# Ciągłość zanurzeń przestrzeni Słobodeckiego gdy $\alpha p \geqslant s$.

Artur Słabuszewski

Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

17 grudnia 2020

# Ułamkowe przestrzenie Sobolewa

## Przestrzeń Słobodeckiego

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p > 0$ i $\alpha \in (0,1)$. Powiemy, że $u$ należy $W^{\alpha,p}(\Omega)$ jeśli $u \in L^p(\Omega)$ oraz poniższa wielkość jest skończona

$$\|u\|_{W^{\alpha,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{W^{\alpha,p}(\Omega)},$$

gdzie

$$[u]_{W^{\alpha,p}(\Omega)} = \left( \iint\limits_{\Omega\ \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}}\, dxdy \right)^{1/p},$$

nazywamy pół normą Słobodeckiego.

# Ułamkowe przestrzenie Sobolewa

## Przestrzeń Słobodeckiego

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $p > 0$ i $\alpha \in (0,1)$. Powiemy, że $u$ należy $W^{\alpha,p}(\Omega)$ jeśli $u \in L^p(\Omega)$ oraz poniższa wielkość jest skończona

$$\|u\|_{W^{\alpha,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + [u]_{W^{\alpha,p}(\Omega)},$$

gdzie

$$[u]_{W^{\alpha,p}(\Omega)} = \left( \iint\limits_{\Omega\ \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\alpha p}}\, dxdy \right)^{1/p},$$

nazywamy pół normą Słobodeckiego.

## Warunek gęstości miary (Measure density condition)

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że istnieje stała $c > 0$ t. że dla wszystkich $x \in \Omega$ i $r \in (0,1]$

$$|B(x,r) \cap \Omega| \geqslant c\, r^n.$$

Wtedy mówimy, że $\Omega$ spełnia warunek gęstości miary.

# Ciągłe zanurzenia w $\mathbb{R}^n$

## Charakteryzacja ciągłych zanurzeń (Y.Zhou 2015)

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i spójnym, $n \geqslant 2$. Wówczas następujące warunki są równoważne

- $\Omega$ spełnia warunek gęstości miary.
- $\exists \alpha \in (0,1) \exists p \in (0,\infty)$ t. że $\alpha p < n$ oraz $W^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, gdzie $p^* = \frac{np}{n-\alpha p}$
- $\forall \alpha \in (0,1) \forall p \in (0,\infty)$ t. że $\alpha p < n$ oraz $W^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, gdzie $p^* = \frac{np}{n-\alpha p}$
- $\exists \alpha \in (0,1) \exists p \in (1,\infty)$ t. że $\alpha p > n$ oraz $W^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$, gdzie $\beta = \alpha - \frac{n}{p}$
- $\forall \alpha \in (0,1) \forall p \in (1,\infty)$ t. że $\alpha p > n$ oraz $W^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$, gdzie $\beta = \alpha - \frac{n}{p}$
- $\exists \alpha \in (0,1) \exists p \in (1,\infty)$ t. że $\alpha p = n$ oraz $W^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow Exp(\Omega, \frac{n}{n-\alpha})$
- $\forall \alpha \in (0,1) \forall p \in (1,\infty)$ t. że $\alpha p = n$ oraz $W^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow Exp(\Omega, \frac{n}{n-\alpha})$

### $Exp(\gamma)$

Zanurzenie $W^{\alpha,p}(\Omega) \hookrightarrow Exp(\Omega,\gamma)$ zachodzi jeśli istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$ takie, że dla każdego $u \in W^{\alpha,p}(\Omega)$ i każdej kuli $B = B(z,R) \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 < r \leqslant 1$ zachodzi

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{\Omega\cap B} \exp\left(\frac{|u(x)-c|}{C_1\|u\|_{W^{\alpha,p}(\Omega)}}\right)^{\gamma} dx \leqslant C_2|B|$$

# Przestrzenie metryczne z miarą

## Regularność miary

Niech $(X, d, \mu)$ będzie przestrzenią metryczną z miarą borelowską, taką że $0 < \mu(B) < \infty$ dla każdej kuli $B$. Jeśli istnieją stałe $b > 0, s > 0$ takie, że dla wszystkich $x \in X$ i $r \in (0, 1]$

- $\mu(B(x, r)) \geqslant \frac{1}{b} r^s$, wtedy mówimy że $\mu$ jest dolnie $s$-regularna.
- $\mu(B(x, r)) \leqslant b\, r^s$, wtedy mówimy że $\mu$ jest górnie $s$-regularna.

Jeśli zachodzą obie te nierówności (z tym samym $s$) to $\mu$ nazywamy $s$-regularną.

### Regularność miary

Niech $(X, d, \mu)$ będzie przestrzenią metryczną z miarą borelowską, taką że $0 < \mu(B) < \infty$ dla każdej kuli $B$. Jeśli istnieją stałe $b > 0, s > 0$ takie, że dla wszystkich $x \in X$ i $r \in (0, 1]$

- $\mu(B(x, r)) \geqslant \frac{1}{b} r^s$, wtedy mówimy że $\mu$ jest dolnie $s$-regularna.
- $\mu(B(x, r)) \leqslant b\, r^s$, wtedy mówimy że $\mu$ jest górnie $s$-regularna.

Jeśli zachodzą obie te nierówności (z tym samym $s$) to $\mu$ nazywamy $s$-regularną.

### Przestrzenie Słobodeckiego na przestrzeniach metrycznych z miarą

Niech $\alpha, p, s > 0$. Powiemy że $u \in W_s^{\alpha,p}(X, d, \mu)$ jeśli $u \in L^p(X, \mu)$ oraz poniższa wielkość jest skończona

$$\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = \|u\|_{L^p(X,\mu)} + [u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)},$$

gdzie

$$[u]_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} = \left( \iint\limits_{0<d(x,y)<1} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x, y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

# Włożenia dla $\alpha p < s$

**Twierdzenie (B. Dyda 2010)**

Jeśli $\mu$ jest dolnie $s$-regularna to dla dowolnych $\alpha, p > 0$ takich, że $\alpha p < s$, zanurzenie

$$W_s^{\alpha,p}(X, d, \mu) \hookrightarrow L^{p^*}(X, \mu)$$

zachodzi, gdzie $p^* = \frac{sp}{s - \alpha p}$.

# Włożenia dla $\alpha p < s$

**Twierdzenie (B. Dyda 2010)**

Jeśli $\mu$ jest dolnie $s$-regularna to dla dowolnych $\alpha, p > 0$ takich, że $\alpha p < s$, zanurzenie

$$W_s^{\alpha,p}(X, d, \mu) \hookrightarrow L^{p^*}(X, \mu)$$

zachodzi, gdzie $p^* = \frac{sp}{s-\alpha p}$.

**Twierdzenie (P.Górka, A.S. 2019)**

Ustalmy $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$ i $q > p$. Niech $(X, d, \mu)$ będzie przestrzenią metryczną z miarą górnie $s$-regularną. Załóżmy, że istnieje stała $C > 0$, taka że

$$\|u\|_{L^q(X)} \leqslant C \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X)}$$

dla wszystkich $u \in W_s^{\alpha,p}(X)$. Wówczas istnieje stała $\widetilde{C} > 0$ taka, że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$

$$\mu(B(z,r)) \geqslant \widetilde{C} r^{\frac{\alpha pq}{q-p}}.$$

# Włożenia dla $\alpha p < s$

**Twierdzenie (B. Dyda 2010)**

Jeśli $\mu$ jest dolnie $s$-regularna to dla dowolnych $\alpha, p > 0$ takich, że $\alpha p < s$, zanurzenie

$$W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu) \hookrightarrow L^{p^*}(X,\mu)$$

zachodzi, gdzie $p^* = \frac{sp}{s-\alpha p}$.

