Izometrie w metryce Hausdorffa

Kacper Kurowski

26 listopada 2020

Definicja (Metryka)

Niech Ω *będzie dowolnym zbiorem. Funkcję* $\mathrm{d}\colon \Omega \times \Omega \to [0, \infty)$ *nazwiemy metryką na zbiorze* Ω*, jeśli*

1. $\forall x, y \in \Omega \quad \mathrm{d}(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $\forall x, y \in \Omega \quad \mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, x)$,
3. $\forall x, y, z \in \Omega \quad \mathrm{d}(x, z) \leqslant \mathrm{d}(x, y) + \mathrm{d}(y, z)$.

Parę uporządkowaną (Ω, d)*, gdzie* d *jest metryką na* Ω*, nazwiemy przestrzenią metryczną.*

Definicja ($\varepsilon-$otoczka zbioru)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Niech* $X \subseteq \Omega$ *oraz* $\varepsilon \geqslant 0$*.*
$\varepsilon-$*otoczką zbioru* X *nazwiemy zbiór*

$$X^\varepsilon := \{\omega \in \Omega \colon \exists x \in X \quad \mathrm{d}(x, \omega) \leqslant \varepsilon\} = \bigcup_{x \in X} \overline{B}(x, \varepsilon).$$

Definicja ($\varepsilon-$otoczka zbioru)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Niech* $X \subseteq \Omega$ *oraz* $\varepsilon \geqslant 0$*.*
$\varepsilon-$*otoczką zbioru* X *nazwiemy zbiór*

$$X^{\varepsilon} := \left\{\omega \in \Omega \colon \exists x \in X \quad \mathrm{d}(x, \omega) \leqslant \varepsilon\right\} = \bigcup_{x \in X} \overline{B}(x, \varepsilon).$$

Własności $\varepsilon-$otoczki:

- $\forall X, Y \subseteq \Omega \ \forall \varepsilon \geqslant 0 \quad X \subseteq Y \implies X^{\varepsilon} \subseteq Y^{\varepsilon}$,
- $\forall X \subseteq \Omega \ \forall \varepsilon, \lambda \geqslant 0 \quad \varepsilon \leqslant \lambda \implies X^{\varepsilon} \subseteq X^{\lambda}$,
- $\forall \omega \in \Omega \ \forall \varepsilon \geqslant 0 \quad \{\omega\}^{\varepsilon} = \overline{B}(\omega, \varepsilon)$
- $\forall \omega \in \Omega \ \forall \varepsilon, r \geqslant 0 \ \forall S \subseteq S(\omega, r) \quad \{\omega\} \subseteq S^{\varepsilon} \implies \varepsilon \geqslant r$.
  (Jeśli $\{\omega\} \subseteq S^{\varepsilon}$, to $r = \mathrm{d}(\omega, s) \leqslant \varepsilon$ dla pewnego $s \in S$.)

Metryka Hausdorffa

Definicja (Odległość Hausdorffa)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Odległością Hausdorffa (między podzbiorami* Ω*, generowaną przez* d*) nazwiemy funkcję* $\mathrm{d_H}\colon 2^\Omega \times 2^\Omega \to [0, \infty]$ *zdefiniowaną wzorem*

$$\forall X, Y \subseteq \Omega \quad \mathrm{d_H}(X, Y) := \inf\left\{\lambda \geqslant 0\colon X \subseteq Y^\lambda \wedge Y \subseteq X^\lambda\right\}.$$

Metryka Hausdorffa

Definicja (Odległość Hausdorffa)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Odległością Hausdorffa (między podzbiorami* Ω*, generowaną przez* d*) nazwiemy funkcję* $\mathrm{d_H}\colon 2^\Omega \times 2^\Omega \to [0,\infty]$ *zdefiniowaną wzorem*

$$\forall X, Y \subseteq \Omega \quad \mathrm{d_H}(X,Y) := \inf\left\{\lambda \geqslant 0\colon X \subseteq Y^\lambda \wedge Y \subseteq X^\lambda\right\}.$$

Funkcja $\mathrm{d_H}$ jest metryką na rodzinach:

1. $\mathfrak{F}(\Omega)$ - niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów Ω,
2. $\mathfrak{C}(\Omega)$ - niepustych, zwartych podzbiorów Ω,
3. jest wiele innych możliwości

Metryka Hausdorffa

Stwierdzenie (O wybijaniu minimum)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Dla elementów rodziny* $\mathfrak{C}(\Omega)$ *infimum w definicji funkcji* $\mathrm{d_H}$ *może zostać zastąpione przez minimum, to znaczy zachodzi:*

$$\forall K, C \in \mathfrak{C}(\Omega) \quad \mathrm{d_H}(K, C) = \min \left\{ \lambda \geqslant 0 \colon K \subseteq C^{\lambda} \wedge C \subseteq K^{\lambda} \right\}.$$

Ponadto, dla dowolnych $K, C \in \mathfrak{C}(\Omega)$ *mamy:*

$$\forall k \in K \ \ \exists c \in C \quad \mathrm{d}(k, c) \leqslant \mathrm{d_H}(K, C).$$

Zbiory wartości metryk d i $\mathrm{d_H}$ są identyczne, jeśli $\mathrm{d_H}$ zawęzimy do rodziny $\mathfrak{C}(\Omega)$.

Skonstruowanie z (Ω, d) przestrzeni $(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d}_{\mathrm{H}})$ zachowuje wiele własności:

- zupełność,
- zwartość,
- spójność,
- ośrodkowość,
- ...

Definicja (Izometria, rodzina $\mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$)

Niech $(\Omega_1, \mathrm{d}_1), (\Omega_2, \mathrm{d}_2)$ *będą przestrzeniami metrycznymi.*
Przekształcenie $i\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ *nazwiemy izometrią, jeśli:*

1. *jest bijekcją,*
2. $\forall \omega, \upsilon \in \Omega_1 \quad \mathrm{d}_1(\omega, \upsilon) = \mathrm{d}_2\big(i(\omega), i(\upsilon)\big)$.

Jeśli spełniony jest tylko drugi warunek, to i *nazwiemy izometrią na obraz.*
Dla danej przestrzeni metrycznej (Ω, d) *rodzinę wszystkich izometrii* $i\colon \Omega \to \Omega$ *będziemy oznaczać symbolem* $\mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$.

