

Ciągła zależność rozwiązań parabolicznych równań różniczkowych cząstkowych ze zmiennym opóźnieniem w zależności od parametrów, warunku początkowego i opóźnienia

Marek Kryspin

promotor: prof. dr hab. J. Mierczyński

Politechnika Wrocławska

17 listopada 2022

Spis rzeczy I

1 Wstęp

- Równanie ze zmiennym opóźnieniem (przykład)
- Równanie ze zmiennym opóźnieniem (ogólna postać)
- Warunek brzegowy i początkowy

2 Założenia i przestrzeń parametrów

- Założenia
- Przestrzeń parametrów oraz jej topologia

3 Rozwiązania Mild

- Słabe rozwiązania
- Rozwiązania typu Mild

4 Aktualne wyniki

- Ciągła zależność od warunku początkowego
- Ciągła zależność od parametrów
- Łączna ciągłość

Równanie ze zmiennym opóźnieniem

Przykładem równania różniczkowego cząstkowego typu parabolicznego ze zmiennym opóźnieniem jest *zaburzone* równanie ciepła

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \Delta u(t, x) + c_1(t, x)u(t - R(t), x) & t \in [0, T], x \in D \\ u(t, x) = 0 & t \in [0, T], x \in \partial D, \end{cases} \quad (1)$$

gdzie $D \subset \mathbb{R}^N$ jest ograniczony, a ∂D (brzeg D) Lipschitzowski. Laplasjan Δ jest liczony po zmiennych x , a $T > 0$. Funkcję $c_1 \in L_\infty((0, T) \times D)$ nazywamy parametrem. Opóźnieniem jest funkcja $R : [0, T] \rightarrow [0, 1]$.

Uwaga

Równania takie znajdują zastosowanie w ekologii matematycznej. Ich własności badane są w pracach: [1], [2], [3], [4].

Główne wyniki

Twierdzenie (MK & JM 2022 [5])

Niech $c_1 \in L_\infty((0, T) \times D)$, $u_0 \in C([-1, 0], L_p(D))$ ($1 < p < \infty$), $R \in L_\infty((0, T))$ przy czym $R(t) \in [0, 1]$ dla λ -p.w. $t \in (0, T)$. Istnieje jedyne rozwiązanie (typu mild) $u(\cdot; c_1, u_0, R) \in C([-1, T])$ równania (1) spełniające warunek początkowy $u(t; c_1, u_0, R) = u_0$, $t \in [-1, 0]$.

Główne wyniki

Twierdzenie (MK & JM 2022 [5])

Założmy, że $(c_{1,m})_{m=1}^{\infty}$, $(u_{0,m})_{m=1}^{\infty}$ oraz $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ są ciągami takimi, że:

- $c_{1,m}$ zbiega w *-słabej topologii do $c_1 \in L_{\infty}((0, T) \times D)$,
- $u_{0,m}$ zbiega w topologii normowej $C([-1, 0], L_p(D))$ do u_0 ,
- R_m zbiega dla λ -p.w. $t \in (0, T)$ do R .

Wtedy

$$u(\cdot; c_{1,m}, u_{0,m}, R_m) \rightarrow u(\cdot; c_1, u_0, R)$$

w normie $C([-1, T], L_p(D))$.

Równanie ze zmiennym opóźnieniem

Ogólną postacią równania różniczkowego cząstkowego z opóźnieniem jest:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(t, x)u \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N b_i(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c_0(t, x)u \\ &+ c_1(t, x)u(t - R(t)); \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in D, \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie $a_{ij}, a_i, b_i, c_0, c_1 \in L_\infty((0, T) \times D)$. Ze względu na konwencję, iż funkcja u ma wartości w pewnym $L_p(D)$, pochodne rozumiane są tu w pewnym słabym sensie.

