

Przestrzenie polskie krzywych przyczynowych

Tomasz Miller



Centrum Kopernika Badań Interdyscyplinarnych UJ



We współpracy z **Michałem Ecksteinem** (UJ)



oraz **Pawłem i Ryszardem Horodeckimi** (UG)





Otwarte Seminarium z RRCz, MiNI PW, 29 X 2020

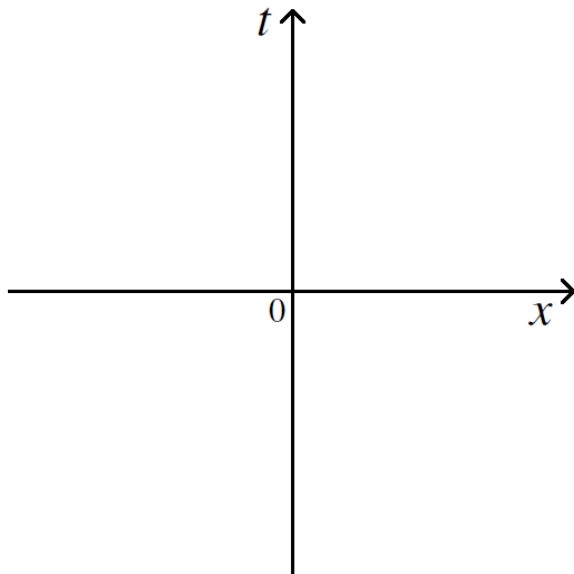
- Intuicje i motywacje
 - Czym jest czasoprzestrzeń?
 - Czym jest linia świata?
 - Czym jest relacja przyczynowego poprzedzania?
- Elementy teorii przyczynowości
 - Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych
- Topologie na przestrzeni krzywych przyczynowych
 - Topologia C^0
 - Topologia słaba- H_{loc}^1 
- Związek z równaniem ciągłości 

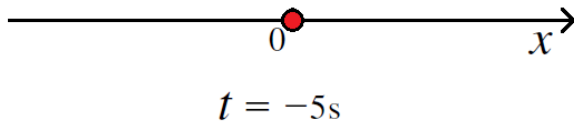
- Intuicje i motywacje
 - Czym jest czasoprzestrzeń?
 - Czym jest linia świata?
 - Czym jest relacja przyczynowego poprzedzania?
- Elementy teorii przyczynowości
 - Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych
- Topologie na przestrzeni krzywych przyczynowych
 - Topologia C^0
 - Topologia słaba- H_{loc}^1 
- Związek z równaniem ciągłości 

- Intuicje i motywacje
 - Czym jest czasoprzestrzeń?
 - Czym jest linia świata?
 - Czym jest relacja przyczynowego poprzedzania?
- Elementy teorii przyczynowości
 - Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych
- Topologie na przestrzeni krzywych przyczynowych
 - Topologia C^0
 - Topologia słaba- H_{loc}^1 
- Związek z równaniem ciągłości 

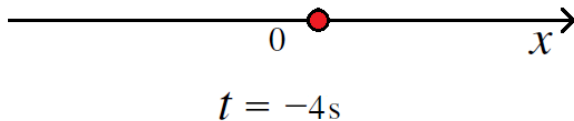
- Intuicje i motywacje
 - Czym jest czasoprzestrzeń?
 - Czym jest linia świata?
 - Czym jest relacja przyczynowego poprzedzania?
- Elementy teorii przyczynowości
 - Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych
- Topologie na przestrzeni krzywych przyczynowych
 - Topologia C^0
 - Topologia słaba- H_{loc}^1 
- Związek z równaniem ciągłości 