Izometrie

Definicja (Izometria, rodzina $\mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$)

Niech $(\Omega_1, \mathrm{d}_1), (\Omega_2, \mathrm{d}_2)$ *będą przestrzeniami metrycznymi. Przekształcenie* $i\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ *nazwiemy izometrią, jeśli:*

1. *jest bijekcją,*
2. $\forall \omega, \upsilon \in \Omega_1 \quad \mathrm{d}_1(\omega, \upsilon) = \mathrm{d}_2\big(i(\omega), i(\upsilon)\big).$

Jeśli spełniony jest tylko drugi warunek, to i *nazwiemy izometrią na obraz.*
Dla danej przestrzeni metrycznej (Ω, d) *rodzinę wszystkich izometrii* $i\colon \Omega \to \Omega$ *będziemy oznaczać symbolem* $\mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$.

Uwaga

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Wówczas przyporządkowanie* $\Omega \ni \omega \mapsto \{\omega\} \in \mathfrak{C}(\Omega)$ *jest izometrią na obraz. Innymi słowy, zachodzi:*

$$\forall \omega, \nu \in \Omega \quad \mathrm{d}(\omega, \nu) = \mathrm{d}_{\mathrm{H}}(\{\omega\}, \{\nu\})$$

Definicja (Izometra generowalna)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Izometrię* $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *nazwiemy generowalną, jeśli istnieje izometria* $i \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$ *taka, że*

$$\forall K \in \mathfrak{C}(\Omega) \quad I(K) = i[K] := \left\{ i(k) \colon k \in K \right\}.$$

Będziemy również wówczas mówić, że izometria i *generuje izometrię* I. *Jeżeli taka* i *nie istnieje, to izometrię* I *nazwiemy niegenerowalną. Jeżeli wszystkie izometrie przestrzeni* $(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *są generowalne, to powiemy, że przestrzeń* (Ω, d) *ma własność generowania izometrii.*

Izometrie

Stwierdzenie

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Każda izometria* $i \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$ *generuje izometrię przestrzeni* $\mathfrak{C}(\Omega)$ *na siebie.*

Izometrie

Stwierdzenie

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Każda izometria* $i \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$ *generuje izometrię przestrzeni* $\mathfrak{C}(\Omega)$ *na siebie.*

Dowód.

Niech $i \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$. Zdefiniujmy przekształcenie $I \colon \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Omega)$ wzorem $I(K) := i[K]$ dla każdego $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$. Pokażemy, że $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$. $\square$

Stwierdzenie

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Każda izometria* $i \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$ *generuje izometrię przestrzeni* $\mathfrak{C}(\Omega)$ *na siebie.*

Dowód.

Niech $i \in \mathrm{Isom}(\Omega, \mathrm{d})$. Zdefiniujmy przekształcenie $I \colon \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Omega)$ wzorem $I(K) := i[K]$ dla każdego $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$. Pokażemy, że $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$.
Przeciwdziedzina jest prawidłowa, bo i jest ciagła a ciągłe obrazy zbiorów zwartych są zwarte. Zauważmy, ze I jest odwracalna, bo przekształcenie $I' \colon \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Omega)$ zadane wzorem

$$\forall K \in \mathfrak{C}(K) \quad I'(K) := i^{-1}[K]$$

jest jego odwrotnością. Zatem I to bijekcja i $I' = I^{-1}$. $\square$

Dowód c.d.

Ostatnim krokiem w celu pokazania, że $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ będzie wykazanie, że I zachowuje metrykę $\mathrm{d_H}$. Ustalmy $K, C \in \mathfrak{C}(\Omega)$. Wykażemy wpierw, że $I(K) \subseteq I(C)^{\mathrm{d_H}(K,C)}$.

$\square$

Dowód c.d.

Ostatnim krokiem w celu pokazania, że $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ będzie wykazanie, że I zachowuje metrykę $\mathrm{d_H}$. Ustalmy $K, C \in \mathfrak{C}(\Omega)$. Wykażemy wpierw, że $I(K) \subseteq I(C)^{\mathrm{d_H}(K,C)}$.
Ustalmy $k' \in I(K)$. Skoro $I(K) = i[K]$, to istnieje $k \in K$ takie, że $k' = i(k)$. Zgodnie ze Stwierdzeniem o wybijaniu minimum musi istnieć $c \in C$ takie, że $\mathrm{d}(k, c) \leqslant \mathrm{d_H}(K, C)$. Zatem, dla $c' := i(c)$ mamy

$$\mathrm{d}(k', c') = \mathrm{d}(i(k), i(c)) = \mathrm{d}(k, c) \leqslant \mathrm{d_H}(K, C),$$

więc $k' \in \{c'\}^{\mathrm{d_H}(K,C)} \subseteq I(C)^{\mathrm{d_H}(K,C)}$. Skoro $k' \in I(K)$ był dowolny, to $I(K) \subseteq I(C)^{\mathrm{d_H}(K,C)}$.

$\square$

Izometrie

Dowód c.d.

Ostatnim krokiem w celu pokazania, że $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ będzie wykazanie, że I zachowuje metrykę $\mathrm{d_H}$. Ustalmy $K, C \in \mathfrak{C}(\Omega)$.
Wykażemy wpierw, że $I(K) \subseteq I(C)^{\mathrm{d_H}(K,C)}$.
Ustalmy $k' \in I(K)$. Skoro $I(K) = i[K]$, to istnieje $k \in K$ takie, że $k' = i(k)$. Zgodnie ze Stwierdzeniem o wybijaniu minimum musi istnieć $c \in C$ takie, że $\mathrm{d}(k, c) \leqslant \mathrm{d_H}(K, C)$. Zatem, dla $c' := i(c)$ mamy

$$\mathrm{d}(k', c') = \mathrm{d}(i(k), i(c)) = \mathrm{d}(k, c) \leqslant \mathrm{d_H}(K, C),$$

więc $k' \in \{c'\}^{\mathrm{d_H}(K,C)} \subseteq I(C)^{\mathrm{d_H}(K,C)}$. Skoro $k' \in I(K)$ był dowolny, to $I(K) \subseteq I(C)^{\mathrm{d_H}(K,C)}$.
Zauważmy teraz, że stosując analogiczne rozumowanie możemy pokazać, że $I(C) \subseteq I(K)^{\mathrm{d_H}(K,C)}$, co, w parze z wcześniej pokazanym zawieraniem implikuje, że $\mathrm{d_H}(I(K), I(C)) \leqslant \mathrm{d_H}(K, C)$. $\square$

Dowód c.d.