Warunek brzegowy

Równanie (2) rozważa się wraz z warunkiem brzegowym

$$\mathcal{B}u = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \partial D \quad (3)$$

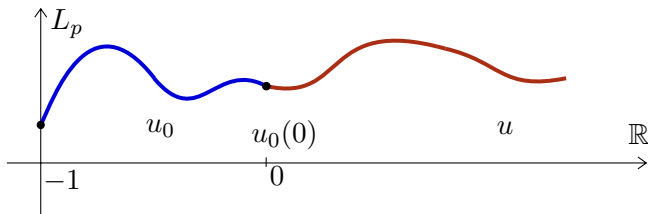
gdzie operator \mathcal{B} jest postaci:

$$\mathcal{B}u =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u & \text{(Dirichlet)} \\ \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(t, x)u \right) \nu_i & \text{(Neumann)} \\ \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{ij}(t, x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(t, x)u \right) \nu_i + d_0(t, x)u & \text{(Robin)}. \end{array} \right.$$

Warunek początkowy

Równanie (2) rozważa się wraz z warunkiem początkowym. Ze względu na opóźnienie, $u_0 \in C([-1, 0], L_p(D))$



Rysunek: Warunek początkowy $u_0 \in C([-1, 0], L_p(D))$ oraz dalsza ewolucja u .

Możliwe jest rozważanie mniej regularnych warunków początkowych w zależności od dodatkowych założeń na funkcję R . Przykładowo, jeśli $R \equiv 1$ można przyjąć $u_0 \in L_p(D) \oplus L_r((-1, 0), L_p(D))$.

Założenia

Przyjmujemy, że:

- parametry równania (2) są $(\mathcal{L}((0, T) \times D), \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ -mierzalne oraz istotnie ograniczone,
- funkcja $R \in L_\infty((0, T))$ oraz dla λ -p.w. $t \in (0, T) : R(t) \in [0, 1]$,
- istnieje stała $\alpha_0 > 0$ taka, że dla λ -p.w. $(t, x) \in (0, T) \times D$ oraz wszystkich $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq \alpha_0 \sum_{i=1}^N \xi_i^2.$$

Oraz a_{ij} jest symetryczne względem i, j .

Przestrzeń parametrów oraz jej topologia

Przyjmujemy, że przestrzeń współczynników Y to domknięty i normowo ograniczony podzbiór przestrzeni

$$\begin{aligned} & (L_1((0, T)) \times D, \mathbb{R}^{N^2+2N+2}) \oplus L_1((0, T) \times \partial D, \mathbb{R})^* \\ & \cong L_\infty((0, T) \times D, \mathbb{R}^{N^2+2N+2}) \oplus L_\infty((0, T) \times \partial D, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

z $*$ -słabą topologią podprzestrzeni L_1^* . Elementy Y oznaczamy

$$a := \left((a_{ij})_{i,j=1}^N, (a_i)_{i=1}^N, (b_i)_{i=1}^N, c_0, c_1, d_0 \right).$$

Podobnie wprowadza się przestrzeń opóźnień \mathcal{R} , również z $*$ -słabą topologią:

$$\mathcal{R} := \{R \in L_\infty((0, T)) : R(t) \in [0, 1] \text{ dla } \lambda\text{-p.w. } t \in (0, T)\}.$$

*-słaba zwartość Y oraz \mathcal{R}

- Przestrzeń Y jest *-słabo zwarta na mocy twierdzenia Banacha-Alaoglu.
- Podobnie \mathcal{R} okazuje się normowo ograniczonym wypukłym *-słabo domkniętym podzbiorem $L_\infty((0, T))$ przez co jest też *-słabo zwarte na mocy twierdzenia Banacha-Alaoglu.
- Przestrzeń Y z *-słabą topologią jest metryzowalna podobnie \mathcal{R} .

\mathcal{R}_0

Czasem zakładać będziemy, że ciąg $(R_m)_{m=1}^{\infty}$ pochodzi z $\mathcal{R}_0 \subset \mathcal{R}$. A \mathcal{R}_0 ma następującą własność: jeśli $R \in \mathcal{R}_0$ jest *-słabą granicą ciągu $(R_m)_{m=1}^{\infty} \subset \mathcal{R}_0$ to R_m dąży do R punktowo λ -p.w.

Uwaga

Warto zauważyć, że powyższa własność \mathcal{R}_0 jest naturalnie spełniona, gdy \mathcal{R}_0 jest normowo zwartym podzbiorem \mathcal{R} . Jest to wniosek z faktu, iż topologie Hausdorffa (T_2) (tu *-słaba) słabsze od topologii normowej są równe na zwartych podzbiórach.