Intuicje i motywacje

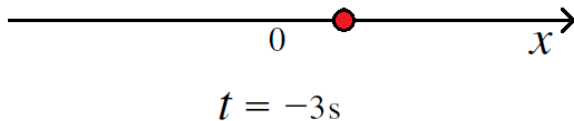




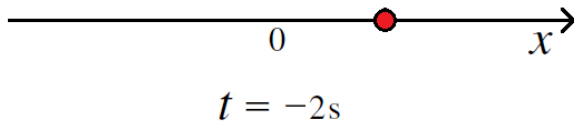
Intuicje i motywacje



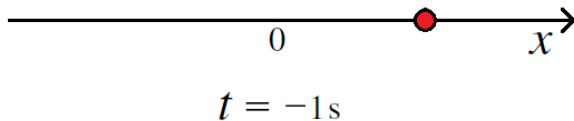
Intuicje i motywacje



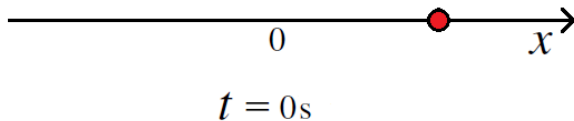
Intuicje i motywacje



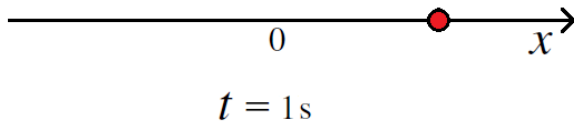
Intuicje i motywacje



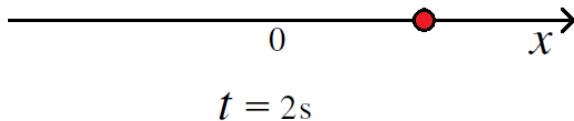
Intuicje i motywacje



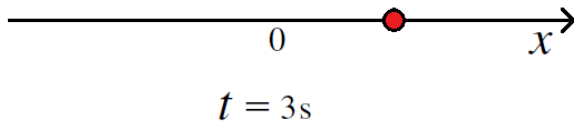
Intuicje i motywacje



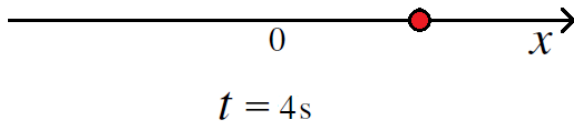
Intuicje i motywacje