**Twierdzenie (P.Górka, A.S. 2019)**

Ustalmy $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$ i $q > p$. Niech $(X,d,\mu)$ będzie przestrzenią metryczną z miarą górnie $s$-regularną. Załóżmy, że istnieje stała $C > 0$, taka że

$$\|u\|_{L^q(X)} \leqslant C\,\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X)}$$

dla wszystkich $u \in W_s^{\alpha,p}(X)$. Wówczas istnieje stała $\widetilde{C} > 0$ taka, że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$

$$\mu(B(z,r)) \geqslant \widetilde{C} r^{\frac{\alpha pq}{q-p}}.$$

Jeśli $q = \frac{sp}{s-\alpha p}$ to $\frac{\alpha pq}{q-p} = s$.

# Warunek konieczny dla $\alpha p > s$

**Jednostajna doskonałość**

Powiemy, że przestrzeń metryczna $(X, d)$ jest jednostajnie doskonała, jeśli istnieje $\lambda \in (0,1)$ taka, że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$

$$B(z,r)\backslash B(z,\lambda r) \neq \emptyset$$

# Warunek konieczny dla $\alpha p > s$

## Jednostajna doskonałość

Powiemy, że przestrzeń metryczna $(X, d)$ jest jednostajnie doskonała, jeśli istnieje $\lambda \in (0, 1)$ taka, że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0, 1]$

$$B(z, r) \backslash B(z, \lambda r) \neq \emptyset$$

## Twierdzenie (P.Górka, A.S. 2019)

Ustalmy $\alpha \in (0, 1)$, $p \in (0, \infty)$ i $\beta \geqslant 0$. Niech $(X, d, \mu)$ będzie jednostajnie doskonałą, górnie $s$-regularną przestrzenią metryczną z miarą. Załóżmy, że istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$[u]_{C^{0,\beta}(X,d)} \leqslant C \, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X)}$$

dla wszystkich $u \in W_s^{\alpha,p}(X)$. Wówczas istnieje stała $\widetilde{C}$ taka, że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0, 1]$ mamy

$$\mu(B(z, r)) \geqslant \widetilde{C} \, r^{p(\alpha-\beta)}.$$

# Warunek konieczny dla $\alpha p > s$

**Jednostajna doskonałość**

Powiemy, że przestrzeń metryczna $(X, d)$ jest jednostajnie doskonała, jeśli istnieje $\lambda \in (0, 1)$ taka, że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0, 1]$

$$B(z, r) \backslash B(z, \lambda r) \neq \emptyset$$

**Twierdzenie (P.Górka, A.S. 2019)**

Ustalmy $\alpha \in (0, 1)$, $p \in (0, \infty)$ i $\beta \geqslant 0$. Niech $(X, d, \mu)$ będzie jednostajnie doskonałą, górnie $s$-regularną przestrzenią metryczną z miarą. Załóżmy, że istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$[u]_{C^{0,\beta}(X,d)} \leqslant C \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X)}$$

dla wszystkich $u \in W_s^{\alpha,p}(X)$. Wówczas istnieje stała $\widetilde{C}$ taka, że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0, 1]$ mamy

$$\mu(B(z, r)) \geqslant \widetilde{C}\, r^{p(\alpha-\beta)}.$$

Jeśli $\beta = \alpha - \frac{s}{p}$ to $p(\alpha - \beta) = s$.

**Twierdzenie (P.Górka, A.S. 2019)**

Ustalmy $\alpha \in (0,1)$, $p \in (0,\infty)$ i $\gamma \in (0,\infty)$. Niech $(X,d,\mu)$ będzie jednostajnie doskonałą, górnie $s$-regularną przestrzenią metryczną z miarą. Załóżmy, że istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$ takie, że dla wszystkich $u \in W_s^{\alpha,p}(X)$ i wszystkich kul $B = B(z,r)$, $r \in (0,1]$ mamy

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_B \exp\left(\frac{|u(x)-c|}{C_1\|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X)}}\right)^{\gamma} d\mu(x) \leqslant C_2\,\mu(B).$$

Wówczas istnieje stała $\widetilde{C} > 0$, taka że dla wszystkich $z \in X$ i $r \in (0,1]$, mamy

$$\mu(B(z,r)) \geqslant \widetilde{C} r^{\alpha p}.$$

**Twierdzenie (Campanato 1963)**

Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, spełniającym warunek gęstości miary, $p \geqslant 1$ oraz $u \in L^p(\Omega)$. Załóżmy, że istnieje $A > 0$ oraz $\beta \in (0,1]$, taka że dla każdej kuli $B = B(z,r) \subseteq \mathbb{R}^n$, $r \in (0,1]$ mamy

$$\left(⨍_{B\cap\Omega} |u(x) - (u)_{B\cap\Omega}|^p \, dx\right)^{1/p} \leqslant Ar^{\beta},$$

wtedy $u \in C^{0,\beta}(\Omega)$ oraz istnieje stała $C = C(\Omega, \beta, p) > 0$ taka, że

$$\|u\|_{C^{0,\beta}(\Omega)} \leqslant C\,(A + \|u\|_{L^p(\Omega)}),$$

gdzie

$$(u)_{B\cap\Omega} = ⨍_{B\cap\Omega} u(y)dy.$$

# Oszacowanie typu Campanato

Niech $u \in W^{\alpha,p}(\Omega)$. Wówczas

$$\fint_{B\cap\Omega} |u(x) - (u)_{B\cap\Omega}|^p \, dx = \fint_{B\cap\Omega} |u(x) - \fint_{B\cap\Omega} u(y) dy|^p$$

# Oszacowanie typu Campanato

Niech $u \in W^{\alpha,p}(\Omega)$. Wówczas

$$\begin{aligned}\fint_{B\cap\Omega} |u(x) - (u)_{B\cap\Omega}|^p \, dx &= \fint_{B\cap\Omega} |u(x) - \fint_{B\cap\Omega} u(y) dy|^p \\ &\leqslant \fint_{B\cap\Omega} \fint_{B\cap\Omega} |u(x) - u(y)|^p dy dx\end{aligned}$$

# Oszacowanie typu Campanato

Niech $u \in W^{\alpha,p}(\Omega)$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\fint_{B\cap\Omega} |u(x) - (u)_{B\cap\Omega}|^p \, dx &= \fint_{B\cap\Omega} |u(x) - \fint_{B\cap\Omega} u(y)dy|^p \\
&\leqslant \fint_{B\cap\Omega} \fint_{B\cap\Omega} |u(x) - u(y)|^p dydx \\
&\leqslant c^{-2} r^{-2n} \int_{B\cap\Omega} \int_{B\cap\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+\alpha p}} |x - y|^{n+\alpha p} dydx
\end{aligned}$$

# Oszacowanie typu Campanato

Niech $u \in W^{\alpha,p}(\Omega)$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\fint_{B\cap\Omega} |u(x) - (u)_{B\cap\Omega}|^p \, dx &= \fint_{B\cap\Omega} |u(x) - \fint_{B\cap\Omega} u(y)dy|^p \\
&\leqslant \fint_{B\cap\Omega} \fint_{B\cap\Omega} |u(x) - u(y)|^p dydx \\
&\leqslant c^{-2} r^{-2n} \int_{B\cap\Omega} \int_{B\cap\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+\alpha p}} |x-y|^{n+\alpha p} dydx \\
&\leqslant 2^{n+\alpha p} c^{-2} [u]^p_{W^{\alpha,p}(\Omega)} r^{\alpha p - n}
\end{aligned}$$