W dalszej części prezentacji będziemy zakładać, że \mathcal{R}_0 posiada powyżej opisaną własność. Założenie to nazwijmy DA6.

Twierdzenie (Kuratowski)

Niech X to zbiór z dwiema topologiami \mathcal{O}_{T_2} oraz \mathcal{O}_c takimi, że

- (i) $\mathcal{O}_{T_2} \subset \mathcal{O}_c$,
- (ii) (X, \mathcal{O}_{T_2}) jest T_2 ,
- (iii) (X, \mathcal{O}_c) jest zwarta

wtedy $\mathcal{O}_{T_2} = \mathcal{O}_c$.

Dowód.

Niech $\text{Id} : (X, \mathcal{O}_c) \rightarrow (X, \mathcal{O}_{T_2})$ to funkcja identycznościowa. Z (i) wynika, że Id jest ciągła. Ustalmy $F^c \in \mathcal{O}_c$. Wtedy F jako domknięty podzbiór przestrzeni zwartej jest zwarty. Zatem $\text{Id}[F] = F$ jest zwarty w \mathcal{O}_{T_2} ale dzięki własności T_2 zbiór F jest domknięty w \mathcal{O}_{T_2} . Zatem $F^c \in \mathcal{O}_{T_2}$ więc $\mathcal{O}_c \subset \mathcal{O}_{T_2}$. \square

Słabe rozwiązania

Aby zdefiniować rozwiązanie Mild na początku wprowadzane są słabe rozwiązania (definiowane jako funkcje spełniające pewne równanie całkowe) równania (2), gdzie $c_1 = 0$ (innymi słowy nie ma członu z opóźnieniem). Okazuje się, że istnieje operator $U_a(t, 0) \in \mathcal{L}(L_p(D))$ taki, że jedyne rozwiązanie zapisuje się

$$u(t) = U_a(t, 0)u_0(0), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Operator $U_a(t, 0)$ jest operatorem całkowym z λ -p.w. nieujemnym jądrem całkowym [6], [7], [8].

Uwaga

Warto zauważyć tu podobieństwo słabych rozwiązań do rozwiązania równania ciepła danego przez splot z jądrem ciepła lub podobieństwo do macierzy fundamentalnej.

Własności operatora $U_a(t, s)$

- Dla każdego $a \in Y$, $(s, t) \in \dot{\Delta}$ oraz $1 \leq p \leq q \leq \infty$ zachodzi $U_a(t, 0) \in \mathcal{L}(L_p(D), L_q(D))$.
- Istnieją stałe $M \geq 1$ oraz $\gamma \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\|U_a(t, s)\|_{\mathcal{L}(L_p(D), L_q(D))} \leq M(t-s)^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} e^{\gamma(t-s)}$$

dla $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $a \in Y$ i $(s, t) \in \dot{\Delta}$.

■

$$U_a(s, s) = \text{Id}_{L_p(D)}, \quad a \in Y, \quad s \in [0, T],$$

$$U_a(t_2, t_1) \circ U_a(t_1, s) = U_a(t_2, s), \quad a \in Y, \quad 0 \leq s \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

Przy czym $\dot{\Delta} := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s < t \leq T\}$.

Własności operatora $U_a(t, s)$

Twierdzenie (Ladyženskaja, Solonnikov & Ural'ceva [9])

Niech $1 \leq p \leq \infty$, $0 \leq s < T$. Wtedy dla dowolnego $T_1 \in (s, T]$ istnieje $\alpha \in (0, 1)$ taka, że dla każdego $a \in Y$, $u_0 \in L_p(D)$, oraz zwartego $D_0 \subset D$ funkcja $[[T_1, T] \times D_0 \ni (t, x) \mapsto (U_a(t)u_0)[x]]$ należy do $C^{\alpha/2, \alpha}([T_1, T] \times D_0)$. Przy ustalonym T_1 , oraz D_0 , norma $C^{\alpha/2, \alpha}([T_1, T] \times D_0)$ jest ograniczona przez stałą zależną od $\|u_0\|_{L_p(D)}$.