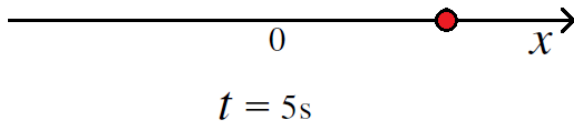
Intuicje i motywacje



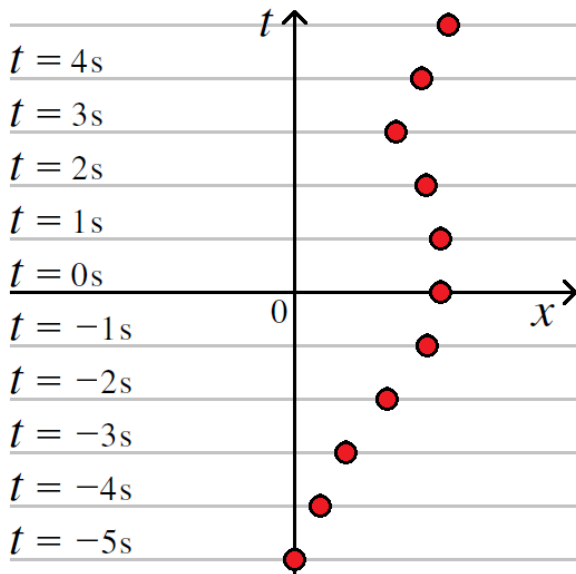
Intuicje i motywacje



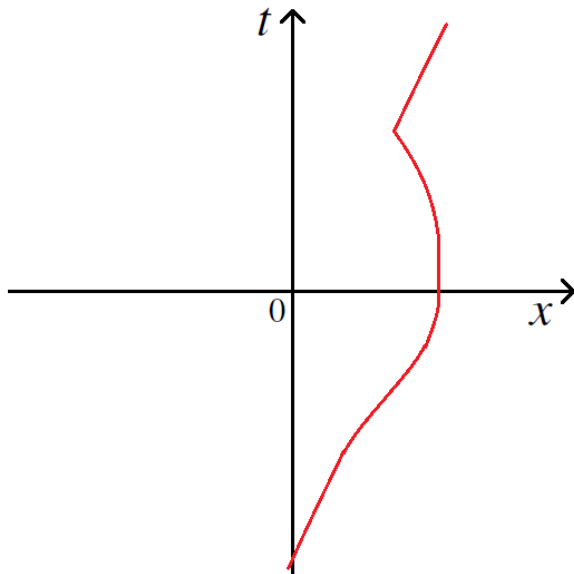
Intuicje i motywacje



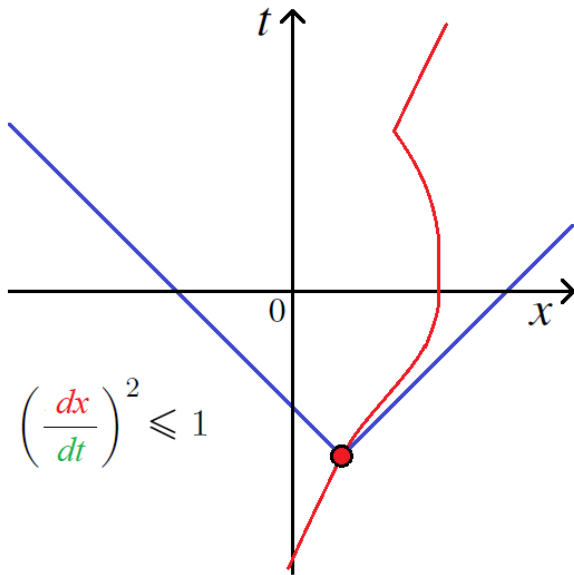
Intuicje i motywacje



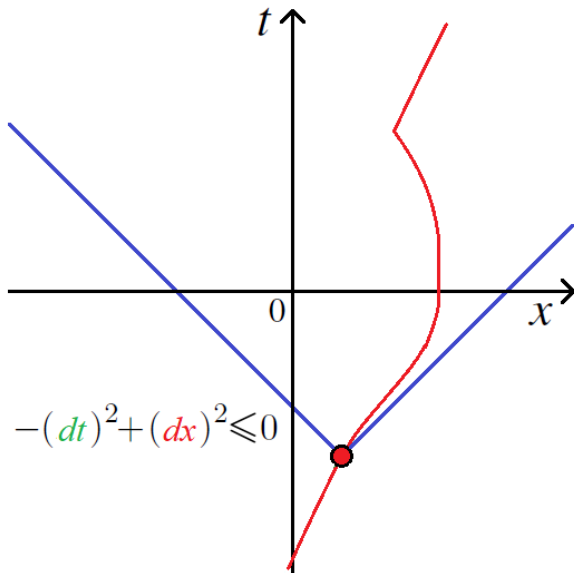
Czym jest linia świata?



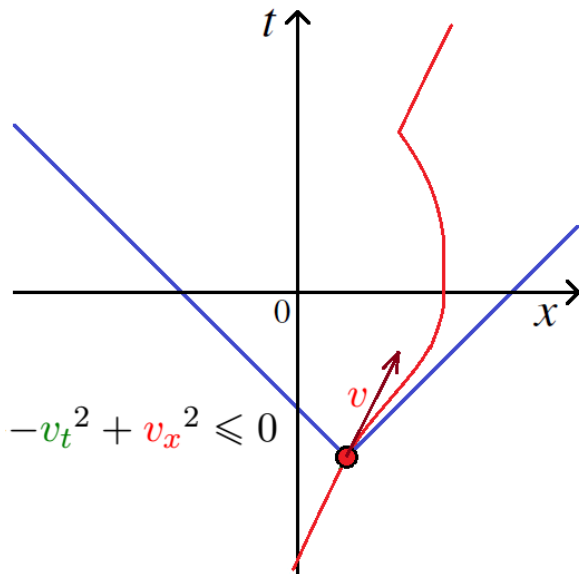
Czym jest linia świata?



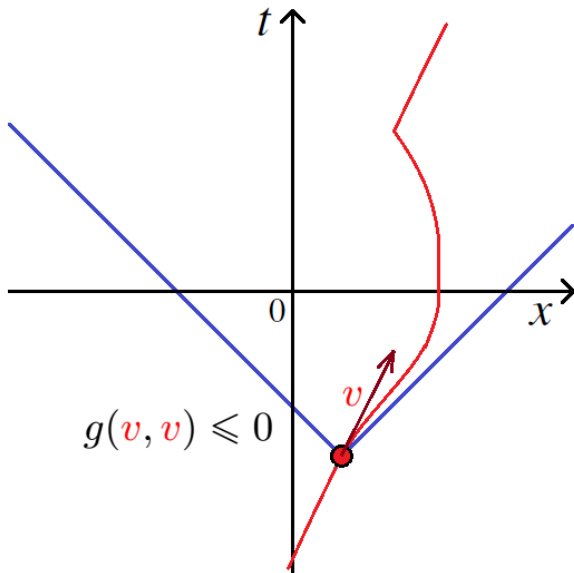
Czym jest linia świata?



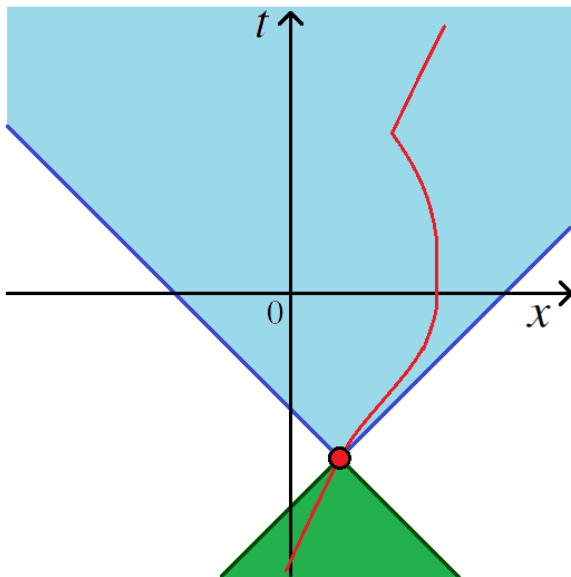
Czym jest linia świata?