### Miara podwajająca

Niech $(X, d, \mu)$ będzie przestrzenią metryczną z miarą borelowską. Powiemy, że $\mu$ jest podwajająca jeśli istnieje stała $C_d > 0$ taka, że dla każdej kuli $B(z, r)$

$$\mu(B(z, 2r)) \leqslant C_d \, \mu(B(z, r)).$$

### Miara podwajająca

Niech $(X, d, \mu)$ będzie przestrzenią metryczną z miarą borelowską. Powiemy, że $\mu$ jest podwajająca jeśli istnieje stała $C_d > 0$ taka, że dla każdej kuli $B(z, r)$

$$\mu(B(z, 2r)) \leqslant C_d\, \mu(B(z, r)).$$

### Twierdzenie (P. Górka 2009)

Niech $(X, d, \mu)$ będzie p. metryczną z miarą podwajającą, dolnie $s$-regularną. Niech $p \geqslant 1$, $u \in L^p(X, \mu)$. Załóżmy, że istnieje $A > 0$ oraz $\beta \in (0, 1]$, taka że dla każdej kuli $B = B(z, r)$, $r \in (0, 1]$ mamy

$$\left( \fint_B |u(x) - (u)_B|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \leqslant Ar^\beta,$$

wtedy $u \in C^{0,\beta}(X, d)$ oraz istnieje stała $C = C(X, \beta, p) > 0$ taka, że

$$\|u\|_{C^{0,\beta}(X,d)} \leqslant C\,(A + \|u\|_{L^p(X,\mu)}),$$

**Twierdzenie 1 (P. Górka, A.S. 2020)**

Niech $(X, d, \mu)$ będzie dolnie $s$-regularna i niech $\alpha, p > 0$ będą takie, że $\alpha p > s$. Niech $u \in W_s^{\alpha,p}(X, d, \mu)$. Wówczas $u$ jest równa prawie wszędzie funkcji ciągłej $u^*$ i istnieje stała $\widetilde{C} > 0$ taka, że

$$\|u^*\|_{C^{0,\alpha-\frac{s}{p}}(X,d)} \leqslant \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}.$$

**Definicja**

Niech $u : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną i skończoną prawie wszędzie. Dla dowolnej kuli $B = B(z,R)$ definiujemy medianę z $u$ na $B$ wzorem

$$\begin{aligned} m_u(B) &= \max\left\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in B : u(x) < a\}) \leqslant \frac{\mu(B)}{2}\right\} \\ &= \max\left\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in B : u(x) < a\}) \leqslant \mu(\{x \in B : u(x) \geqslant a\})\right\} \end{aligned}$$

**Definicja**

Niech $u : X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną i skończoną prawie wszędzie. Dla dowolnej kuli $B = B(z, R)$ definiujemy medianę z $u$ na $B$ wzorem

$$\begin{aligned} m_u(B) &= \max\left\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in B : u(x) < a\}) \leqslant \frac{\mu(B)}{2}\right\} \\ &= \max\left\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in B : u(x) < a\}) \leqslant \mu(\{x \in B : u(x) \geqslant a\})\right\} \end{aligned}$$

**Lemat o szacowaniu mediany**

Niech $u$ będzie funkcją mierzalną i skończoną prawie wszędzie. Dla dowolnego $p > 0$, dowolnej kuli $B = B(z, r)$ i $c \in \mathbb{R}$ zachodzi następująca nierówność

$$|m_u(B) - c| \leqslant \left(2 \fint_B |u(x) - c|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

# Fragmenty dowodu Lematu

Zakładamy, że prawa strona jest skończona.
Krok 1. Pokazujemy, że $m_u(B) - c = m_{u-c}(B)$.

Zakładamy, że prawa strona jest skończona.
Krok 1. Pokazujemy, że $m_u(B) - c = m_{u-c}(B)$.
Krok 2. Pokazujemy nierówność $|m_u(B)| \leqslant m_{|u|}(B)$

# Fragmenty dowodu Lematu

Zakładamy, że prawa strona jest skończona.
Krok 1. Pokazujemy, że $m_u(B) - c = m_{u-c}(B)$.
Krok 2. Pokazujemy nierówność $|m_u(B)| \leqslant m_{|u|}(B)$
Krok 3. Wystarczy pokazać, że

$$m_{|u-c|}(B) \leqslant \left(2 \fint_B |u(x) - c|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Zakładamy, że prawa strona jest skończona.
Krok 1. Pokazujemy, że $m_u(B) - c = m_{u-c}(B)$.
Krok 2. Pokazujemy nierówność $|m_u(B)| \leqslant m_{|u|}(B)$
Krok 3. Wystarczy pokazać, że

$$m_{|u-c|}(B) \leqslant \left(2 \fint_B |u(x) - c|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Ustalmy $\eta > 2$ i niech $\delta = \fint_B |u(x) - c|^p \, d\mu(x)$. Z nierówności Czebyszewa

$$\mu(\{x \in B : |u(x) - c| \geqslant (\eta\delta)^{1/p}\}) \leqslant \frac{1}{\eta\,\delta} \int_B |u(x) - c|^p \, d\mu(x) = \frac{1}{\eta}\mu(B) < \frac{1}{2}\mu(B)$$

# Fragmenty dowodu Lematu

Zakładamy, że prawa strona jest skończona.
Krok 1. Pokazujemy, że $m_u(B) - c = m_{u-c}(B)$.
Krok 2. Pokazujemy nierówność $|m_u(B)| \leqslant m_{|u|}(B)$
Krok 3. Wystarczy pokazać, że

$$m_{|u-c|}(B) \leqslant \left(2 \fint_B |u(x) - c|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Ustalmy $\eta > 2$ i niech $\delta = \fint_B |u(x) - c|^p \, d\mu(x)$. Z nierówności Czebyszewa

$$\mu(\{x \in B : |u(x) - c| \geqslant (\eta\delta)^{1/p}\}) \leqslant \frac{1}{\eta\,\delta} \fint_B |u(x) - c|^p \, d\mu(x) = \frac{1}{\eta}\mu(B) < \frac{1}{2}\mu(B)$$

Stąd

$$m_{|u-c|}(B) \leqslant \left(\eta \fint_B |u(x) - c|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

Przechodzimy z $\eta \to 2$ i otrzymujemy tezę.

# Wnioski z Lematu

## Założenie

Od tej pory zakładamy, że $\mu$ jest dolnie $s$-regularna tzn. istnieje stała $b > 0$, t.że dla każdego $z \in X$ i $r \in (0, 1]$
$$\mu(B(z, r)) \geqslant \frac{1}{b} r^s.$$

## Wniosek z Lematu o szacowaniu mediany

Jeśli $u$ jest mierzalna i skończona prawie wszędzie, to dla prawie wszystkich $\xi \in X$, wszystkich $p > 0$ i wszystkich kul $B = B(z, r)$, $r \in (0, 1]$

$$|m_u(B) - u(\xi)|^p \leqslant 2b\, r^{-s} \int_B |u(\xi) - u(y)|^p \, d\mu(y) \tag{1}$$

# Wnioski z Lematu

### Założenie

Od tej pory zakładamy, że $\mu$ jest dolnie $s$-regularna tzn. istnieje stała $b > 0$, t.że dla każdego $z \in X$ i $r \in (0, 1]$

$$\mu(B(z, r)) \geqslant \frac{1}{b} r^s.$$

### Wniosek z Lematu o szacowaniu mediany

Jeśli $u$ jest mierzalna i skończona prawie wszędzie, to dla prawie wszystkich $\xi \in X$, wszystkich $p > 0$ i wszystkich kul $B = B(z, r)$, $r \in (0, 1]$

$$|m_u(B) - u(\xi)|^p \leqslant 2b\, r^{-s} \int_B |u(\xi) - u(y)|^p \, d\mu(y) \tag{1}$$

### Lemat (Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu)

Niech $\alpha, p > 0$ oraz niech $u$ będzie funkcją mierzalną, skończoną prawie wszędzie i taką że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas istnieje zbiór $\mu(G) = 0$ taki, że dla $x \in X \setminus G$,

$$m_u(B(x, r)) \to u(x)$$

przy $r \to 0$.