Dalej, stosując argumentację analogiczną do tej, dzięki której pokazaliśmy, że $\mathrm{d_H}(I(K), I(C)) \leqslant \mathrm{d_H}(K, C)$, możemy pokazać, iż $\mathrm{d_H}(I^{-1}(K), I^{-1}(C)) \leqslant \mathrm{d_H}(K, C)$ (dla dowolnych $K, C \in \mathfrak{C}(\Omega)$). Stąd

$$\mathrm{d_H}(K, C) = \mathrm{d_H}\big(I^{-1}(I(K)), I^{-1}(I(C))\big) \leqslant \mathrm{d_H}(I(K), I(C)).$$

To, w połączeniu z nierównością $\mathrm{d_H}(I(K), I(C)) \leqslant \mathrm{d_H}(K, C)$ pokazuje, że $\mathrm{d_H}(I(K), I(C)) = \mathrm{d_H}(K, C)$. Skoro $K, C \in \mathfrak{C}(\Omega)$ były dowolne, to I zachowuje wartość $\mathrm{d_H}$. $\square$

Pytanie

Uwaga

Czy dla danej przestrzeni metrycznej (Ω, d) *wszystkie izometrie rodziny* $(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *muszą być generowalne?*

Pytanie

Uwaga

Czy dla danej przestrzeni metrycznej (Ω, d) *wszystkie izometrie rodziny* $(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *muszą być generowalne?*

Przyklad (Znane rezultaty)

- *W* $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ *(*$\mathbb{R}^n$ *z metryką euklidesową) odpowiedź jest twierdząca (P.M.Gruber: The space of compact subsets of E d 1980),*

Pytanie

Uwaga

Czy dla danej przestrzeni metrycznej (Ω, d) *wszystkie izometrie rodziny* $(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *muszą być generowalne?*

Przyklad (Znane rezultaty)

- *W* $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ *($\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową) odpowiedź jest twierdząca (P.M.Gruber: The space of compact subsets of E d 1980),*
- *W* S^n *i* T^n *(n-sferze i n-torusie) odpowiedź jest twierdząca (P.M.Gruber, R.Tichy: Isometries of spaces of compact or compact convex subsets of metric manifolds 1982),*

Pytanie

Uwaga

Czy dla danej przestrzeni metrycznej (Ω, d) *wszystkie izometrie rodziny* $(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *muszą być generowalne?*

Przyklad (Znane rezultaty)

- *W* $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ *($\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową) odpowiedź jest twierdząca (P.M.Gruber: The space of compact subsets of E d 1980),*
- *W* S^n *i* T^n *(n-sferze i n-torusie) odpowiedź jest twierdząca (P.M.Gruber, R.Tichy: Isometries of spaces of compact or compact convex subsets of metric manifolds 1982),*
- *W* (Ω, d) *-* ***właściwej*** *przestrzeni geodezyjnej z jednoznacznymi i obustronnie przedłużalnymi liniami geodezyjnymi, których przedłużenia się nie rozwidlają - definicje za chwilę - odpowiedź jest twierdząca (T. Foertsch : Isometries of spaces of convex compact subsets of CAT(0)-spaces 2004)*

Własciwiość przestrzeni i Geodezyjne

Definicja (Przestrzeń właściwa)

Przestrzeń metryczną nazwiemy ***właściwą****, jeśli zbiory domknięte i ograniczone są w niej zwarte.*

Własciwiość przestrzeni i Geodezyjne

Definicja (Przestrzeń właściwa)

Przestrzeń metryczną nazwiemy ***właściwą****, jeśli zbiory domknięte i ograniczone są w niej zwarte.*

Definicja (Linie geodezyjne)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Dla dowolnych* $a, b \in \mathbb{R}$ *i* $I \in \{(-\infty, +\infty), (-\infty, b], [a, +\infty), [a, b]\}$ *przekształcenie* $\gamma \colon I \to \Omega$, *gdzie* γ *jest izometrią na obraz z przestrzeni* $(I, |\cdot|)$ *nazwiemy linią geodezyjną. W przypadku* $I = [a, b]$, *mówimy, że* γ *łączy* $\gamma(a)$ *z* $\gamma(b)$. *Powiemy, że* (Ω, d) *jest przestrzenią geodezyjną, jeśli dla dowolnych* $x, y \in \Omega$ *istnieje linia geodezyjna łącząca* x *z* y.

Definicja (c.d.)

Dwie linie geodezyjne γ_1, γ_2 *nazwiemy różnymi, jeśli mają różne zbiory wartości. Dla danych* $x, y \in \Omega$ *powiemy, że linia geodezyjna łącząca* x *z* y *jest jednoznaczna, jeżeli istnieje dokładnie jedna linia geodezyjna łącząca* x *z* y*. Powiemy, że* (Ω, d) *jest przestrzenią z jednoznacznymi liniami geodezyjnymi jeżeli dla każdych* $x, y \in \Omega$ *istnieje jednoznaczna linia geodezyjna łącząca* x *z* y*.*

Definicja (c.d.)

Obustronnym przedłużeniem linii geodezyjnej γ, której dziedziną nie jest punkt, nazwiemy linię geodezyjną $\widetilde{\gamma}\colon (-\infty, +\infty) \to \Omega$ taką, że $Im(\gamma) \subseteq Im(\widetilde{\gamma})$. Jeśli istnieje takie przedłużenie linii geodezyjnej, to powiemy, że jest ona obustronnie przedłużalna. Ponadto, jeśli istnieje tylko jedno takie przedłużenie, to powiemy, że przedłużenia się nie rozwidlają. Dla wygody będziemy przyjmowali, że $\widetilde{\gamma}|_{Dm\gamma} = \gamma$, gdzie $Dm\gamma$ jest dziedziną linii geodezyjnej γ.

Lemat (O singletonach)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią z jednoznacznymi i obustronnie przedłużalnymi liniami geodezyjnymi, których przedłużenia się nie rozwidlają i* $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$. *Wtedy* $I[\mathfrak{S}(\Omega)] = \mathfrak{S}(\Omega)$, *gdzie* $\mathfrak{S}(\Omega)$ *jest rodziną wszystkich singletonów* Ω.

Kluczowe Lematy

Lemat (O singletonach)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią z jednoznacznymi i obustronnie przedłużalnymi liniami geodezyjnymi, których przedłużenia się nie rozwidlają i* $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$*. Wtedy* $I[\mathfrak{S}(\Omega)] = \mathfrak{S}(\Omega)$*, gdzie* $\mathfrak{S}(\Omega)$ *jest rodziną wszystkich singletonów* Ω*.*

Uwaga

Jeśli $I[\mathfrak{S}(\Omega)] = \mathfrak{S}(\Omega)$*, to możemy zdefiniować funkcję* $i \colon \Omega \to \Omega$ *poprzez relację*

$$\forall \omega \in \Omega \quad I(\{\omega\}) = \left\{ i(\omega) \right\}.$$

Wówczas jest ona izometrią, bo dla każdych $\omega, \nu \in \Omega$ *mamy:*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\omega, \nu) &= \mathrm{d_H}(\{\omega\}, \{\nu\}) \\ &= \mathrm{d_H}(I(\{\omega\}), I(\{\nu\})) = \mathrm{d_H}(\left\{i(\omega)\right\}, \left\{i(\nu)\right\}) = \mathrm{d}(i(\omega), i(\nu)) \end{aligned}$$

Zdefiniujmy $J \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *wzorem* $J(K) = i^{-1}\left[I(K)\right]$ *dla* $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$*. Wówczas dla każdego* $\omega \in \Omega$ *mamy* $J(\{\omega\}) = \{\omega\}$*.*

Kluczowe Lematy

Lemat (O skończonych podzbiorach sfery)

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią z jednoznacznymi i obustronnie przedłużalnymi liniami geodezyjnymi, których przedłużenia się nie rozwidlają. Niech* ω *będzie jej elementem, a* $r > 0$. *Niech* $J \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *będzie taka, że dla każdego* $\eta \in \Omega$ *zachodzi* $J(\{\eta\}) = \{\eta\}$. *Wtedy dla każdego skończonego (i niepustego)* $S \subseteq S(\omega, r)$ *zachodzi* $J(S) = S$.