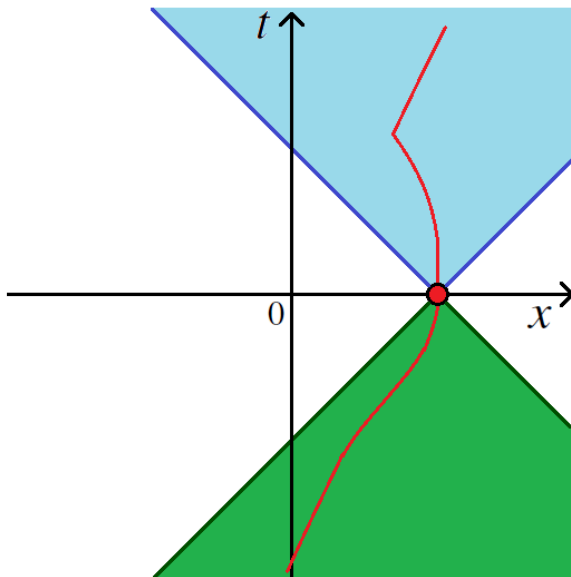
Czym jest linia świata?



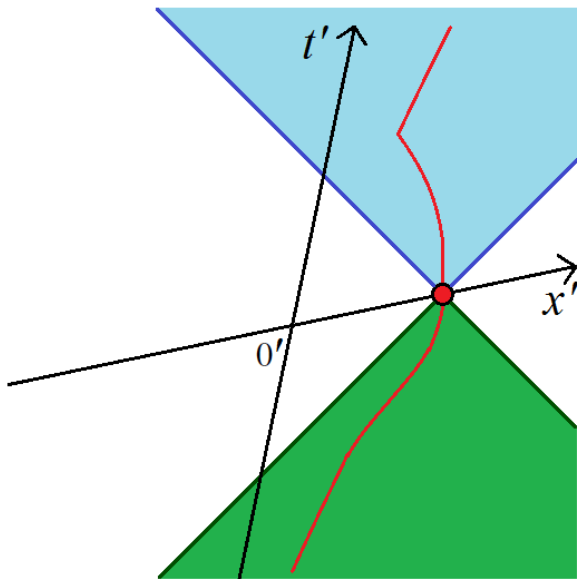
Czym jest linia świata?



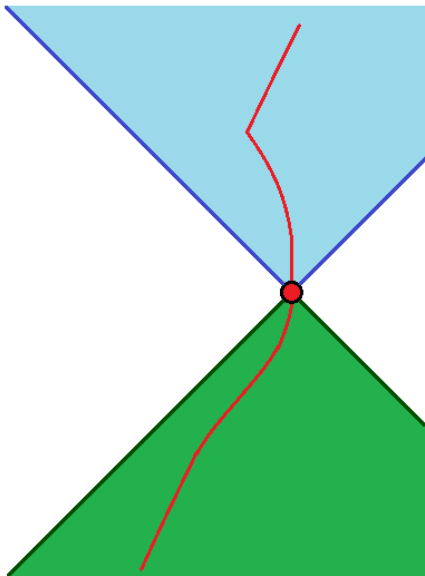
Czym jest linia świata?



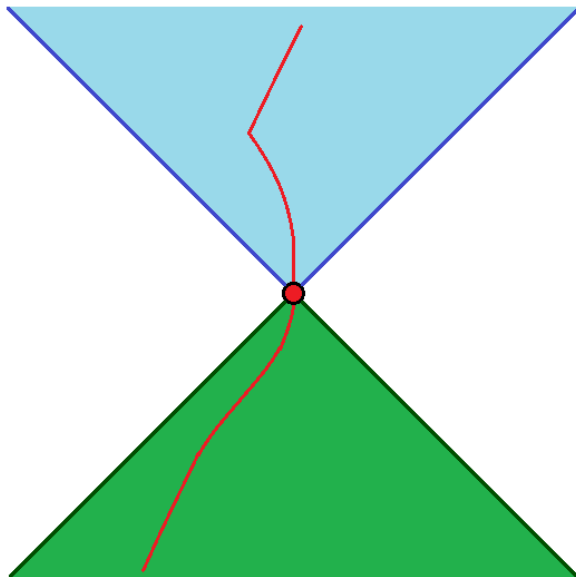
Czym jest linia świata?



