drugiego rzędu

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

znając jego rozwiązanie szczególne $y_1(x) = \frac{\sin x}{x}$.

3. Metodą uzmiennienia stałych rozwiązać równania:

a) $y'' + 5y' + 6y = x + 1$

b) $y'' + y = x$ z warunkami $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

4. Metodą przewidywań rozwiązać równania:

a) $y'' - 4y' + 3y = e^{5x}$

b) $y'' + 4y = 1 + \sin 2x$ z warunkami $y(0) = \frac{3}{4}$, $y'(0) = \frac{7}{4}$.

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 4

1. Zmienić kolejność całkowania:

a) $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy,$

b) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy,$

c) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$

2. Obliczyć całkę $\iint_S x \, dx dy$, gdzie S jest trójkątem o wierzchołkach $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$.

3. Obliczyć pole obszaru D określonego granicami całkowania z przykładu 1c.

4. Oblicz całki:

a) $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy,$ gdzie $D : x^2 + y^2 \leq a^2,$

b) $\iint_D x \, dx dy,$ gdzie $D : x^2 + y^2 \leq 2x.$

Wskazówka: W obu przykładach zastosuj zmienne biegunowe.

5. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = 2x^2 + y^2 + 1$, $x + y = 1$ oraz płaszczyznami układu współrzędnych.

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 5

1. Oblicz całkę potrójną:

$$\iiint_V x^3 y^2 z \, dx dy dz, \quad \text{gdzie } V : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy$$

2. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$.

Wskazówka: Zastosuj zmienne cylindryczne.

3. Sprawdzić potencjalność całkowanego pola wektorowego i obliczyć całkę

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy.$$

4. Sprawdzić twierdzenie Greena na przykładzie

$$\oint_K (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy,$$

gdzie $K = K_1 \cup K_2$, przy czym K_1 - odcinek prostej od $(0,0)$ do $(1,1)$, a K_2 - łuk paraboli $y = x^2$ od $(1,1)$ do $(0,0)$. (Porównać wyniki obliczenia powyższej całki z i bez zastosowania tw. Greena)

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 6

1. Oblicz skierowane całki krzywoliniowe:

b) $\int_K ydx + xdy$, gdzie K łuk okręgu o środku w $(0,0)$ i promieniu R od $(0, R)$ do $(-R, 0)$,

c) $\int_K xdx + ydy + (x + y + 1)dz$, gdzie K odcinek prostej od $(1, 1, 1)$ do $(2, 3, 4)$.

2. Sprawdzić potencjalność całkowanego pola wektorowego i obliczyć całkę krzywoliniową $\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} xdx + y^2dy + zdz$

3. Oblicz nieskierowaną całkę krzywoliniową: $\int_L (x + y)dl$, gdzie L jest obwodem trójkąta o wierzchołkach $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

4. Obliczyć strumień pola wektorowego $[x, y, 0]$ przez powierzchnię sfery $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, w kierunku normalnej zewnętrznej. Wynik otrzymany w rezultacie obliczenia (niezorientowanej) całki powierzchniowej porównać z wynikiem otrzymanym z pomocą twierdzenia Gaussa. (Odp. $\frac{8}{3}\pi a^3$)

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 7

1. Sprawdzić holomorficzność funkcji zespolonej
 $f(z) = z^3 + z^2 + 1$.
2. Znaleźć wszystkie funkcje holomorficzne $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ takie, że $u(x, y) = 6x^2y - 2y^3$, $f(0) = 0$.
3. Obliczyć całkę $\int_K z^2 dz$, gdzie $K : z(t) = t + j t$, $t \in < 0, 1 >$.
4. Sprawdzić tw. Cauchy'ego na przykładzie $\int_K \frac{dz}{z}$, gdzie K - dodatnio zorientowany brzeg kwadratu o wierzchołkach $z_1 = 2 - j$, $z_2 = 4 - j$, $z_3 = 4 + j$, $z_4 = 2 + j$.
5. Sprawdzić wzór całkowy Cauchy'ego na przykładzie $\int_K \frac{dz}{z}$, gdzie K - dodatnio zorientowany brzeg kwadratu o wierzchołkach $z_1 = 1$, $z_2 = j$, $z_3 = -1$, $z_4 = -j$.

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 8

1. Stosując wzór całkowy Cauchy'ego obliczyć całki:

a) $\int_K \frac{e^{jz} dz}{z+1}$, gdzie $K : |z+j| = 5$ okrąg zorientowany dodatnio,

b) $\int_K \frac{e^{jz} dz}{z^2+4}$, gdzie $K : |z+j| = 2$ okrąg zorientowany dodatnio. dodatnio.

2. Wyznaczyć punkty osobliwe i określić typ osobliwości:

a) $\frac{z}{(z^2-1)(z^2-4)^3}$, b) $\frac{z}{\sin z}$, c) $\frac{\sin z}{z^2}$, d) $e^{\frac{1}{(1-z)^2}}$.

3. Wyznaczyć residua funkcji w podanym punkcie:

a) $\text{res}_{z=\pm j} \frac{z+1}{z^2+1}$,

b) $\text{res}_{z=0} \frac{z+1}{(1-z)z^2}$.

4. Obliczyć całki:

a) $\oint_{K(0,2)} \frac{z^3 dz}{z^4-1}$,

b) $\oint_{K(0,2)} \frac{e^z dz}{z^2(z^2+1)}$,

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 9

1. Funkcję $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $< -2\pi, 2\pi >$.

2. Funkcję $f(x) = |x|$ rozwinąć w szereg Fouriera w przedziale $< -1, 1 >$.

3. Funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in (-\pi, 0) \\ 2 & \text{dla } x \in (0, \pi) \end{cases}$$

rozwinąć w szereg Fouriera. Sporządzić wykres przedłużenia funkcji na przedział $< -\pi, \pi >$ spełniającego warunki Dirichleta.

4. Funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ x & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

rozwinąć w szereg trygonometryczny Fouriera w przedziale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

5. Funkcję f daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{dla } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}$$

rozwinąć w szereg trygonometryczny:

a) samych sinusów b) samych cosinusów.

Narysować wykres odpowiedniego przedłużenia funkcji.

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 10

1. Obliczyć transformatę Laplace'a dla funkcji:

- a) $\sin^2 t$ b) $t + e^{-t} \sin 2t$ c) $te^{-t} \sin t$ d) $t \cosh t$
e) $e^t * t$ f) $\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - t_0)$ g) $t^2 \sin 4t$.

2. Wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a dla funkcji:

- a) $\frac{1}{s^2(s^2-a^2)}$ b) $\frac{s}{s^2+1}$ c) $\frac{1}{s^2(s^2+1)}$ d) $\frac{s^3-s^2-2}{s(s-1)(s^2+1)}$

3. Rozwiązać równanie różniczkowe $y'' - y' = e^t$ z warunkami początkowymi $y(0) = y'(0) = 0$.

ZADANIA Z MATEMATYKI Zestaw 11

1. Stosując transformatę Laplace'a, rozwiązać równanie różniczkowe $y'' - 2y' - 3y = e^{3t}$ z warunkami początkowymi $y(0) = y'(0) = 0$.
2. Obliczyć splot funkcji dwoma sposobami (tzn. bezpośrednio z definicji oraz stosując transformatę Laplace'a):
a) $t^2 * e^t$ b) $e^t * (1 - t)$.
3. Korzystając z twierdzenia o transformacji splotu, rozwiązać równanie $f(t) = \sin t + \int_0^t (t - u)f(u)du$.