

Zadanko 1. W wierzchołkach A, B, C trójkąta równobocznego mieszkają zwierzaki. W wierzchołku A - trzech, w B - czterech, w C - siedmiu. Gdzie w trójkącie powinni ustalić spotkanie, by przebyta przez nich wszystkich droga była jak najmniejsza?

Podpowiedź: Skorzystaj z nierówności trójkąta.

Zadanko 2. W wierzchołkach A, B, C, D kwadratu mieszkają zwierzaki. W wierzchołku A - trzech, w B - czterech, w C - siedmiu, w D - piętnastu. Gdzie w kwadracie powinni ustalić spotkanie, by przebyta przez nich wszystkich droga była jak najmniejsza?

Podpowiedź: Skorzystaj z nierówności trójkąta.

Twierdzenie 1. Niech a_1, a_2, \dots, a_n będą dodatnimi liczbami oraz niech $K_n = \sqrt[n]{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$, $A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$, $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$. Zachodzi wtedy tzw. nierówność między średnimi:

$$K_n \geq A_n \geq G_n \geq H_n$$

oraz równości w powyższych nierównościach zachodzą wtedy i tylko wtedy kiedy $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Zadanko 3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$.

Zadanko 4. Niech a, b, c będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

Zadanko 5. Udowodnij, że dla dodatniej liczby rzeczywistej t zachodzi $t + \frac{1}{t} \geq 2$.

Zadanko 6. Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b zachodzi $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 8$.

Zadanie z kursu maturalnego prowadzonego przez Koło Naukowe Matematyków z Wydziału MiNI PW.

Zadanko 7. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$.

Zadanko 8. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x^3 + \frac{1}{x^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$.

Zadanko 9. Znajdź najmniejszą wartość funkcji $f(x) = x + x^3 + \frac{2}{x^2}$, gdzie $x \in \mathbb{R}_+$.

Zadanko 10. Liczbę 10 rozłóż na sumę dwóch dodatnich składników, dla których suma ich kwadratów jest najmniejsza.

Zadanko 11. Liczbę 2020 rozłóż na sumę czterech dodatnich składników, dla których suma ich kwadratów jest najmniejsza.

Zadanko 12. Rozwiąż problem izoperymetryczny wśród prostokątów. Mianowicie, uzasadnij, że wśród wszystkich prostokątów o ustalonym obwodzie $2p$ największe pole na kwadrat.

Zadanko 13. Rozwiąż problem izoperymetryczny wśród trójkątów. Mianowicie, uzasadnij, że wśród wszystkich trójkątów o ustalonym obwodzie $2p$ największe pole na trójkąt równoboczny.

Wskazówka: Skorzystaj ze wzoru Herona oraz z nierówności między średnimi.

Zadanko 14. Producent wytwarza aluminiowe kubki w kształcie walca o objętości 8 cali sześciennych. Znajdź wymiary kubka, do którego produkcji potrzeba najmniejszej możliwej ilości materiału.

Zadanko 15. Udowodnij, że jeżeli dodatnie liczby rzeczywiste a_1, a_2, \dots, a_n spełniają

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1, \quad \text{to} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n^2.$$

Twierdzenie 2 (Nierówność Cauchy'ego Schwarz). Dla dowolnych liczb rzeczywistych a_1, a_2, \dots, a_n zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Ponadto, równość w powyższej nierówności zachodzi jeżeli ciągi (a_1, a_2, \dots, a_n) oraz (b_1, b_2, \dots, b_n) są proporcjonalne.

Zadanko 16. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$.

Zadanko 17 (Nierówność Nesbitta). Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Wskazówka: Dodaj stronami 3 i lewą stronę nierówności zapisz w postaci $(a+b+c) \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right)$. Następnie podstaw $x = \sqrt{b+c}, y = \sqrt{c+a}, z = \sqrt{a+b}$.

Zadanko 18. Udowodnij, że dla dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 9a^2b^2c^2.$$

Zadanko 19. Niech W będzie wielomianem o dodatnich współczynnikach. Udowodnij, że jeżeli nierówność

$$W\left(\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{W(x)}$$

jest spełniona dla $x = 1$, to jest spełniona dla dowolnej liczby $x > 0$.

Zadanko 20. Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że zbiorem wartości funkcji

$$f(x) = a \cos x + b \sin x$$

jest przedział $\left[-\sqrt{a^2 + b^2}, \sqrt{a^2 + b^2}\right]$.

Twierdzenie 3 (Nierówność Jensena). Niech funkcja f będzie wypukła na przedziale $[a, b]$. Wtedy dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n \in [a, b]$ zachodzi nierówność:

$$f\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right) \leq \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n}.$$

Zadanko 21. Niech α, β, γ będą kątami wewnętrznymi w trójkącie. Udowodnij, że

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Zadanko 22. Zapisz jaką nierówność wynika z zastosowania nierówności Jensena dla funkcji wypukłej $f(x) = x^n$ dla $x > 0$.

Zadanko 23. Narysuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$. Udowodnij, że jeżeli nieujemne liczby rzeczywiste x, y, z spełniają warunek $x + y + z = 1$, to zachodzi

$$\frac{2x+1}{x+1} + \frac{2y+1}{y+1} + \frac{2z+1}{z+1} \leq \frac{15}{4}.$$