Twierdzenie [3], [5]

Dla każdego $(s, T_1) \in \dot{\Delta}$, $1 \leq p < \infty$ i ograniczonego $E \subset L_p(D)$ zbiór

$$\{ [[T_1, T] \ni t \mapsto U_a(t, s)u_0 \in L_p(D)] : a \in Y, u_0 \in E \}$$

jest przwarty w $C([T_1, T], L_p(D))$.

Rozwiązania typu Mild

Rozwiązania typu Mild definiuje się w duchu Zasady Duhamela (Variation of constants) [10, p. 129], [3]. Mianowicie funkcję $u \in C([-1, T], L_p(D))$ nazwiemy rozwiązaniem Mild równania (2), gdy:

$$u(t) = u_0(t), \quad \text{dla } t \in [-1, 0]$$

oraz

$$u(t) = U_a(t, 0)u_0(0) + \int_0^t U_a(t, \zeta)(c_1(\zeta, \cdot)u(\zeta - R(\zeta))) d\zeta, \quad \text{dla } t \in [0, T].$$

Rozwiązania typu Mild

Abstrakcyjnie rozwiązania Mild są punktami stałymi operatora:

$$\mathfrak{G}_{a,u_0,R} : C([0, T], L_p(D)) \rightarrow C([0, T], L_p(D))$$

danego wzorem

$$(\mathfrak{G}_{a,u_0,R}u)[t] := U_a(t, 0)u_0(0) + \int_0^t U_a(t, \zeta)(c_1(\zeta, \cdot)u(\zeta - R(\zeta))) d\zeta.$$

Uwaga

Dalsze rozważania dotyczyć będą głównych wyników z ostatnich miesięcy. Jednak wyniki te opierają się na wcześniejszych dowodach, iż operator $\mathfrak{G}_{a,u_0,R}$ ma jednoznaczny punkt stały. To natomiast wynika z faktu istnienia liczby $\Theta > 0$ dla której $\mathfrak{G}_{a,u_0,R}$ jest kontrakcją na $C([0, \Theta], L_p(D))$.

Szkic dowodu

$$\begin{aligned}
& \|(\mathfrak{G}u)[t] - (\mathfrak{G}v)[t]\|_{L_p(D)} \leq \\
& \leq \int_s^t \|U_a(t, \zeta) C_a^1(\zeta) (u(\zeta - R(\zeta)) - v(\zeta - R(\zeta)))\|_{L_p(D)} d\zeta \\
& \leq M K e^{\gamma t} \int_s^t \|u(\zeta - R(\zeta)) - v(\zeta - R(\zeta))\|_{L_p(D)} d\zeta \\
& \leq M K e^{\gamma t} \int_s^t \sup_{s \leq \xi \leq t} \|u(\xi - R(\xi)) - v(\xi - R(\xi))\|_{L_p(D)} d\zeta \\
& \leq M K e^{\gamma t} \int_s^t \sup_{s-1 \leq \xi \leq t} \|u(\xi) - v(\xi)\|_{L_p(D)} d\zeta \\
& = M K e^{\gamma t} \int_s^t \sup_{s \leq \xi \leq t} \|u(\xi) - v(\xi)\|_{L_p(D)} d\zeta \\
& \leq M K e^{\gamma T} \Theta \|u - v\|_{C([s, s+\Theta], L_p(D))}.
\end{aligned}$$

Ciągła zależność rozwiązań Mild od warunku początkowego

Twierdzenie (MK & JM 2022 [5])

Dla dowolnych $a \in Y$, $R \in \mathcal{R}$ odwzorowanie

$$[C([-1, 0], L_p(D)) \ni u_0 \mapsto u(\cdot; a, u_0, R)|_{[0, T]} \in C([0, T], L_p(D))]$$

jest ciągle.