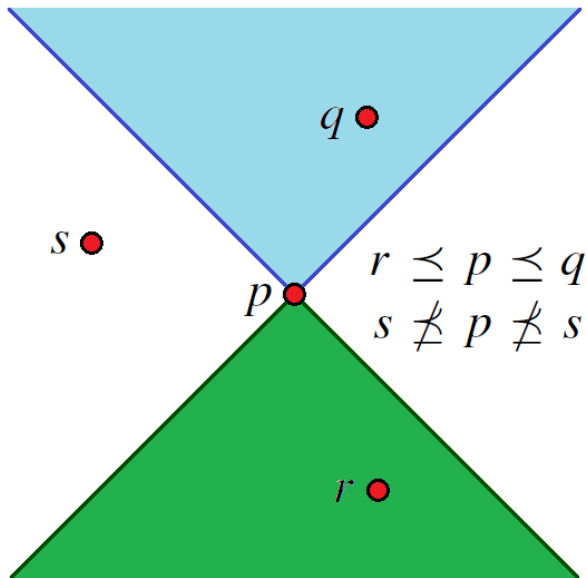
Czym jest linia świata?



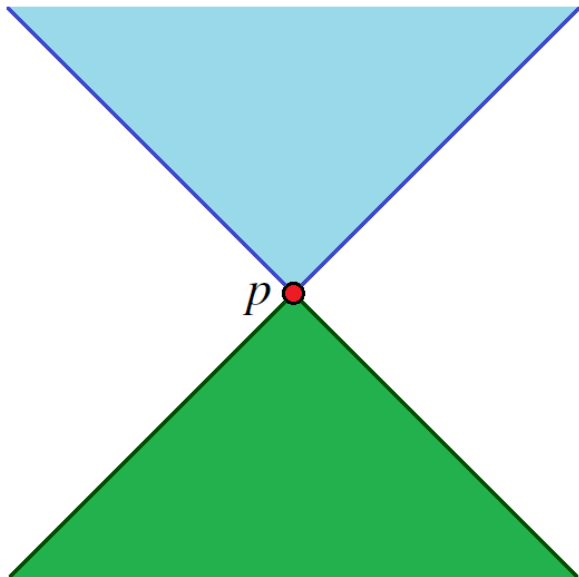
Czym jest relacja przyczynowego poprzedzania zdarzeń?



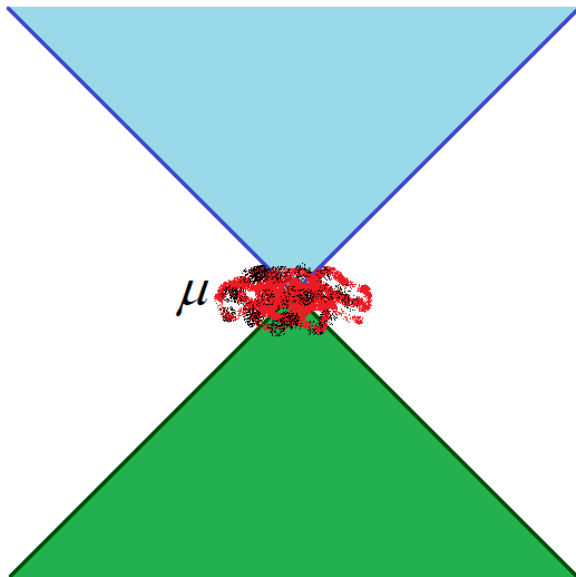
Czym jest relacja przyczynowego poprzedzania zdarzeń?



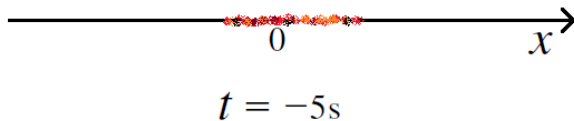
Czym jest relacja przyczynowego poprzedzania zdarzeń?



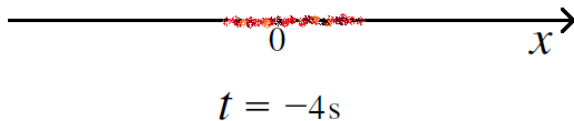
Czym jest relacja przyczynowego poprzedzania **miar prob.**?