Główne Twierdzenie

Twierdzenie

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią z jednoznacznymi i obustronnie przedłużalnymi liniami geodezyjnymi, których przedłużenia się nie rozwidlają. Wówczas wszystkie izometrie przestrzeni* $(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *są generowalne.*

Uwaga

Dowód będzie niemalże kopią dowodu z argumentacji Foertscha. Uzyskujemy ogólniejszy rezultat, bo poprzednie dwa lematy dało się wykazać bez zakładania właściwości przestrzeni.

Dowód.

Ustalmy $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$. Zgodnie z Lematem o singletonach możemy zdefiniować dla I izometrię J tak jak w Uwadze po nim. Zauważmy, że jeśli pokażemy, że $J(K) = K$ dla każdego $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$, to $I(K) = i[K]$, czyli izometria I jest generowalna.

$\square$

Dowód.

Ustalmy $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$. Zgodnie z Lematem o singletonach możemy zdefiniować dla I izometrię J tak jak w Uwadze po nim. Zauważmy, że jeśli pokażemy, że $J(K) = K$ dla każdego $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$, to $I(K) = i[K]$, czyli izometria I jest generowalna.
Ustalmy $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$. Pokażemy, że $J(K) = K$ poprzez sprowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy, że $K \neq J(K)$ i bez straty ogólności załóżmy, że $K \not\subseteq J(K)$. Istnieje wtedy $k \in K \setminus J(K)$. Skoro $J(K)$ jest zwarty, to istnieje $\widetilde{k} \in J(K)$ taki, że

$$\mathrm{d}(k, \widetilde{k}) = \inf \left\{ \mathrm{d}(k, k') \colon k' \in J(K) \right\}$$

i zachodzi $\mathrm{d}(k, \widetilde{k}) > 0$. Oznaczmy $\mu := \frac{1}{2}\mathrm{d}(k, \widetilde{k})$.

□

Dowód.

Ustalmy $I \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$. Zgodnie z Lematem o singletonach możemy zdefiniować dla I izometrię J tak jak w Uwadze po nim. Zauważmy, że jeśli pokażemy, że $J(K) = K$ dla każdego $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$, to $I(K) = i[K]$, czyli izometria I jest generowalna.
Ustalmy $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$. Pokażemy, że $J(K) = K$ poprzez sprowadzenie do sprzeczności. Przypuśćmy, że $K \neq J(K)$ i bez straty ogólności załóżmy, że $K \not\subseteq J(K)$. Istnieje wtedy $k \in K \setminus J(K)$. Skoro $J(K)$ jest zwarty, to istnieje $\widetilde{k} \in J(K)$ taki, że

$$\mathrm{d}(k, \widetilde{k}) = \inf \left\{ \mathrm{d}(k, k') \colon k' \in J(K) \right\}$$

i zachodzi $\mathrm{d}(k, \widetilde{k}) > 0$. Oznaczmy $\mu := \frac{1}{2}\mathrm{d}(k, \widetilde{k})$.
Wówczas $\bigcup_{k' \in J(K)} B(k', \mathrm{d}(k, k') - \mu)$ jest otwartym pokryciem zbioru $J(K)$. Skoro $J(K)$ jest zwarty, to możemy wybrać z niego skończone podpokrycie, a więc istnieje $\left\{k_1', k_2', \ldots, k_n'\right\} \subseteq J(K)$ taki, że

$$J(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(k_i', \mathrm{d}(k, k_i') - \mu) \tag{1}$$

Dowód.

Ustalmy $\lambda > 2\mu + \mathrm{diam}(J(K))$ i $i \in [n] := \{1, \ldots, n\}$. Niech $\gamma_i \colon [0, \mathrm{d}(k, k_i')] \to \Omega$ będzie linią geodezyjną łączącą k z k_i' i niech $\widetilde{\gamma}_i$ będzie jej obustronnym przedłużeniem. Zgodnie z konwencją, mamy $\widetilde{\gamma}_i|_{[0,\mathrm{d}(k,k_i')]} = \gamma_i$.

$\square$

Dowód.

Ustalmy $\lambda > 2\mu + \mathrm{diam}(J(K))$ i $i \in [n] := \{1, \ldots, n\}$. Niech $\gamma_i \colon [0, \mathrm{d}(k, k_i')] \to \Omega$ będzie linią geodezyjną łączącą k z k_i' i niech $\widetilde{\gamma}_i$ będzie jej obustronnym przedłużeniem. Zgodnie z konwencją, mamy $\widetilde{\gamma}_i|_{[0, \mathrm{d}(k, k_i')]} = \gamma_i$.
Oznaczmy $c_i := \widetilde{\gamma}_i(\lambda)$. Dla takiego c_i mamy:

$$\mathrm{d}(k, c_i) = \mathrm{d}(\widetilde{\gamma}_i(0), \widetilde{\gamma}_i(\lambda)) = |0 - \lambda| = \lambda,$$

czyli $\mathrm{d}(k, c_i) = \lambda$. $\square$

Dowód.

Ustalmy $\lambda > 2\mu + \mathrm{diam}(J(K))$ i $i \in [n] := \{1, \ldots, n\}$. Niech $\gamma_i : [0, \mathrm{d}(k, k_i')] \to \Omega$ będzie linią geodezyjną łączącą k z k_i' i niech $\widetilde{\gamma}_i$ będzie jej obustronnym przedłużeniem. Zgodnie z konwencją, mamy $\widetilde{\gamma}_i|_{[0,\mathrm{d}(k,k_i')]} = \gamma_i$.
Oznaczmy $c_i := \widetilde{\gamma}_i(\lambda)$. Dla takiego c_i mamy:

$$\mathrm{d}(k, c_i) = \mathrm{d}(\widetilde{\gamma}_i(0), \widetilde{\gamma}_i(\lambda)) = |0 - \lambda| = \lambda,$$

czyli $\mathrm{d}(k, c_i) = \lambda$. Zauważmy, że zachodzi:

$$\mathrm{d}(k, k_i') \leqslant \mathrm{d}(k, \widetilde{k}) + \mathrm{d}(\widetilde{k}, k_i') \leqslant 2\mu + \mathrm{diam}(J(K)) < \lambda,$$

czyli $\mathrm{d}(k, k_i') < \lambda$.