Szkic dowodu

Dla $t \in [0, T]$, $a \in Y$, $R \in \mathcal{R}$ oraz warunku początkowego u_0 zdefiniujemy normę δ następującym wzorem:

$$\begin{aligned}\delta(t; a, u_0, R) &= \sup_{\vartheta \in [-1, 0]} \|u(t + \vartheta; a, u_0, R)\|_{L_p(D)} \\ &= \|u(t + \cdot; a, u_0, R) \upharpoonright_{[-1, 0]}\|_{C([-1, 0], L_p(D))}.\end{aligned}$$

Szkic dowodu

Można wykazać, że istnieją stałe M_1 oraz M_2 takie, że

$$\|u(\rho; a, u_0, R)\|_{L_p(D)} \leq M_1 \delta(0; a, u_0, R) + M_2 \int_0^\rho \delta(\zeta; a, u_0, R) d\zeta$$

dla $\rho \in [0, T]$, $a \in Y$, $R \in \mathcal{R}$ oraz u_0 . Następnie biorąc sup po ρ stronami otrzymujemy:

$$\delta(t) \leq M_1 \delta(0) + M_2 \int_0^t \delta(\zeta) d\zeta$$

co z lematu Grönwalla pozwala zapisać

$$\delta(t) \leq M_1 \delta(0) \exp\left(M_2 \int_0^t d\zeta\right).$$

Szkic dowodu

Wnioski z powyższych obserwacji są następujące:

- istnieje jednostajna stała \overline{M} dla której

$$\|u(t; a, u_0, R)\|_{L_p(D)} \leq \overline{M} \|u_0\|_{C([-1,0], L_p(D))}.$$

- jako, że równanie jest liniowe to

$$\begin{aligned} \|u(\cdot; a, u_{0,1}, R) - u(\cdot; a, u_{0,2}, R)\|_{C([-1,T], L_p(D))} \\ \leq \overline{M} \|u_{0,1} - u_{0,2}\|_{C([-1,0], L_p(D))}. \end{aligned}$$

Ciągła zależność rozwiązań Mild od parametrów

Twierdzenie (MK & JM 2022 [5])

Dla dowolnego $0 < T_1 \leq T$, $u_0 \in C([-1, 0], L_p(D))$ oraz $R \in \mathcal{R}$ odwzorowanie

$$[Y \ni a \mapsto u(\cdot; a, u_0, R)|_{[T_1, T]} \in C([T_1, T], L_p(D))]$$

jest ciągle.

Szkic dowodu

W dowodzie kluczowe obserwacje opierają się o fakty:

Fakt

Niech X, Y to przestrzenie metryczne, $u : X \rightarrow Y$, $a \in X$. Jeśli dla każdego ciągu a_n zbieżnego do a istnieje podciąg a_{n_k} na którym $u(a_{n_k}) \rightarrow u(a)$ to u jest ciągła w a .

Twierdzenie (MK & JM 2022 [5])

Dla każdego $0 < T_1 \leq T$, $1 < p < \infty$ oraz ograniczonego podzbioru $E \subset C([-1, 0], L_p(D))$ zbiór

$$\{ [[T_1, T] \ni t \mapsto u(t; a, u_0, R)] : a \in Y, u_0 \in E, R \in \mathcal{R} \}$$

jest prezwarty w $C([T_1, T], L_p(D))$.

Szkic dowodu

Ustalmy p , T_1 , R i u_0 takie jak w twierdzeniu oraz $(a_m)_{m=1}^\infty \subset Y$ zbieżny do a . Wystarczy pokazać, że istnieje podciąg $(a_{m_k})_{k=1}^\infty \subset Y$ na którym $u_{m_k}(\cdot)$ zbiega jednostajnie do $u(\cdot)$ na $[T_1, T]$. Z przwartości rozwiązań wynika, że ciąg $u_m(\cdot) = u(\cdot; a_m, u_0, R)$ ma podciąg zbieżny taki, że $u_{m_k}|_{(0, T]}$ zbiega niemal jednostajnie do $\hat{u}: (0, T] \rightarrow L_p(D)$. Funkcję \hat{u} rozszerzamy

$$\tilde{u}(t) := \begin{cases} u_0(t) & \text{dla } t \in [-1, 0] \\ \lim_{k \rightarrow \infty} u_{m_k}(t) & \text{dla } t \in (0, T]. \end{cases}$$

W celu uproszczenia oznaczeń będziemy pisać u_m zamiast u_{m_k} . Pozostało pokazać, że $\tilde{u} = u$.