Definiujemy zbiór

$$G = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) = \infty \text{ lub } u(x) = \infty \right\}.$$

# Dowód Tw. Lebesgue'a

Definiujemy zbiór

$$G = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) = \infty \text{ lub } u(x) = \infty \right\}.$$

Ponieważ $\int_{B(x,1)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) \in L^1(X,\mu)$, więc $\mu(G) = 0$. Wówczas dla wszystkich $x \in X \backslash G$ i $r \leqslant 1$ z (1) mamy

$$|u(x) - m_u(B(x,r))|^p \leqslant 2br^{-s} \int_{B(x,r)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y)$$

# Dowód Tw. Lebesgue'a

Definiujemy zbiór

$$G = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) = \infty \text{ lub } u(x) = \infty \right\}.$$

Ponieważ $\int_{B(x,1)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) \in L^1(X,\mu)$, więc $\mu(G) = 0$. Wówczas dla wszystkich $x \in X \setminus G$ i $r \leqslant 1$ z (1) mamy

$$\begin{aligned} |u(x) - m_u(B(x,r))|^p &\leqslant 2br^{-s} \int_{B(x,r)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y) \\ &\leqslant 2br^{-s} \int_{B(x,r)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} d(x,y)^{s+\alpha p} \, d\mu(y) \end{aligned}$$

# Dowód Tw. Lebesgue'a

Definiujemy zbiór

$$G = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) = \infty \text{ lub } u(x) = \infty \right\}.$$

Ponieważ $\int_{B(x,1)} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) \in L^1(X,\mu)$, więc $\mu(G) = 0$. Wówczas dla wszystkich $x \in X \setminus G$ i $r \leqslant 1$ z (1) mamy

$$\begin{aligned}
|u(x) - m_u(B(x,r))|^p &\leqslant 2br^{-s} \int_{B(x,r)} |u(x) - u(y)|^p\, d\mu(y) \\
&\leqslant 2br^{-s} \int_{B(x,r)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} d(x,y)^{s+\alpha p}\, d\mu(y) \\
&\leqslant 2br^{\alpha p} \int_{B(x,1)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}}\, d\mu(y) \to 0.
\end{aligned}$$

**Stwierdzenie 1**

Niech $\alpha, p > 0$ oraz niech $u$ będzie funkcją mierzalną, skończoną prawie wszędzie i taką że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas dla wszystkich $z \in X$, $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1 - r_1$

$$|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p \leqslant (4b^2\, 2^{s+\alpha p})\, [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( r_1^{\alpha p - s} + \frac{r_2^{\alpha p}}{r_1^s} \right),$$

DOWÓD:

# Oszacowania typu Campanato

**Stwierdzenie 1**

Niech $\alpha, p > 0$ oraz niech $u$ będzie funkcją mierzalną, skończoną prawie wszędzie i taką że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas dla wszystkich $z \in X$, $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1 - r_1$

$$|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p \leqslant (4b^2\, 2^{s+\alpha p})\, [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( r_1^{\alpha p - s} + \frac{r_2^{\alpha p}}{r_1^s} \right),$$

DOWÓD:

$$|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p \leqslant 2br_1^{-s} \int_{B(z,r_1)} |u(x) - m_u(B(z,r_2)|^p \, d\mu(x)$$

**Stwierdzenie 1**

Niech $\alpha, p > 0$ oraz niech $u$ będzie funkcją mierzalną, skończoną prawie wszędzie i taką że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas dla wszystkich $z \in X$, $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1 - r_1$

$$|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p \leqslant (4b^2\, 2^{s+\alpha p})\, [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( r_1^{\alpha p - s} + \frac{r_2^{\alpha p}}{r_1^s} \right),$$

DOWÓD:

$$\begin{aligned} |m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p &\leqslant 2br_1^{-s} \int_{B(z,r_1)} |u(x) - m_u(B(z,r_2)|^p \, d\mu(x) \\ &\leqslant 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \int_{B(z,r_1)} \int_{B(z,r_2)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y) d\mu(x) \end{aligned}$$

**Stwierdzenie 1**

Niech $\alpha, p > 0$ oraz niech $u$ będzie funkcją mierzalną, skończoną prawie wszędzie i taką że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas dla wszystkich $z \in X$, $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1 - r_1$

$$|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p \leqslant (4b^2\, 2^{s+\alpha p})\, [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( r_1^{\alpha p - s} + \frac{r_2^{\alpha p}}{r_1^s} \right),$$

DOWÓD:

$$\begin{aligned}
|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p &\leqslant 2br_1^{-s} \int_{B(z,r_1)} |u(x) - m_u(B(z,r_2)|^p \, d\mu(x) \\
&\leqslant 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \int_{B(z,r_1)} \int_{B(z,r_2)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y) d\mu(x) \\
&\leqslant 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \int_{B(z,r_1)} \int_{B(z,r_2)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} (r_1 + r_2)^{s+\alpha p} \, d\mu d\mu
\end{aligned}$$

# Oszacowania typu Campanato

## Stwierdzenie 1

Niech $\alpha, p > 0$ oraz niech $u$ będzie funkcją mierzalną, skończoną prawie wszędzie i taką że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas dla wszystkich $z \in X$, $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1 - r_1$

$$|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p \leqslant (4b^2\, 2^{s+\alpha p})\, [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( r_1^{\alpha p - s} + \frac{r_2^{\alpha p}}{r_1^s} \right),$$

DOWÓD:

$$\begin{aligned}
|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p &\leqslant 2br_1^{-s} \int_{B(z,r_1)} |u(x) - m_u(B(z,r_2)|^p \, d\mu(x) \\
&\leqslant 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \int_{B(z,r_1)} \int_{B(z,r_2)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y) d\mu(x) \\
&\leqslant 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \int_{B(z,r_1)} \int_{B(z,r_2)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} (r_1 + r_2)^{s+\alpha p} \, d\mu d\mu \\
&\leqslant 4b^2 [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} r_1^{-s} r_2^{-s} (r_1 + r_2)^{s+\alpha p}
\end{aligned}$$

**Stwierdzenie 1**

Niech $\alpha, p > 0$ oraz niech $u$ będzie funkcją mierzalną, skończoną prawie wszędzie i taką że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas dla wszystkich $z \in X$, $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1 - r_1$

$$|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p \leqslant (4b^2\, 2^{s+\alpha p})\, [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( r_1^{\alpha p - s} + \frac{r_2^{\alpha p}}{r_1^s} \right),$$

DOWÓD:

$$\begin{aligned}
|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p &\leqslant 2br_1^{-s} \int_{B(z,r_1)} |u(x) - m_u(B(z,r_2)|^p \, d\mu(x) \\
&\leqslant 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \int_{B(z,r_1)} \int_{B(z,r_2)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y) d\mu(x) \\
&\leqslant 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \int_{B(z,r_1)} \int_{B(z,r_2)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} (r_1 + r_2)^{s+\alpha p} \, d\mu d\mu \\
&\leqslant 4b^2 [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} r_1^{-s} r_2^{-s} (r_1 + r_2)^{s+\alpha p} \\
&= 4b^2 [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \frac{(r_1 + r_2)^s}{r_2^s} \frac{(r_1 + r_2)^{\alpha p}}{r_1^s}
\end{aligned}$$

# Oszacowania typu Campanato

**Stwierdzenie 1**

Niech $\alpha, p > 0$ oraz niech $u$ będzie funkcją mierzalną, skończoną prawie wszędzie i taką że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas dla wszystkich $z \in X$, $0 < r_1 \leqslant r_2 < 1 - r_1$

$$|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p \leqslant (4b^2\, 2^{s+\alpha p})\, [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( r_1^{\alpha p - s} + \frac{r_2^{\alpha p}}{r_1^s} \right),$$

DOWÓD:

$$\begin{aligned}
|m_u(B(z,r_1)) - m_u(B(z,r_2))|^p &\leqslant 2br_1^{-s} \int_{B(z,r_1)} |u(x) - m_u(B(z,r_2)|^p \, d\mu(x) \\
&\leqslant 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \int_{B(z,r_1)} \int_{B(z,r_2)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y) d\mu(x) \\
&\leqslant 4b^2 r_1^{-s} r_2^{-s} \int_{B(z,r_1)} \int_{B(z,r_2)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} (r_1 + r_2)^{s+\alpha p} \, d\mu d\mu \\
&\leqslant 4b^2 [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} r_1^{-s} r_2^{-s} (r_1 + r_2)^{s+\alpha p} \\
&= 4b^2 [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \frac{(r_1 + r_2)^s}{r_2^s} \frac{(r_1 + r_2)^{\alpha p}}{r_1^s} \\
&\leqslant 4b^2\, 2^{s+\alpha p} [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( r_1^{\alpha p - s} + \frac{r_2^{\alpha p}}{r_1^s} \right).
\end{aligned}$$

**Stwierdzenie 2**

Niech $\alpha, p > 0$. Wówczas istnieje stała $A > 0$ taka, dla wszystkich $z \in X$, $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$ oraz $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$ mamy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| \leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})}$$