$\square$

Dowód.

Ustalmy $\lambda > 2\mu + \mathrm{diam}(J(K))$ i $i \in [n] := \{1, \ldots, n\}$. Niech $\gamma_i \colon [0, \mathrm{d}(k, k_i')] \to \Omega$ będzie linią geodezyjną łączącą k z k_i' i niech $\widetilde{\gamma}_i$ będzie jej obustronnym przedłużeniem. Zgodnie z konwencją, mamy $\widetilde{\gamma}_i|_{[0,\mathrm{d}(k,k_i')]} = \gamma_i$.
Oznaczmy $c_i := \widetilde{\gamma}_i(\lambda)$. Dla takiego c_i mamy:

$$\mathrm{d}(k, c_i) = \mathrm{d}(\widetilde{\gamma}_i(0), \widetilde{\gamma}_i(\lambda)) = |0 - \lambda| = \lambda,$$

czyli $\mathrm{d}(k, c_i) = \lambda$. Zauważmy, że zachodzi:

$$\mathrm{d}(k, k_i') \leqslant \mathrm{d}(k, \widetilde{k}) + \mathrm{d}(\widetilde{k}, k_i') \leqslant 2\mu + \mathrm{diam}(J(K)) < \lambda,$$

czyli $\mathrm{d}(k, k_i') < \lambda$. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(k, c_i) = \lambda = \mathrm{d}(k, k_i') + (\lambda - \mathrm{d}(k, k_i')) = \mathrm{d}(k, k_i') + \left|\lambda - \mathrm{d}(k, k_i')\right| \\ = \mathrm{d}(k, k_i') + \mathrm{d}(\widetilde{\gamma}_i(\mathrm{d}(k, k_i')), \widetilde{\gamma}_i(\lambda)) = \mathrm{d}(k, k_i') + \mathrm{d}(k_i', c_i), \end{aligned}$$

czyli $\mathrm{d}(k, c_i) = \mathrm{d}(k, k_i') + \mathrm{d}(k_i', c_i)$. $\square$

Dowód.

Otrzymaliśmy w powyższy sposób punkty $c_1, \ldots, c_n \in \Omega$ takie, że dla każdego $i \in [n]$ zachodzi

$$\lambda = \mathrm{d}(k, c_i) = \mathrm{d}(k, k_i') + \mathrm{d}(k_i', c_i).$$

W szczególności, punkt $c_i \in S(k, \lambda)$ dla każdego $i \in [n]$.

$\square$

Dowód.

Otrzymaliśmy w powyższy sposób punkty $c_1, \ldots, c_n \in \Omega$ takie, że dla każdego $i \in [n]$ zachodzi

$$\lambda = \mathrm{d}(k, c_i) = \mathrm{d}(k, k_i') + \mathrm{d}(k_i', c_i).$$

W szczególności, punkt $c_i \in S(k, \lambda)$ dla każdego $i \in [n]$.
Zauważmy następnie, że $\bigcup_{i=1}^n B(c_i, \lambda - \mu)$ jest otwartym pokryciem $J(K)$. Istotnie, ustalmy $k' \in \bigcup_{i=1}^n B(k_i', \mathrm{d}(k, k_i') - \mu)$, które, jak wiemy z (1), jest otwartym pokryciem $J(K)$. Istnieje wtedy $i \in [n]$ takie, że $k' \in B(k_i', \mathrm{d}(k, k_i') - \mu)$, czyli $\mathrm{d}(k_i', k') < \mathrm{d}(k, k_i') - \mu$. Stąd

$$\mathrm{d}(k', c_i) \leqslant \mathrm{d}(k', k_i') + \mathrm{d}(k_i', c_i) < \big(\mathrm{d}(k, k_i') - \mu\big) + \big(\lambda - \mathrm{d}(k, k_i')\big) = \lambda - \mu$$

i $k' \in B(c_i, \lambda - \mu)$.

□

Dowód.

Otrzymaliśmy w powyższy sposób punkty $c_1, \ldots, c_n \in \Omega$ takie, że dla każdego $i \in [n]$ zachodzi

$$\lambda = \mathrm{d}(k, c_i) = \mathrm{d}(k, k_i') + \mathrm{d}(k_i', c_i).$$

W szczególności, punkt $c_i \in S(k, \lambda)$ dla każdego $i \in [n]$.
Zauważmy następnie, że $\bigcup_{i=1}^{n} B(c_i, \lambda - \mu)$ jest otwartym pokryciem $J(K)$. Istotnie, ustalmy $k' \in \bigcup_{i=1}^{n} B(k_i', \mathrm{d}(k, k_i') - \mu)$, które, jak wiemy z (1), jest otwartym pokryciem $J(K)$. Istnieje wtedy $i \in [n]$ takie, że $k' \in B(k_i', \mathrm{d}(k, k_i') - \mu)$, czyli $\mathrm{d}(k_i', k') < \mathrm{d}(k, k_i') - \mu$. Stąd

$$\mathrm{d}(k', c_i) \leqslant \mathrm{d}(k', k_i') + \mathrm{d}(k_i', c_i) < \big(\mathrm{d}(k, k_i') - \mu\big) + \big(\lambda - \mathrm{d}(k, k_i')\big) = \lambda - \mu$$

i $k' \in B(c_i, \lambda - \mu)$. Skoro k' był dowolny, to:

$$J(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(k_i', \mathrm{d}(k, k_i') - \mu) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(c_i, \lambda - \mu).$$

□

Dowód.

Oznaczmy $S := \{c_1, \ldots, c_n\}$. Poprzednie zawieranie pozwala nam stwierdzić, że

$$J(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(c_i, \lambda - \mu) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(c_i, \lambda - \mu) = S^{\lambda - \mu},$$

więc $J(K) \subseteq S^{\lambda - \mu}$.

$\square$

Dowód.

