Tytuł: Częściowa regularność jednowymiarowego modelu wzrostu powierzchni.
Data: 16 listopada 2017,
Abstrakt: Rozpatrujemy jednowymiarowy model wzrostu powierzchni (MWP),

$$\partial_t u = -u_{xxxx} - \partial_{xx} (u_x)^2$$

na torusie $\mathbb{T}$. Teoria rozwiązań tego rownania posiada zaskakująco dużo podobieństw z teorią trójwymiarowych, nieściśliwych równań Naviera-Stokesa, jak np. kwestie istnienia i jednoznaczności rozwiązań, słabą-mocną jednoznaczność i lokalne (w czasie) istnienie rozwiązań dla danych początkowych z przestrzeni krytycznych.

Podobnie jak w przypadku równań Naviera-Stokesa, kwestia istnienia globalnych (w czasie) rozwiązań silnych pozostaje nierozstrzygnięta. Ponadto, jeśli rozwiązanie MWP wybucha w skończonym czasie T, to istnieją ograniczenia dolne na tempo wybuchu gdy $t \to T^-$ (blow-up rates) oraz zbiór wszystkich czasów osobliwych $\mathcal{T}$ rozwiązania słabego ma wymiar ograniczony przez $1/4$, tj. zarówno $d_B(\mathcal{T}) \leqslant 1/4$ oraz $d_H(\mathcal{T}) \leqslant 1/4$, gdzie d_B oznacza wymiar pudełkowy (*box-counting dimension*) a d_H oznacza wymiar Hausdorffa.

Do niedawna nie było wiadomo, czy istnieje teoria częściowej regularności dla MWP, która w przypadku równań Naviera-Stokesa była wprowadzona w 1982 roku przez Caffarelliego, Kohna i Nirenberga. Ta teoria pozwala badać regularność (odpowiednich) słabych rozwiązań u lokalnie w czasoprzestrzeni. W szczególności, korzystając z tej teorii można pokazać, że wymiar czasoprzestrzenny zbioru osobliwego S (tj. $(x,t) \in S$ jeśli u jest nieograniczone w dowolnym otoczeniu (x,t)) jest ograniczony z góry,

$$d_B(S) \leqslant 5/3 \quad \text{oraz} \quad d_H(S) \leqslant 1.$$

Podczas referatu omówimy nowopowstałą teorię częściowej regularności dla MWP. Kluczowym elementem dowodu tej teorii jest pewna paraboliczna nierowność Poincarégo,

$$\frac{1}{r^5} \int_{Q_{r/2}} |u - u_{r/2}|^3 \leqslant C(M + M^2),$$

gdzie Q_r oznacza cylinder paraboliczny o promieniu r, $u_{r/2}$ oznacza średnią u na zbiorze $Q_{r/2}$ i

$$M = \frac{1}{r^2} \int_{Q_r} |u_x|^3.$$

(Zauważmy, że prawa strona nie zawiera pochodnej po czasie.) Korzystając z tej teorii można pokazać, że dla zbioru osobliwego S słabych rozwiązań MWP zachodzą ograniczenia

$$d_B(S) \leqslant 7/6 \quad \text{oraz} \quad d_H(S) \leqslant 1,$$

lepsze niż w przypadku równań Naviera-Stokesa (wynik uzyskany wspólnie z Jamesem Robinsonem).

Wojciech Ożański, Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry CV4 7AL, UK.
E-mail address: `W.S.Ozanski@warwick.ac.uk`