DOWÓD:

# Oszacowania typu Campanato c.d.

**Stwierdzenie 2**

Niech $\alpha, p > 0$. Wówczas istnieje stała $A > 0$ taka, dla wszystkich $z \in X$, $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$ oraz $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$ mamy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right)\right| \leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})}$$

DOWÓD: Ustalmy $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$. Niech $r_1 = \frac{R}{2^{l+1}}$ i $r_2 = \frac{R}{2^l}$, gdzie $l$ jest liczbą naturalną. Z poprzedniego Stwierdzenia otrzymujemy

**Stwierdzenie 2**

Niech $\alpha, p > 0$. Wówczas istnieje stała $A > 0$ taka, dla wszystkich $z \in X$, $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$ oraz $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$ mamy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| \leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})}$$

DOWÓD: Ustalmy $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$. Niech $r_1 = \frac{R}{2^{l+1}}$ i $r_2 = \frac{R}{2^l}$, gdzie $l$ jest liczbą naturalną. Z poprzedniego Stwierdzenia otrzymujemy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^{l+1}}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^l}\right)\right) \right|^p \leqslant$$

$$4b^2\, 2^{s+\alpha p} [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( \frac{1}{2^{\alpha p - s}} \frac{R^{\alpha p - s}}{2^{l(\alpha p - s)}} + 2^s \frac{R^{\alpha p - s}}{2^{l(\alpha p - s)}} \right)$$

**Stwierdzenie 2**

Niech $\alpha, p > 0$. Wówczas istnieje stała $A > 0$ taka, dla wszystkich $z \in X$, $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$ oraz $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$ mamy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right)\right| \leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})}$$

DOWÓD: Ustalmy $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$. Niech $r_1 = \frac{R}{2^{l+1}}$ i $r_2 = \frac{R}{2^l}$, gdzie $l$ jest liczbą naturalną. Z poprzedniego Stwierdzenia otrzymujemy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^{l+1}}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^l}\right)\right)\right|^p \leqslant$$

$$4b^2\, 2^{s+\alpha p}[u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)}\left(\frac{1}{2^{\alpha p - s}}\,\frac{R^{\alpha p - s}}{2^{l(\alpha p - s)}} + 2^s\,\frac{R^{\alpha p - s}}{2^{l(\alpha p - s)}}\right) =$$

$$4^{s+1} b^2 (1 + 2^{\alpha p})[u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)}\,\frac{R^{\alpha p - s}}{2^{l(\alpha p - s)}}$$

# Oszacowania typu Campanato c.d.

**Stwierdzenie 2**

Niech $\alpha, p > 0$. Wówczas istnieje stała $A > 0$ taka, dla wszystkich $z \in X$, $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$ oraz $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$ mamy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| \leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})}$$

DOWÓD: Ustalmy $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$. Niech $r_1 = \frac{R}{2^{l+1}}$ i $r_2 = \frac{R}{2^l}$, gdzie $l$ jest liczbą naturalną. Z poprzedniego Stwierdzenia otrzymujemy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^{l+1}}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^l}\right)\right) \right|^p \leqslant$$

$$4b^2\, 2^{s+\alpha p} [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \left( \frac{1}{2^{\alpha p - s}} \frac{R^{\alpha p - s}}{2^{l(\alpha p - s)}} + 2^s \frac{R^{\alpha p - s}}{2^{l(\alpha p - s)}} \right) =$$

$$4^{s+1} b^2 (1 + 2^{\alpha p}) [u]^p_{W_s^{\alpha,p}(X)} \frac{R^{\alpha p - s}}{2^{l(\alpha p - s)}}$$

Teraz teza Stwierdzenia wynika z nierówności trójkąta

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| \leqslant \sum_{l=i}^{j-1} \left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^{l+1}}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^l}\right)\right) \right|$$

# Hölderowska ciągłość na pasie

**Twierdzenie 2 (P. Górka, A.S. 2020)**

Niech $p, \alpha > 0$ spełniają $\alpha p > s$. Załóżmy, że $u$ jest skończona prawie wszędzie i taka, że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas $u$ jest równa prawie wszędzie funkcji ciągłej $u^*$ oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\sup_{0<d(x,y)<1/3} \frac{|u^*(x) - u^*(y)|}{d(x,y)^{\alpha - \frac{s}{p}}} \leqslant C \left( \iint_{d(x,y)<1} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) d\mu(x) \right)^{1/p}. \quad (2)$$

# Hölderowska ciągłość na pasie

**Twierdzenie 2 (P. Górka, A.S. 2020)**

Niech $p, \alpha > 0$ spełniają $\alpha p > s$. Załóżmy, że $u$ jest skończona prawie wszędzie i taka, że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas $u$ jest równa prawie wszędzie funkcji ciągłej $u^*$ oraz istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$\sup_{0<d(x,y)<1/3} \frac{|u^*(x) - u^*(y)|}{d(x,y)^{\alpha - \frac{s}{p}}} \leqslant C \left( \iint\limits_{d(x,y)<1} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y) d\mu(x) \right)^{1/p}. \quad (2)$$

# Dowód Twierdzenia 2

Dowód: Ustalamy $z \in X$ i $R \in [0, 1/3)$. Ze Stwierdzenia 2 dla $0 \leqslant i < j$ mamy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right)\right| \leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})}$$

# Dowód Twierdzenia 2

Dowód: Ustalamy $z \in X$ i $R \in [0, 1/3)$. Ze Stwierdzenia 2 dla $0 \leqslant i < j$ mamy

$$\begin{aligned}\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right)\right| &\leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})} \\ &\leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{\infty} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})}\end{aligned}$$

# Dowód Twierdzenia 2

Dowód: Ustalamy $z \in X$ i $R \in [0, 1/3)$. Ze Stwierdzenia 2 dla $0 \leqslant i < j$ mamy

$$
\begin{aligned}
\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| &\leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})} \\
&\leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{\infty} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})} \\
&= \widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} \frac{R^{\alpha - \frac{s}{p}}}{2^{i(\alpha - \frac{s}{p})}}
\end{aligned}
$$

gdzie $\widetilde{A} = \dfrac{A}{1 - 2^{-(\alpha - \frac{s}{p})}} > 0$.

Dowód: Ustalamy $z \in X$ i $R \in [0, 1/3)$. Ze Stwierdzenia 2 dla $0 \leqslant i < j$ mamy

$$\begin{aligned} \left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| &\leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})} \\ &\leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{\infty} 2^{-l(\alpha - \frac{s}{p})} \\ &= \widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} \frac{R^{\alpha - \frac{s}{p}}}{2^{i(\alpha - \frac{s}{p})}} \end{aligned}$$

gdzie $\widetilde{A} = \dfrac{A}{1 - 2^{-(\alpha - \frac{s}{p})}} > 0$. Stąd $\left\{ m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^k}\right)\right) \right\}_{k=0}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}$, więc jest zbieżny. Z drugiej strony, z Twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu, wiemy że $m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^k}\right)\right)$ zbiega do $u(x)$ dla wszystkich $x \in X \setminus G$, gdzie $G$ jest zbiorem miary 0.

# Dowód Twierdzenia 2

Dowód: Ustalamy $z \in X$ i $R \in [0, 1/3)$. Ze Stwierdzenia 2 dla $0 \leqslant i < j$ mamy

$$\begin{aligned}\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| &\leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha-\frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha-\frac{s}{p})} \\ &\leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha-\frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{\infty} 2^{-l(\alpha-\frac{s}{p})} \\ &= \widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} \frac{R^{\alpha-\frac{s}{p}}}{2^{i(\alpha-\frac{s}{p})}}\end{aligned}$$

gdzie $\widetilde{A} = \dfrac{A}{1-2^{-(\alpha-\frac{s}{p})}} > 0$. Stąd $\left\{ m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^k}\right)\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $\mathbb{R}$, więc jest zbieżny. Z drugiej strony, z Twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu, wiemy że $m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^k}\right)\right)$ zbiega do $u(x)$ dla wszystkich $x \in X \setminus G$, gdzie $G$ jest zbiorem miary 0.