Oznaczmy $S := \{c_1, \dots, c_n\}$. Poprzednie zawieranie pozwala nam stwierdzić, że

$$J(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(c_i, \lambda - \mu) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(c_i, \lambda - \mu) = S^{\lambda-\mu},$$

więc $J(K) \subseteq S^{\lambda-\mu}$. Z drugiej strony, dla każdego $c_i \in S$ istnieje k_i' taki, że

$$\mathrm{d}(c_i, k_i') = \mathrm{d}(c_i, k) - \mathrm{d}(k, k_i') = \lambda - \mathrm{d}(k, k_i') \leqslant \lambda - 2\mu,$$

więc $S \subseteq \left\{k_1', \dots, k_n'\right\}^{\lambda-2\mu} \subseteq J(K)^{\lambda-2\mu}$. Otrzymujemy zatem, że $\mathrm{d_H}(S, J(K)) \leqslant \lambda - \mu$. □

Dowód.

Oznaczmy $S := \{c_1, \ldots, c_n\}$. Poprzednie zawieranie pozwala nam stwierdzić, że

$$J(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(c_i, \lambda - \mu) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \overline{B}(c_i, \lambda - \mu) = S^{\lambda - \mu},$$

więc $J(K) \subseteq S^{\lambda-\mu}$. Z drugiej strony, dla każdego $c_i \in S$ istnieje k_i' taki, że

$$\mathrm{d}(c_i, k_i') = \mathrm{d}(c_i, k) - \mathrm{d}(k, k_i') = \lambda - \mathrm{d}(k, k_i') \leqslant \lambda - 2\mu,$$

więc $S \subseteq \left\{k_1', \ldots, k_n'\right\}^{\lambda - 2\mu} \subseteq J(K)^{\lambda - 2\mu}$. Otrzymujemy zatem, że $\mathrm{d_H}(S, J(K)) \leqslant \lambda - \mu$.

Dalej, skoro $S = \{c_1, \ \ldots, \ c_n\}$ oraz dla każdego $i \in [n]$ mamy $c_i \in S(k, \lambda)$, to S jest skończony a ponadto $S \subseteq S(k, \lambda)$. Zatem, zgodnie z Lematem o skończonych podzbiorach sfer mamy, że $J(S) = S$, więc $\mathrm{d_H}(J(S), J(K)) = \mathrm{d_H}(S, J(K)) \leqslant \lambda - \mu$. Jako że $J \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$, to mamy

$$\mathrm{d_H}(S, K) = \mathrm{d_H}(J(S), J(K)) \leqslant \lambda - \mu. \tag{2}$$

$\square$

Dowód.

Z drugiej strony, skoro $S = \{c_1, \ldots, c_n\}$ a $\mathrm{d}(k, c_i) = \lambda$ dla każdego $i \in [n]$, to $S \subseteq S(k, \lambda)$. Z własności $\varepsilon-$otoczek wiemy, że jeśli $\{k\} \subseteq S^\varepsilon$, to $\varepsilon \geqslant \lambda$. Stąd dla $\varepsilon < \lambda$ mamy $\{k\} \not\subseteq S^\varepsilon$, więc też $K \not\subseteq S^\varepsilon$. Stąd $\mathrm{d_H}(K, S) \geqslant \lambda$. To daje nam jednak sprzeczność z (2), gdyż $\mu > 0$. $\square$

Dowód.

Z drugiej strony, skoro $S = \{c_1, \ldots, c_n\}$ a $\mathrm{d}(k, c_i) = \lambda$ dla każdego $i \in [n]$, to $S \subseteq S(k, \lambda)$. Z własności $\varepsilon-$otoczek wiemy, że jeśli $\{k\} \subseteq S^\varepsilon$, to $\varepsilon \geqslant \lambda$. Stąd dla $\varepsilon < \lambda$ mamy $\{k\} \nsubseteq S^\varepsilon$, więc też $K \nsubseteq S^\varepsilon$. Stąd $\mathrm{d_H}(K, S) \geqslant \lambda$. To daje nam jednak sprzeczność z (2), gdyż $\mu > 0$. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że nie może istnieć $k \in K \setminus J(K)$, czyli

$K \subseteq J(K)$. Zastosowanie analogicznego rozumowania, tym razem dla $J^{-1} \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ pozwala udowodnić, że $J(K) \subseteq J^{-1}(J(K)) = K$. Skoro mamy zawieranie w obydwie strony, to mamy równość, czyli $K = J(K)$.

$\square$

Dowód.

Z drugiej strony, skoro $S = \{c_1, \ldots, c_n\}$ a $\mathrm{d}(k, c_i) = \lambda$ dla każdego $i \in [n]$, to $S \subseteq S(k, \lambda)$. Z własności $\varepsilon-$otoczek wiemy, że jeśli $\{k\} \subseteq S^\varepsilon$, to $\varepsilon \geqslant \lambda$. Stąd dla $\varepsilon < \lambda$ mamy $\{k\} \nsubseteq S^\varepsilon$, więc też $K \nsubseteq S^\varepsilon$. Stąd $\mathrm{d_H}(K, S) \geqslant \lambda$. To daje nam jednak sprzeczność z (2), gdyż $\mu > 0$.

Otrzymana sprzeczność pokazuje, że nie może istnieć $k \in K \setminus J(K)$, czyli $K \subseteq J(K)$. Zastosowanie analogicznego rozumowania, tym razem dla $J^{-1} \in \mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ pozwala udowodnić, że $J(K) \subseteq J^{-1}(J(K)) = K$. Skoro mamy zawieranie w obydwie strony, to mamy równość, czyli $K = J(K)$. Zbiór $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$ był dowolny, więc dla każdego $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$

mamy $J(K) = K$ i jak zaznaczyliśmy na początku dowodu, własność ta implikuje, że $I(K) = i[K]$ dla dowolnego $K \in \mathfrak{C}(\Omega)$. Zatem izometria I jest generowalna. Skoro była ona dowolnym elementem $\mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$, to wszystkie izometrie przestrzeni $(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ są generowalne. □

Uwaga

Jeśli by udowodnić lematy: O singletonach i O skończonych podzbiorach sfery bez zakładania jednoznaczności geodezyjnych lub ich przedłużeń, to moglibyśmy przeprowadzić dokładnie to samo rozumowanie co powyżej, by wykazać, że przy tych ogólniejszych założeniach mamy generowanie izometrii.

Uwaga

Dokładnie te przestrzenie unormowane $(\Omega,\|\cdot\|)$ *nad* $\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$*, które są ściśle wypukłe, tzn. takie, które spełniają warunek*

$$\forall \omega, \nu \in \Omega \setminus \{0\} \quad \|\omega + \nu\| = \|\omega\| + \|\nu\| \implies \exists c > 0 \quad \omega = c\nu$$

potraktowane jako przestrzeń metryczna z metryką generowaną przez normę, są przestrzeniami z jednoznacznymi liniami geodezyjnymi, które są obustronnie przedłużalne i ich przedłużenia się nie rozwidlają.