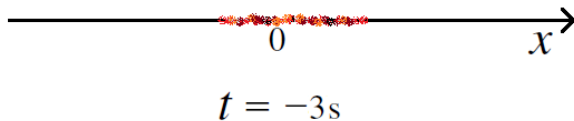
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



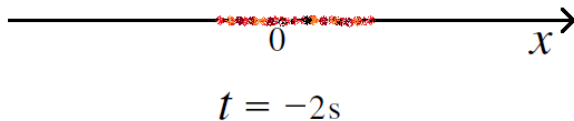
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



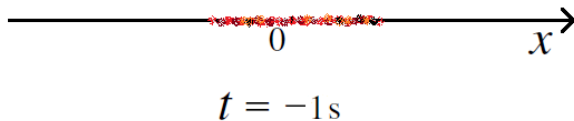
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



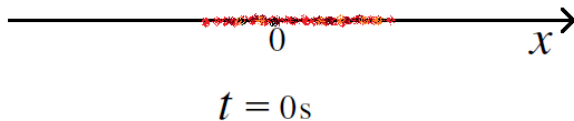
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



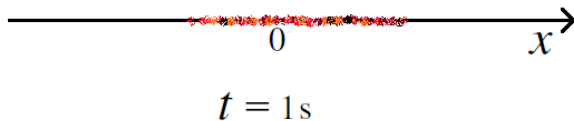
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



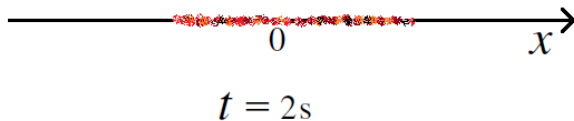
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



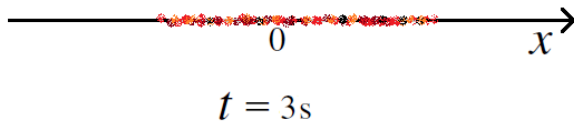
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



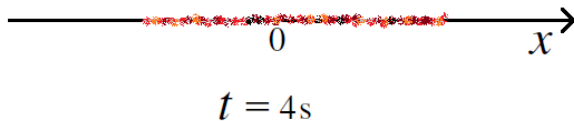
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



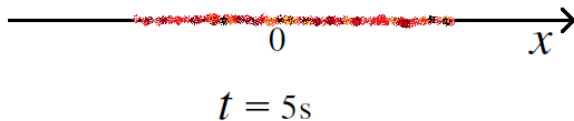
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



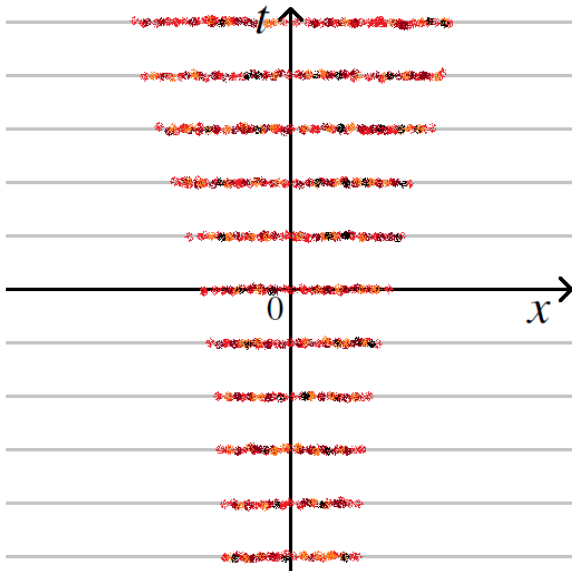
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



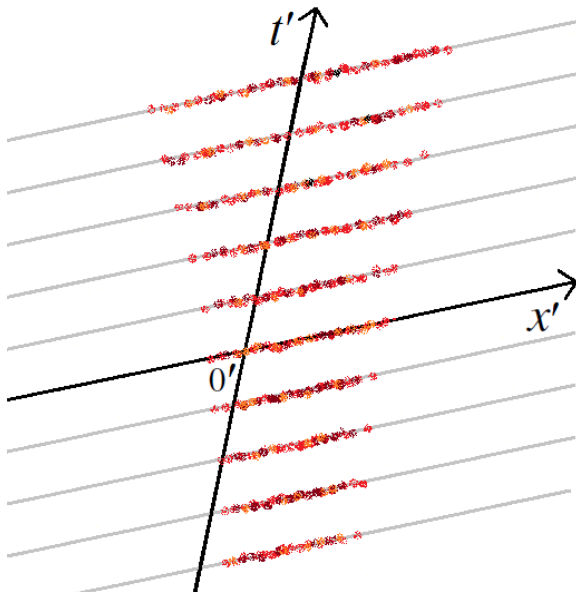
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



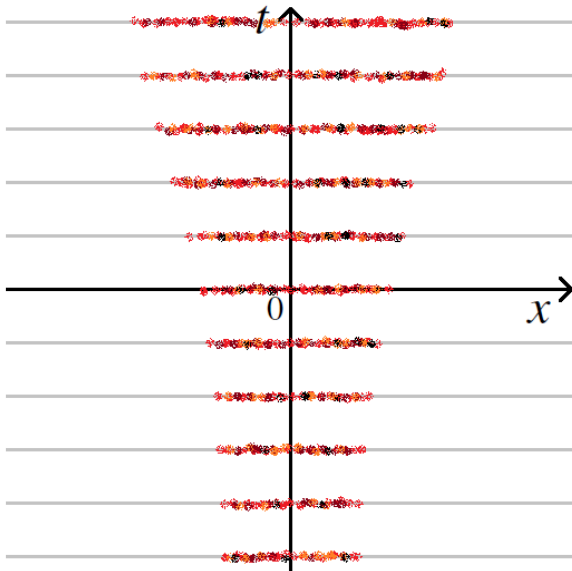
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