Zatem jeśli $z \in X \setminus G$ to kładziemy $i = 0$ in w powyższej nierówności, przechodzimy z $j$ do granicy i otrzymujemy

nierówność:

$$\left| m_u(B(z,R)) - u(z) \right| \leqslant \widetilde{A}[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

nierówność:

$$\left| m_u(B(z,R)) - u(z) \right| \leqslant \widetilde{A}[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

Pokażemy, że $u_{\restriction X \setminus G}$ jest Hölderowsko ciągła. Załóżmy, że $z, w \in X \setminus G$ są takie, że $0 < d(z,w) < 1/3$ i niech $R = d(z,w)$. Z nierówności trójkąta i z powyższego oszacowania otrzymujemy

$$|u(z) - u(w)| \leqslant |u(z) - m_u(B(z,R))| + |u(w) - m_u(B(w,R))| + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R$$

nierówność:
$$\left| m_u(B(z,R)) - u(z) \right| \leqslant \widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

Pokażemy, że $u_{\restriction X \setminus G}$ jest Hölderowsko ciągła. Załóżmy, że $z, w \in X \setminus G$ są takie, że $0 < d(z,w) < 1/3$ i niech $R = d(z,w)$. Z nierówności trójkąta i z powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}|u(z) - u(w)| &\leqslant |u(z) - m_u(B(z,R))| + |u(w) - m_u(B(w,R))| + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R\\ &\leqslant 2\widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))|\end{aligned}$$

nierówność:

$$\left| m_u(B(z,R)) - u(z) \right| \leqslant \widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

Pokażemy, że $u_{\restriction X \setminus G}$ jest Hölderowsko ciągła. Załóżmy, że $z, w \in X \setminus G$ są takie, że $0 < d(z,w) < 1/3$ i niech $R = d(z,w)$. Z nierówności trójkąta i z powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned}|u(z) - u(w)| &\leqslant |u(z) - m_u(B(z,R))| + |u(w) - m_u(B(w,R))| + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| \\ &\leqslant 2\widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))|\end{aligned}$$

Ostatni składnik szacujemy bardzo podobnie jak w Stwierdzeniu 1

$$\begin{aligned}|m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| &\leqslant \left( 2b\,R^{-s} \int_{B(z,R)} |u(x) - m_u(B(w,R)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leqslant \left( 4b^2\,R^{-2s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p}\end{aligned}$$

nierówność:

$$\left| m_u(B(z,R)) - u(z) \right| \leqslant \widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

Pokażemy, że $u_{\restriction X \setminus G}$ jest Hölderowsko ciągła. Załóżmy, że $z, w \in X \setminus G$ są takie, że $0 < d(z,w) < 1/3$ i niech $R = d(z,w)$. Z nierówności trójkąta i z powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned} |u(z) - u(w)| &\leqslant |u(z) - m_u(B(z,R))| + |u(w) - m_u(B(w,R))| + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R \\ &\leqslant 2\widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| \end{aligned}$$

Ostatni składnik szacujemy bardzo podobnie jak w Stwierdzeniu 1

$$\begin{aligned} |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| &\leqslant \left( 2b\, R^{-s} \int_{B(z,R)} |u(x) - m_u(B(w,R)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leqslant \left( 4b^2\, R^{-2s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &= \left( 4b^2\, R^{-2s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} d(x,y)^{s+\alpha p} \, d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p} \end{aligned}$$

nierówność:

$$\left| m_u(B(z,R)) - u(z) \right| \leqslant \widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

Pokażemy, że $u_{\restriction X \setminus G}$ jest Hölderowsko ciągła. Załóżmy, że $z, w \in X \setminus G$ są takie, że $0 < d(z,w) < 1/3$ i niech $R = d(z,w)$. Z nierówności trójkąta i z powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\begin{aligned} |u(z) - u(w)| &\leqslant |u(z) - m_u(B(z,R))| + |u(w) - m_u(B(w,R))| + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| \\ &\leqslant 2\widetilde{A}\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} + |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| \end{aligned}$$

Ostatni składnik szacujemy bardzo podobnie jak w Stwierdzeniu 1

$$\begin{aligned} |m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| &\leqslant \left( 2b\, R^{-s} \int_{B(z,R)} |u(x) - m_u(B(w,R)|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leqslant \left( 4b^2\, R^{-2s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &= \left( 4b^2\, R^{-2s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} d(x,y)^{s+\alpha p} \, d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p} \\ &\leqslant (4b^2 3^{s+\alpha p})^{1/p} \, d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} \left( \iint\limits_{d(x,y)<1} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{s+\alpha p}} \, d\mu(y)\, d\mu(x) \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Stąd

$$|u(z) - u(w)| \leqslant C[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)}\, d(x,y)^{\alpha - \frac{s}{p}}$$

dla dowolnych $z, w \in X \backslash G$, gdzie $C = 2\widetilde{A} + (4b^2 3^{s+\alpha p})^{1/p}$. $X \backslash G$ jest gęsty w $X$, więc używając standardowego argumentu możemy przedłużyć $u$ do funkcji $u^*$, która jest ciągła na całym $X$ i spełnia (2). □

Stąd

$$|u(z) - u(w)| \leqslant C[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)}\, d(x,y)^{\alpha - \frac{s}{p}}$$

dla dowolnych $z, w \in X \backslash G$, gdzie $C = 2\widetilde{A} + (4b^2 3^{s+\alpha p})^{1/p}$. $X\backslash G$ jest gęsty w $X$, więc używając standardowego argumentu możemy przedłużyć $u$ do funkcji $u^*$, która jest ciągła na całym $X$ i spełnia (2). $\square$

**Twierdzenie 1 (P. Górka, A.S. 2020)**

Niech $(X, d, \mu)$ będzie dolnie $s$-regularna i niech $\alpha, p > 0$ będą takie, że $\alpha p > s$. Niech $u \in W_s^{\alpha,p}(X, d, \mu)$. Wówczas $u$ jest równa prawie wszędzie funkcji ciągłej $u^*$ i istnieje stała $\widetilde{C} > 0$ taka, że

$$\|u^*\|_{C^{0,\alpha - \frac{s}{p}}(X,d)} \leqslant \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}.$$

# Dowód głównego Twierdzenia

Niech $z \in X$. Wtedy istnieje $w \in B(z, \frac{1}{3})$ takie, że

$$|u^*(w)| \leqslant \left( \frac{1}{\mu\left(B(z, \frac{1}{3})\right)} \int_{B(z, \frac{1}{3})} |u(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p}$$

# Dowód głównego Twierdzenia

Niech $z \in X$. Wtedy istnieje $w \in B(z, \frac{1}{3})$ takie, że

$$|u^*(w)| \leqslant \left( \frac{1}{\mu\left(B(z, \frac{1}{3})\right)} \int_{B(z, \frac{1}{3})} |u(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leqslant b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)}$$

# Dowód głównego Twierdzenia

Niech $z \in X$. Wtedy istnieje $w \in B(z, \frac{1}{3})$ takie, że

$$|u^*(w)| \leqslant \left( \frac{1}{\mu\left(B(z, \frac{1}{3})\right)} \int_{B(z, \frac{1}{3})} |u(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leqslant b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)}$$

Stąd

$$|u^*(z)| \leqslant |u^*(z) - u^*(w)| + |u^*(w)|$$

Niech $z \in X$. Wtedy istnieje $w \in B(z, \frac{1}{3})$ takie, że

$$|u^*(w)| \leqslant \left( \frac{1}{\mu\left(B(z, \frac{1}{3})\right)} \int_{B(z, \frac{1}{3})} |u(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leqslant b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \, \|u\|_{L^p(X,\mu)}$$

Stąd

$$|u^*(z)| \leqslant |u^*(z) - u^*(w)| + |u^*(w)| \leqslant C \, [u]_{W_s^{\alpha,p}} \, d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} + b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \, \|u\|_{L^p(X,\mu)}$$