Uwaga

Dokładnie te przestrzenie unormowane $(\Omega, \|\cdot\|)$ *nad* $\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$*, które są ściśle wypukłe, tzn. takie, które spełniają warunek*

$$\forall \omega, \nu \in \Omega \setminus \{0\} \quad \|\omega + \nu\| = \|\omega\| + \|\nu\| \implies \exists c > 0 \quad \omega = c\nu$$

potraktowane jako przestrzeń metryczna z metryką generowaną przez normę, są przestrzeniami z jednoznacznymi liniami geodezyjnymi, które są obustronnie przedłużalne i ich przedłużenia się nie rozwidlają.

Przyklad

Przykłady ściśle wypukłych przestrzeni unormowanych:

- *Każda przestrzeń z iloczynem skalarnym nad* $\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$*.*
- *Przestrzenie* L^p *funkcji o wartościach w* $\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$*, gdzie* $p \in (1, \infty)$*.*

Skoro istnieją nieskończenie wymiarowe ściśle wypukłe przestrzenie unormowane (nad $\mathbb{R}$ *lub* $\mathbb{C}$*), to otrzymany rezultat jest ogólniejszy niż Foertscha. (Zwartość kuli domkniętej (właściwość przestrzeni) w przestrzeniach unormowanych implikuje skończoność wymiaru)*

Kontrprzykłady

Przyklad

Rozważmy przestrzeń (Ω, d) *z metryką dyskretną. Wówczas metryka* d *przyjmuje tylko dwie możliwe wartości:* 0 *lub* 1*. Stąd* $\mathrm{d_H}$ *przyjmuje dokładnie te wartości, więc jest metryką dyskretną.*

W przestrzeniach z metryką dyskretną każda bijekcja jest izometrią. Istnieją zatem izometrie $(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$*, które nie są generowane przez izometrię* (Ω, d)*. (np. taka, która tylko zamienia* $\{\omega\} \leftrightarrow \{\omega, \nu\}$*, gdzie* $\omega, \nu \in \Omega$ *różne.)*

Twierdzenie

Niech (Ω, d) *będzie zwartą przestrzenią metryczną* $|\Omega| \geqslant 2$, *w której istnieje izolowany punkt* $x \in \Omega$ *taki, że*

$$\forall \omega, \upsilon \in \Omega \qquad \omega \neq \upsilon \implies \mathrm{d}(\omega, x) \leqslant \mathrm{d}(\omega, \upsilon).$$

Wtedy przekształcenie $I\colon \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Omega)$ *zadane wzorem*

$$I(K) = \begin{cases} \Omega \setminus \{x\}, & \textit{jeśli } K = \Omega, \\ \Omega, & \textit{jeśli } K = \Omega \setminus \{x\}, \\ K, & \textit{wpp.} \end{cases}$$

jest niegenerowalnym elementem $\mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$.

Kontrprzykłady

Twierdzenie

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Załóżmy, że istnieją różne* $x, y \in \Omega$*, dla których:*

1. $\forall \omega \in \Omega \setminus \{x, y\} \quad \mathrm{d}(x, \omega) = \mathrm{d}(y, \omega)$,
2. $\mathrm{d}(x, y) = \inf \left\{\mathrm{d}(\omega, y) \colon \omega \neq y\right\}$.

Wtedy przekształcenie $I \colon \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Omega)$ *zdefiniowane wzorem*

$$I(K) := \begin{cases} K \setminus \{y\}, & \text{jeśli } x, y \in K, \\ K \cup \{y\}, & \text{jeśli } x \in K \wedge y \notin K, \\ K, & \text{wpp.} \end{cases}$$

jest niegenerowalnym elementem $\mathrm{Isom}(\mathfrak{C}(\Omega), \mathrm{d}_{\mathrm{H}})$.

Wniosek

Rozważmy następującą konstrukcję: Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Ustalmy* $\eta \in \Omega$. *Weźmy różne* $x, y \notin \Omega$. *Rozważmy przestrzeń* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathrm{d}})$, *gdzie* $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup \{x, y\}$, *zaś* $\widetilde{\mathrm{d}} \colon \widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega} \to [0, \infty)$ *jest symetryczną funkcją zadana wzorem:*

$$\widetilde{\mathrm{d}}(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 0, & \text{dla } \omega_1 = \omega_2, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } \omega_1 = x \text{ i } \omega_2 = y, \\ \mathrm{d}(\omega_1, \omega_2), & \text{dla } \omega_1, \omega_2 \in \Omega, \\ 1 + \mathrm{d}(\eta, \omega_2), & \text{dla } \omega_1 \in \{x, y\} \text{ i } \omega_2 \in \Omega. \end{cases}$$

Zdefiniowana powyższym wzorem funkcja $\widetilde{\mathrm{d}}$ *jest wtedy metryką na* $\widetilde{\Omega}$, *czyli* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathrm{d}})$ *jest przestrzenią metryczną. Ponadto, przestrzeń ta spełnia założenia poprzedniego Twierdzenia.*

Wniosek

Rozważmy następującą konstrukcję: Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną. Ustalmy* $\eta \in \Omega$. *Weźmy różne* $x, y \notin \Omega$. *Rozważmy przestrzeń* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathrm{d}})$, *gdzie* $\widetilde{\Omega} = \Omega \cup \{x, y\}$, *zaś* $\widetilde{\mathrm{d}} \colon \widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega} \to [0, \infty)$ *jest symetryczną funkcją zadana wzorem:*

$$\widetilde{\mathrm{d}}(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 0, & \text{dla } \omega_1 = \omega_2, \\ \frac{1}{2}, & \text{dla } \omega_1 = x \text{ i } \omega_2 = y, \\ \mathrm{d}(\omega_1, \omega_2), & \text{dla } \omega_1, \omega_2 \in \Omega, \\ 1 + \mathrm{d}(\eta, \omega_2), & \text{dla } \omega_1 \in \{x, y\} \text{ i } \omega_2 \in \Omega. \end{cases}$$

Zdefiniowana powyższym wzorem funkcja $\widetilde{\mathrm{d}}$ *jest wtedy metryką na* $\widetilde{\Omega}$, *czyli* $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathrm{d}})$ *jest przestrzenią metryczną. Ponadto, przestrzeń ta spełnia założenia poprzedniego Twierdzenia.*

Uwaga

Powyższa konstrukcja jest różnowartościowa w tym sensie, że jeśli jej rezultaty są izometryczne, to wyjściowe przestrzenie były izometryczne.

Wniosek

Każdą przestrzeń metryczną możemy powyższą konstrukcją przekształcić w przestrzeń metryczną, w której istnieją niegenerowalne izometrie rodziny $\mathfrak{C}$.