Szkic dowodu

Oznacza to, że do pokazania pozostały zbieżności:

$$U_{a_m}(t, 0)u_0(0) \rightarrow U_a(t, 0)u_0(0)$$

$$\int_0^t U_{a_m}(t, \zeta)C_{a_m}^1(\zeta)u_m(\zeta - R(\zeta)) d\zeta \rightarrow \int_0^t U_a(t, \zeta)C_a^1(\zeta)\tilde{u}(\zeta - R(\zeta)) d\zeta.$$

Pierwsza zbieżność wynika z [3, Tw. 2.2.12 & 2.2.1] oraz [5, Tw. 2.17].
Zajmijmy się więc drugą zbieżnością.

Szkic dowodu

Zapiszmy

$$\begin{aligned}
& \int_0^t U_{a_m}(t, \zeta) C_{a_m}^1(\zeta) u_m(\zeta - R(\zeta)) \, d\zeta - \int_0^t U_a(t, \zeta) C_a^1(\zeta) \tilde{u}(\zeta - R(\zeta)) \, d\zeta \\
&= \int_0^t (U_{a_m}(t, \zeta) - U_a(t, \zeta)) C_{a_m}^1(\zeta) u_m(\zeta - R(\zeta)) \, d\zeta \\
&+ \int_0^t U_a(t, \zeta) C_{a_m}^1(\zeta) (u_m(\zeta - R(\zeta)) - \tilde{u}(\zeta - R(\zeta))) \, d\zeta \\
&+ \int_0^t U_a(t, \zeta) (C_{a_m}^1(\zeta) - C_a^1(\zeta)) \tilde{u}(\zeta - R(\zeta)) \, d\zeta.
\end{aligned}$$

Szkic dowodu

Całki po prawej stronie nazwijmy kolejno $J_m^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, 3$. Zbieżność:

- $J_m^{(1)}(t)$ wynika z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności dominowanej dla całek Bochnera. Kluczowym spostrzeżeniem jest tu oszacowanie

$$\begin{aligned} & \| (U_{a_m}(t, \zeta) - U_a(t, \zeta)) C_{a_m}^1(\zeta) u_m(\zeta - R(\zeta)) \|_{L_p(D)} \\ & \leq \| (U_{a_m}(t, \zeta) - U_a(t, \zeta)) \|_{\mathcal{L}(L_p(D))} K \overline{M} \| u_0 \|_{C([-1,0], L_p(D))}. \end{aligned}$$

- $J_m^{(2)}(t)$ robimy w podobnym duchu z twierdzenia Lebesgue'a. Mamy oszacowanie

$$\begin{aligned} & \| U_a(t, \zeta) C_{a_m}^1(\zeta) (u_m(\zeta - R(\zeta)) - \tilde{u}(\zeta - R(\zeta))) \|_{L_p(D)} \\ & \leq M K e^{\gamma T} \| u_m(\zeta - R(\zeta)) - \tilde{u}(\zeta - R(\zeta)) \|_{L_p(D)}. \end{aligned}$$

Szkic dowodu

- $J_m^{(3)}(t)$ wymaga skorzystania z faktu, iż zbiór $\{J_m^{(3)}(t) : m \in \mathbb{N}\}$ jest przzwarty w $L_p(D)$ dzięki czemu możemy badać słabą zbieżność $J_m^{(3)}(t) \rightharpoonup 0$ zamiast zbieżności normowej w $L_p(D)$. To znaczy badamy zbieżność $\langle J_m^{(3)}(t), v \rangle \rightarrow 0$ dla dowolnego $v \in L_{p'}(D)$. Z twierdzenia Hillea mamy:

$$\begin{aligned} \langle J_m^{(3)}(t), v \rangle &= \int_0^t \langle U_a(t, \zeta)(C_{a_m}^1(\zeta) - C_a^1(\zeta))\tilde{u}(\zeta - R(\zeta)), v \rangle d\zeta \\ &= \int_0^t \langle (C_{a_m}^1(\zeta) - C_a^1(\zeta))\tilde{u}(\zeta - R(\zeta)), U_a^*(t, \zeta)v \rangle d\zeta. \end{aligned}$$