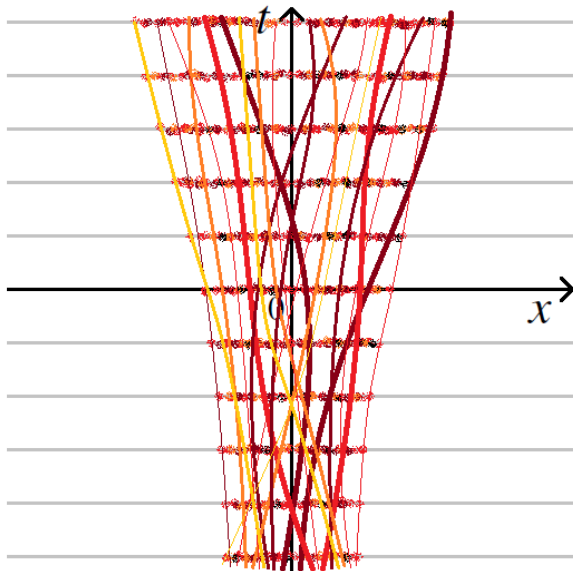
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



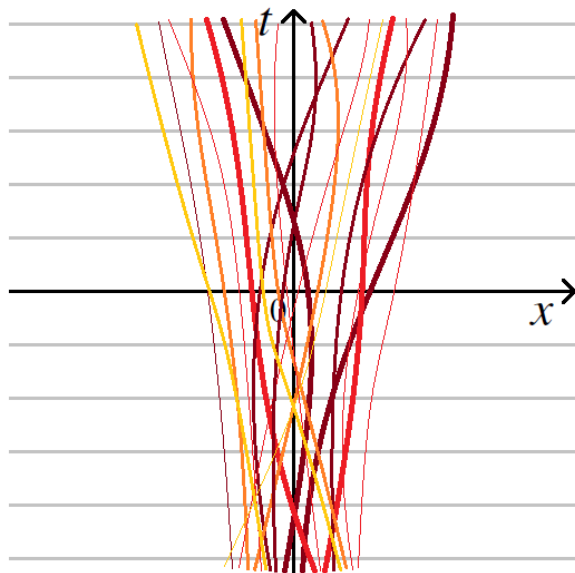
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



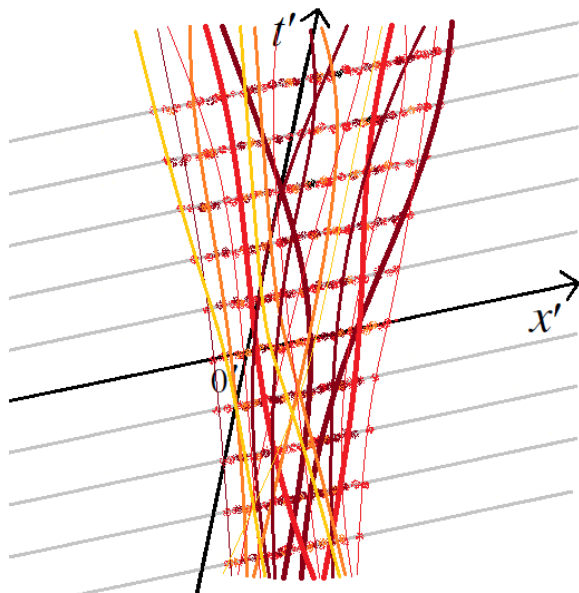
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



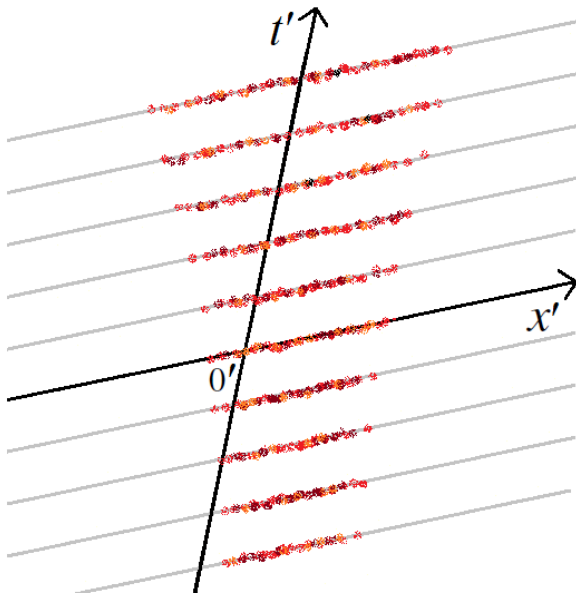
Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



Czym jest czasoprzestrzeń, ale tak ściślej?