Uwagi końcowe

- Otrzymany rezultat może być pierwszym pozytywnym wynikiem, gdy (Ω, d) nie jest właściwą przestrzenią metryczną. Możemy postawić więc pytanie o generowalność izometrii rodziny $\mathfrak{F}(\Omega)$ (niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów),

Uwagi końcowe

- Otrzymany rezultat może być pierwszym pozytywnym wynikiem, gdy (Ω, d) nie jest właściwą przestrzenią metryczną. Możemy postawić więc pytanie o generowalność izometrii rodziny $\mathfrak{F}(\Omega)$ (niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów),
- Możemy również postawić podobne pytanie w innych podrodzinach $\mathfrak{F}(\Omega)$, np. w rodzinie $\mathcal{C}(\Omega)$ - niepustych, zwartych i wypukłych podzbiorów Ω. (...)

Uwagi końcowe

- Otrzymany rezultat może być pierwszym pozytywnym wynikiem, gdy (Ω, d) nie jest właściwą przestrzenią metryczną. Możemy postawić więc pytanie o generowalność izometrii rodziny $\mathfrak{F}(\Omega)$ (niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów),
- Możemy również postawić podobne pytanie w innych podrodzinach $\mathfrak{F}(\Omega)$, np. w rodzinie $\mathcal{C}(\Omega)$ - niepustych, zwartych i wypukłych podzbiorów Ω. (...)
- Wszystkie przedstawione kontrprzykłady są przestrzeniami niespójnymi (co więcej, z punktami izolowanymi - czy to może być istotne?)

Uwagi końcowe

- Otrzymany rezultat może być pierwszym pozytywnym wynikiem, gdy (Ω, d) nie jest właściwą przestrzenią metryczną. Możemy postawić więc pytanie o generowalność izometrii rodziny $\mathfrak{F}(\Omega)$ (niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów),
- Możemy również postawić podobne pytanie w innych podrodzinach $\mathfrak{F}(\Omega)$, np. w rodzinie $\mathcal{C}(\Omega)$ - niepustych, zwartych i wypukłych podzbiorów Ω. (...)
- Wszystkie przedstawione kontrprzykłady są przestrzeniami niespójnymi (co więcej, z punktami izolowanymi - czy to może być istotne?)
- Dotychczas rozważaliśmy sytuację, gdy dziedzina i przeciwdziedzina izometrii jest taka sama. Co się dzieje, gdy tak nie jest? Czy z izometryczności $\mathfrak{C}(\Omega)$ i $\mathfrak{C}(\Xi)$ wynika izometryczność Ω i Ξ?

Również pokazane (z dokładnością do oznaczeń)

Uwaga

Niech (Ω, d), (Ξ, ρ) *będą przestrzeniami z jednoznacznymi, obustronnie przedłużalnymi liniami geodezyjnymi, których przedłużenia się nie rozwidlają. Niech* $I : \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Xi)$ *będzie izometrią. Wówczas* $I[\mathfrak{S}(\Omega)] = \mathfrak{S}(\Xi)$.

Również pokazane (z dokładnością do oznaczeń)

Uwaga

Niech (Ω, d), (Ξ, ρ) *będą przestrzeniami z jednoznacznymi, obustronnie przedłużalnymi liniami geodezyjnymi, których przedłużenia się nie rozwidlają. Niech* $I \colon \mathfrak{C}(\Omega) \to \mathfrak{C}(\Xi)$ *będzie izometrią. Wówczas* $I[\mathfrak{S}(\Omega)] = \mathfrak{S}(\Xi)$.

Wniosek

Podobnie jak w Uwadze po Lemacie o singletonach możemy zdefiniować funkcję $i \colon \Omega \to \Xi$ *poprzez zależność:*

$$\forall \omega \in \Omega \quad I(\{\omega\}) = \{i(\omega)\}$$

Wówczas i *to izometria, czyli* Ω *i* Ξ *są izometryczne. Ponadto, izometria* I *jest generowana przez* i *wzorem:*

$$\forall K \in \mathfrak{C}(\Omega) \quad I(K) = i[K].$$

Może wkrótce

Definicja

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią metryczną i* $x, z \in \Omega$*. Punkt* y *nazwiemy punktem pośrednim między* x *a* z*, jeśli zachodzi:*

$$\mathrm{d}(x, y) = \mathrm{d}(y, z) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x, z).$$

Jeśli istnieje tylko jeden $y \in \Omega$ *spełniający powyższy warunek, punkt ten będziemy oznaczymy przez* $\mathrm{mid}(x, z)$*.*
Jeśli dla dowolnych $x, z \in \Omega$ *istnieje tylko jeden punkt pośredni to* $\mathrm{mid}\colon \Omega \times \Omega \to \Omega$ *nazwiemy funkcją punktu pośredniego.*

Może wkrótce

Definicja

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią geodezyjną. Podzbiór* $C \subseteq \Omega$ *nazwiemy wypukłym, jeśli dla dowolnych* $x, y \in C$ *i dowolnej geodezyjnej* γ *łączącej* x *z* y *zbiór wartości* γ *jest podzbiorem* C*.*
Dla danego $A \subseteq \Omega$ *najmniejszy zbiór wypukły zawierający* A *będziemy oznaczali przez* $\mathrm{co}(A)$*. Zbiór ten nazwiemy otoczką wypukłą zbioru* A*.*
Rodzinę wszystkich niepustych, zwartych i wypukłych podzbiorów Ω *oznaczmy przez* $\mathcal{C}(\Omega)$*.*

Może wkrótce

Hipoteza

Niech (Ω, d) *będzie przestrzenią z jednoznacznymi liniami geodezyjnymi, które są obustronnie przedłużalne i ich przedłużenia się nie rozwidlają. Załóżmy ponadto, że funkcja punktu pośredniego* $\mathrm{mid}\colon \Omega \times \Omega \to \Omega$ *jest m-wypukła, tzn.*

$$\forall a, b, c, d \in \Omega \quad \mathrm{d}(\mathrm{mid}(a, b), \mathrm{mid}(c, d)) \leqslant \frac{\mathrm{d}(a, c) + \mathrm{d}(b, d)}{2}$$

oraz, że zachodzi:

$$\forall C \in \mathcal{C}(\Omega) \ \ \forall \omega \in \Omega \quad \overline{\mathrm{co}(C \cup \{\omega\})} \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Wówczas wszystkie izometrie $I \in \mathrm{Isom}(\mathcal{C}(\Omega), \mathrm{d_H})$ *są generowalne.*

Dziękuję za uwagę!

- P.M.Gruber: *The space of compact subsets of E d* 1980,
- P.M.Gruber, R.Tichy: *Isometries of spaces of compact or compact convex subsets of metric manifolds* 1982,
- T. Foertsch : *Isometries of spaces of convex compact subsets of CAT(0)-spaces* 2004