Szkic dowodu

I dalej z definicji *parowania* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_p, L_{p'}}$ mamy

$$\begin{aligned} & \int_0^t \langle (C_{a_m}^1(\zeta) - C_a^1(\zeta))\tilde{u}(\zeta - R(\zeta)), U_a^*(t, \zeta)v \rangle d\zeta \\ &= \int_0^t \int_D (c_{1,m}(\zeta, x) - c_1(\zeta, x)) \tilde{u}(\zeta - R(\zeta))[x] (U_a^*(\zeta, t)v)[x] dx d\zeta. \end{aligned}$$

A ponieważ funkcja

$$[(0, t) \times D \ni (\zeta, x) \mapsto \tilde{u}(\zeta - R(\zeta))[x](U_a^*(t, \zeta)v)[x] \in \mathbb{R}]$$

okazuje się być w $L_1((0, t) \times D)$ oraz $c_{1,m} \xrightarrow{*} c_1$ to $J_m^{(3)}(t) \rightarrow 0$.

Ciągła zależność rozwiązań Mild od parametrów

Twierdzenie (MK & JM 2022 [5])

Niech \mathcal{R}_0 spełnia DA6 wtedy dla dowolnego $u_0 \in C([-1, 0], L_p(D))$ odwzorowanie

$$[Y_0 \times \mathcal{R}_0 \ni (a, R) \mapsto u(\cdot; a, u_0, R)|_{[0, T]} \in C([0, T], L_p(D))]$$

jest ciągle.

Łączna ciągłość

Twierdzenie (MK & JM 2022 [5])

Dla dowolnego $0 < T_1 \leq T$ oraz $R \in \mathcal{R}$ odwzorowanie

$$\left[Y \times C([-1, 0], L_p(D)) \ni (a, u_0) \right. \\ \left. \mapsto u(\cdot; a, u_0, R)|_{[T_1, T]} \in C([T_1, T], L_p(D)) \right]$$

jest ciągle. Analogicznie, gdy \mathcal{R}_0 spełnia DA6 to odwzorowanie

$$\left[Y_0 \times C([-1, 0], L_p(D)) \times \mathcal{R}_0 \ni (a, u_0, R) \right. \\ \left. \mapsto u(\cdot; a, u_0, R)|_{[0, T]} \in C([0, T], L_p(D)) \right]$$

jest ciągle.

Bibliografia I

1. S. Novo, C. Núñez, R. Obaya and A. M. Sanz, Skew-product semiflows for nonautonomous partial functional differential equations with delay, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 34 (2014), no. 10, 4291–4321.
2. R. Obaya and A. M. Sanz, Persistence in non-autonomous quasimonotone parabolic partial functional differential equations with delay, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 24 (2019), no. 8, 3947–3970.
3. J. Mierczyński and W. Shen, “Spectral Theory for Random and Nonautonomous Parabolic Equations and Applications,” *Chapman & Hall/CRC Monogr. Surv. Pure Appl. Math.*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.
4. T. S. Doan, Lyapunov exponents for random dynamical systems, Ph. D. dissertation, Technische Universität Dresden, 2009.

5. M. Kryspin and J. Mierczyński, Partial differential equations with bounded delay, accepted in J. Evol. Equ., 2022.
6. D. Daners, Heat kernel estimates for operators with boundary conditions, Math. Nachr. 217 (2000), 13–41.
7. W. Arendt and A. V. Bukhvalov, Integral representations of resolvents and semigroups, Forum Math. 6 (1994), 111–135.
8. R. Dautray and J.-L. Lions, “Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Vol. 5: Evolution Problems. I,” with the collaboration of M. Artola, M. Cessenat and H. Lanchon, translated from the French by A. Craig, Springer, Berlin, 1992.

9. O. A. Ladyzhenskaya [O. A. Ladyženskaja], V. A. Solonnikov and N. N. Ural'tseva [N. N. Ural'ceva], “Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type,” translated from the Russian by S. Smith, Transl. Math. Monogr., Vol. **23**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1967.
10. A. Lunardi, “Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems,” 2013 reprint of the 1995 original, Mod. Birkhäuser Class., Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1995.