# Dowód głównego Twierdzenia

Niech $z \in X$. Wtedy istnieje $w \in B(z, \frac{1}{3})$ takie, że

$$|u^*(w)| \leqslant \left( \frac{1}{\mu\left(B(z, \frac{1}{3})\right)} \int_{B(z, \frac{1}{3})} |u(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leqslant b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)}$$

Stąd

$$\begin{aligned} |u^*(z)| \leqslant |u^*(z) - u^*(w)| + |u^*(w)| &\leqslant C\, [u]_{W_s^{\alpha,p}}\, d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} + b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)} \\ &\leqslant \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \end{aligned}$$

# Dowód głównego Twierdzenia

Niech $z \in X$. Wtedy istnieje $w \in B(z, \frac{1}{3})$ takie, że

$$|u^*(w)| \leqslant \left( \frac{1}{\mu\left(B(z, \frac{1}{3})\right)} \int_{B(z, \frac{1}{3})} |u(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leqslant b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)}$$

Stąd

$$\begin{aligned} |u^*(z)| \leqslant |u^*(z) - u^*(w)| + |u^*(w)| &\leqslant C\,[u]_{W_s^{\alpha,p}}\, d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} + b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)} \\ &\leqslant \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \end{aligned}$$

Zatem

$$\|u^*\|_{C(X,d)} \leqslant \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$$

Niech $z \in X$. Wtedy istnieje $w \in B(z, \frac{1}{3})$ takie, że

$$|u^*(w)| \leqslant \left( \frac{1}{\mu\left(B(z, \frac{1}{3})\right)} \int_{B(z, \frac{1}{3})} |u(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leqslant b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)}$$

Stąd

$$\begin{aligned} |u^*(z)| \leqslant |u^*(z) - u^*(w)| + |u^*(w)| &\leqslant C\,[u]_{W_s^{\alpha,p}}\, d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} + b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)} \\ &\leqslant \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \end{aligned}$$

Zatem

$$\|u^*\|_{C(X,d)} \leqslant \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$$

Teraz możemy oszacować całą pół normę. Niech $z, w \in X$ będą takie, że $d(z,w) \geqslant \frac{1}{3}$. Wówczas

$$|u^*(x) - u^*(y)| \leqslant 2\, \|u^*\|_{C(X,d)}$$

# Dowód głównego Twierdzenia

Niech $z \in X$. Wtedy istnieje $w \in B(z, \frac{1}{3})$ takie, że

$$|u^*(w)| \leqslant \left( \frac{1}{\mu\left(B(z, \frac{1}{3})\right)} \int_{B(z, \frac{1}{3})} |u(y)|^p d\mu(y) \right)^{1/p} \leqslant b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)}$$

Stąd

$$\begin{aligned} |u^*(z)| \leqslant |u^*(z) - u^*(w)| + |u^*(w)| &\leqslant C\, [u]_{W_s^{\alpha,p}}\, d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} + b^{1/p} 3^{\frac{s}{p}} \|u\|_{L^p(X,\mu)} \\ &\leqslant \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)} \end{aligned}$$

Zatem

$$\|u^*\|_{C(X,d)} \leqslant \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}$$

Teraz możemy oszacować całą pół normę. Niech $z, w \in X$ będą takie, że $d(z,w) \geqslant \frac{1}{3}$. Wówczas

$$\begin{aligned} |u^*(x) - u^*(y)| &\leqslant 2\, \|u^*\|_{C(X,d)} \\ &= 2\, 3^{\alpha - \frac{s}{p}} \|u\|_{L^\infty(X,\mu)} \frac{1}{3^{\alpha - \frac{s}{p}}} \\ &\leqslant 2\, 3^{\alpha - \frac{s}{p}} \widetilde{C}\, \|u\|_{W_s^{\alpha,p}(X,d,\mu)}\, d(z,w)^{\alpha - \frac{s}{p}} \end{aligned}$$

□

### Twierdzenie 3 (P. Górka, A.S. 2020)

Niech $p, \alpha > 0$ spełniają $\alpha p = s$. Załóżmy, że $u$ jest skończona prawie wszędzie i taka, że $0 < [u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$ takie, że

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \fint_B \exp\left( \frac{|u(x) - c|}{C_1 [u]_{W_s^{\alpha,p}(X)}} \right) d\mu(x) \leqslant C_2$$

dla każdej kuli $B(z, R)$, $0 < R < 1/3$.

**Twierdzenie 3 (P. Górka, A.S. 2020)**

Niech $p, \alpha > 0$ spełniają $\alpha p = s$. Załóżmy, że $u$ jest skończona prawie wszędzie i taka, że $0 < [u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$. Wówczas istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$ takie, że

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \fint_B \exp\left(\frac{|u(x)-c|}{C_1[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)}}\right) d\mu(x) \leqslant C_2$$

dla każdej kuli $B(z,R)$, $0 < R < 1/3$.

Dowód: Bez utraty ogólności zakładamy, że $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} = 1$. Ustalamy sobie kulę $B(z,R)$, $0 < R < 1/3$. Przypomnijmy Stwierdzenie 2

**Stwierdzenie 2**

Niech $\alpha, p > 0$. Wówczas istnieje stała $A > 0$ taka, dla wszystkich $z \in X$, $0 < R < \frac{2}{3}$, $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$ oraz $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$ mamy

$$\left| m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(z, \frac{R}{2^i}\right)\right)\right| \leqslant A\,[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} R^{\alpha-\frac{s}{p}} \sum_{l=i}^{j-1} 2^{-l(\alpha-\frac{s}{p})}$$

# Dowód Tw. 3

W naszym przypadku otrzymujemy

$$\left| m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| \leqslant A(j - i)$$

dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$ i $x \in B(z, R)$.

# Dowód Tw. 3

W naszym przypadku otrzymujemy

$$\left| m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| \leqslant A(j-i)$$

dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$ i $x \in B(z, R)$.
Niech $k_0$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą, taką że $2^{k_0 s} \geqslant bR^{-s}$. Wówczas dla wszystkich $k \geqslant k_0$ mamy

$$\left| m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right) - m_u\Big(B\big(x, R\big)\Big) \right| \leqslant A(k-k_0). \tag{3}$$

Ponadto z definicji $k_0$ wynika, że

$$b \leqslant 2^{k_0 s} R^s < 2^s b$$

# Dowód Tw. 3

W naszym przypadku otrzymujemy

$$\left| m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^j}\right)\right) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^i}\right)\right) \right| \leqslant A(j-i)$$

dla wszystkich $i, j \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant i < j$ i $x \in B(z, R)$.
Niech $k_0$ będzie najmniejszą liczbą całkowitą, taką że $2^{k_0 s} \geqslant bR^{-s}$. Wówczas dla wszystkich $k \geqslant k_0$ mamy

$$\left| m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right) - m_u\left(B\left(x, R\right)\right) \right| \leqslant A(k-k_0). \tag{3}$$

Ponadto z definicji $k_0$ wynika, że

$$b \leqslant 2^{k_0 s} R^s < 2^s b$$

Teraz dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$ definiujemy zbiory

$$E_k = \left\{ x \in X : \int_{B(x,1)} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{2s}} \, d\mu(y) \leqslant 2^{ks} \right\}$$

Łatwo sprawdzić, że

$$1 \leqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) \leqslant 2^s$$

Teraz dla dowolnego $x \in E_k$, $k \geqslant k_0$ mamy

$$\begin{aligned}
\left| u(x) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right)\right| &\leqslant \left(2b\, 2^{(k-k_0)s} R^{-s} \int_{B(x, \frac{R}{2^{k-k_0}})} |u(x) - u(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
&\leqslant \left(2b\, 2^{(k-k_0)s} R^{-s} \int_{B(x, \frac{R}{2^{k-k_0}})} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{d(x,y)^{2s}} R^{2s}\, 2^{-2(k-k_0)s} \, d\mu(y)\right)^{1/p} \\
&\leqslant (2b\, 2^{-(k-k_0)s} R^s\, 2^{ks})^{1/p} \\
&= (2b\, 2^{k_0 s}\, R^s)^{1/p} < (2^{s+1} b^2)^{1/p}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Teraz dla dowolnego $x \in E_k,\ k \geqslant k_0$ mamy

$$\left| u(x) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right)\right| \leqslant \left(2b\,2^{(k-k_0)s} R^{-s} \int_{B(x,\frac{R}{2^{k-k_0}})} |u(x)-u(y)|^p \, d\mu(y)\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(2b\,2^{(k-k_0)s} R^{-s} \int_{B(x,\frac{R}{2^{k-k_0}})} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{2s}} R^{2s}\, 2^{-2(k-k_0)s} \, d\mu(y)\right)^{1/p}$$
$$\leqslant (2b\,2^{-(k-k_0)s} R^s\, 2^{ks})^{1/p}$$
$$= (2b\,2^{k_0 s}\, R^s)^{1/p} < (2^{s+1} b^2)^{1/p}. \tag{4}$$

Dla wszystkich $w \in B(z,R)$ mamy

$$|m_u(B(z,R)) - m_u(B(w,R))| \leqslant \left(2b\,R^{-s} \int_{B(z,R)} \Big| u(x) - m_u(B(w,R))\Big|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(4b^2\, R^{-2s} \int_{B(z,R)} \int_{B(w,R)} |u(x)-u(y)|^p \, d\mu(y)\, d\mu(x)\right)^{1/p}$$
$$\leqslant (4b^2\, 9^s)^{1/p} \left( \iint_{d(x,y)<1} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{d(x,y)^{2s}} \, d\mu(y)\, d\mu(x)\right)^{1/p}$$
$$= (4b^2\, 9^s)^{1/p}. \tag{5}$$

Teraz dla $x \in E_k \cap B(z,R)$ $k \geqslant k_0$ korzystamy z (3), (4), (5) i otrzymujemy

$$\left|u(x) - m_u(B(z,R))\right| \leqslant \left|u(x) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right)\right|$$
$$+ \left|m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right) - m_u\left(B\left(x,R\right)\right)\right| + |m_u(B(x,R)) - m_u(B(z,R))|$$
$$\leqslant (2^{s+1}b^2)^{1/p} + A(k-k_0) + (4b^2\,9^s)^{1/p} = A(k-k_0) + D.$$

Teraz dla $x \in E_k \cap B(z,R)$ $k \geqslant k_0$ korzystamy z (3), (4), (5) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big| &\leqslant \left|u(x) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right)\right| \\ &+ \left|m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right) - m_u\Big(B\big(x,R\big)\Big)\right| + |m_u(B(x,R)) - m_u(B(z,R))| \\ &\leqslant (2^{s+1}b^2)^{1/p} + A(k-k_0) + (4b^2\, 9^s)^{1/p} = A(k-k_0) + D.\end{aligned}$$

Niech teraz $C_1 = \frac{A}{\widetilde{C}}$, gdzie $\exp(\widetilde{C}) = 2^s$ oraz niech $C = \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}D\right)$. Z powyższej nierówności, nierówności $2^{k_0 s} \geqslant bR^{-s}$ i oszacowania na szereg miar otrzymujemy

$$\int_{B(z,R)} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big|\right) d\mu(x)$$

Teraz dla $x \in E_k \cap B(z,R)$ $k \geqslant k_0$ korzystamy z (3), (4), (5) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big| &\leqslant \left|u(x) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right)\right| \\ &+ \left|m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right) - m_u\Big(B\big(x,R\big)\Big)\right| + |m_u(B(x,R)) - m_u(B(z,R))| \\ &\leqslant (2^{s+1}b^2)^{1/p} + A(k-k_0) + (4b^2\,9^s)^{1/p} = A(k-k_0) + D.\end{aligned}$$

Niech teraz $C_1 = \frac{A}{\widetilde{C}}$, gdzie $\exp(\widetilde{C}) = 2^s$ oraz niech $C = \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}D\right)$. Z powyższej nierówności, nierówności $2^{k_0 s} \geqslant bR^{-s}$ i oszacowania na szereg miar otrzymujemy

$$\int_{B(z,R)} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big|\right) d\mu(x)$$

$$\leqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{B(z,R)\cap(E_k\setminus E_{k-1})} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}\Big(A(k-k_0)+D\Big)\right) d\mu(x) + \int_{B(z,R)\cap E_{k_0}} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}D\right) d\mu(x)$$

Teraz dla $x \in E_k \cap B(z,R)$ $k \geqslant k_0$ korzystamy z (3), (4), (5) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big| &\leqslant \left|u(x) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right)\right| \\
&\quad + \left|m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right) - m_u\Big(B\big(x,R\big)\Big)\right| + |m_u(B(x,R)) - m_u(B(z,R))| \\
&\leqslant (2^{s+1}b^2)^{1/p} + A(k-k_0) + (4b^2\, 9^s)^{1/p} = A(k-k_0) + D.
\end{aligned}$$

Niech teraz $C_1 = \frac{A}{\widetilde{C}}$, gdzie $\exp(\widetilde{C}) = 2^s$ oraz niech $C = \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A} D\right)$. Z powyższej nierówności, nierówności $2^{k_0 s} \geqslant bR^{-s}$ i oszacowania na szereg miar otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\int_{B(z,R)} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big|\right) d\mu(x) \\
&\leqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{B(z,R)\cap(E_k\setminus E_{k-1})} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}\Big(A(k-k_0)+D\Big)\right) d\mu(x) + \int_{B(z,R)\cap E_{k_0}} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A} D\right) d\mu(x) \\
&\leqslant C\, 2^{-k_0 s} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) + C\mu\Big(B(z,R) \cap E_{k_0}\Big)
\end{aligned}$$

Teraz dla $x \in E_k \cap B(z,R)$ $k \geqslant k_0$ korzystamy z (3), (4), (5) i otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big| &\leqslant \left|u(x) - m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right)\right| \\ &+ \left|m_u\left(B\left(x, \frac{R}{2^{k-k_0}}\right)\right) - m_u\Big(B\big(x,R\big)\Big)\right| + |m_u(B(x,R)) - m_u(B(z,R))| \\ &\leqslant (2^{s+1}b^2)^{1/p} + A(k-k_0) + (4b^2\,9^s)^{1/p} = A(k-k_0) + D.\end{aligned}$$

Niech teraz $C_1 = \frac{A}{\widetilde{C}}$, gdzie $\exp(\widetilde{C}) = 2^s$ oraz niech $C = \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}D\right)$. Z powyższej nierówności, nierówności $2^{k_0 s} \geqslant bR^{-s}$ i oszacowania na szereg miar otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\int_{B(z,R)} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}\Big|u(x) - m_u(B(z,R))\Big|\right) d\mu(x) \\ &\leqslant \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \int_{B(z,R)\cap(E_k \setminus E_{k-1})} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}\Big(A(k-k_0)+D\Big)\right) d\mu(x) + \int_{B(z,R)\cap E_{k_0}} \exp\left(\frac{\widetilde{C}}{A}D\right) d\mu(x) \\ &\leqslant C\,2^{-k_0 s} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{ks}\mu(E_k \setminus E_{k-1}) + C\mu\Big(B(z,R)\cap E_{k_0}\Big) \\ &\leqslant C2^s\,\frac{1}{b}R^s + C\mu(B(z,R)) \leqslant C(2^s+1)\,\mu(B(z,R)) = C_2\,\mu(B(z,R))\end{aligned}$$

# $\alpha p < s$

**Twierdzenie 4 (P. Górka, A.S. 2020)**

Niech $\alpha, p > 0$ spełniają $\alpha p < s$. Załóżmy że $u$ jest skończona prawie wszędzie oraz $[u]_{W_s^{\alpha,p}(X)} < \infty$.Wówczas istnieje stała $C > 0$, taka że

$$\left( \fint_{B(z,R)} |u(x) - m_u(B(z,R))|^{p^*} \, d\mu(x) \right)^{1/p^*} \leqslant C \, R^{\alpha - \frac{s}{p}} \, [u]_{W_s^{\alpha,p}(X)}$$

dla każdej kuli $B(z,R)$ $0 < R < 1/3$, gdzie $p^* = \frac{sp}{s - \alpha p}$.

Dziękuje za uwagę!