Czasoprzestrzeń \mathcal{M} to rozmaitość gładka, która jest

- czterowymiarowa (choć niekoniecznie),
- spójna,
- lorentzowska, tj. wyposażona w odwzorowanie g

$$\mathcal{M} \ni p \mapsto g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwane **lorentzowskim tensorem metrycznym**, takie że

- $\forall p \in \mathcal{M}$ g_p to forma dwuliniowa symetryczna o sygnaturze $(-+++)$,
- $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ odwzorowanie $p \rightarrow g_p(X_p, Y_p)$ jest gładkie.
- czasowo zorientowana (o tym za chwilę)

Punkty \mathcal{M} nazywa się *zdarzeniami*.

Czym jest czasoprzestrzeń, ale tak ściślej?

Czasoprzestrzeń \mathcal{M} to rozmaitość gładka, która jest

- czterowymiarowa (choć niekoniecznie),
- spójna,
- lorentzowska, tj. wyposażona w odwzorowanie g

$$\mathcal{M} \ni p \mapsto g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwane **lorentzowskim tensorem metrycznym**, takie że

- $\forall p \in \mathcal{M}$ g_p to forma dwuliniowa symetryczna o sygnaturze $(-+++)$,
- $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ odwzorowanie $p \rightarrow g_p(X_p, Y_p)$ jest gładkie.
- czasowo zorientowana (o tym za chwilę)

Punkty \mathcal{M} nazywa się *zdarzeniami*.

Czym jest czasoprzestrzeń, ale tak ściślej?

Czasoprzestrzeń \mathcal{M} to rozmaitość gładka, która jest

- czterowymiarowa (choć niekoniecznie),
- spójna,
- lorentzowska, tj. wyposażona w odwzorowanie g

$$\mathcal{M} \ni p \mapsto g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwane **lorentzowskim tensorem metrycznym**, takie że

- $\forall p \in \mathcal{M}$ g_p to forma dwuliniowa symetryczna o sygnaturze $(-+++)$,
- $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ odwzorowanie $p \rightarrow g_p(X_p, Y_p)$ jest gładkie.
- czasowo zorientowana (o tym za chwilę)

Punkty \mathcal{M} nazywa się *zdarzeniami*.

Czym jest czasoprzestrzeń, ale tak ściślej?

Czasoprzestrzeń \mathcal{M} to rozmaitość gładka, która jest

- czterowymiarowa (choć niekoniecznie),
- spójna,
- lorentzowska, tj. wyposażona w odwzorowanie g

$$\mathcal{M} \ni p \mapsto g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwane **lorentzowskim tensorem metrycznym**, takie że

- $\forall p \in \mathcal{M}$ g_p to forma dwuliniowa symetryczna o sygnaturze $(-+++)$,
- $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ odwzorowanie $p \rightarrow g_p(X_p, Y_p)$ jest gładkie.
- czasowo zorientowana (o tym za chwilę)

Punkty \mathcal{M} nazywa się *zdarzeniami*.

Czym jest czasoprzestrzeń, ale tak ściślej?

Czasoprzestrzeń \mathcal{M} to rozmaitość gładka, która jest

- czterowymiarowa (choć niekoniecznie),
- spójna,
- lorentzowska, tj. wyposażona w odwzorowanie g

$$\mathcal{M} \ni p \mapsto g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwane **lorentzowskim tensorem metrycznym**, takie że

- $\forall p \in \mathcal{M}$ g_p to forma dwuliniowa symetryczna o sygnaturze $(-+++)$,
- $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ odwzorowanie $p \rightarrow g_p(X_p, Y_p)$ jest gładkie.
- czasowo zorientowana (o tym za chwilę)

Punkty \mathcal{M} nazywa się *zdarzeniami*.

Czym jest czasoprzestrzeń, ale tak ściślej?

Czasoprzestrzeń \mathcal{M} to rozmaitość gładka, która jest

- czterowymiarowa (choć niekoniecznie),
- spójna,
- lorentzowska, tj. wyposażona w odwzorowanie g

$$\mathcal{M} \ni p \mapsto g_p : T_p\mathcal{M} \times T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

zwane **lorentzowskim tensorem metrycznym**, takie że

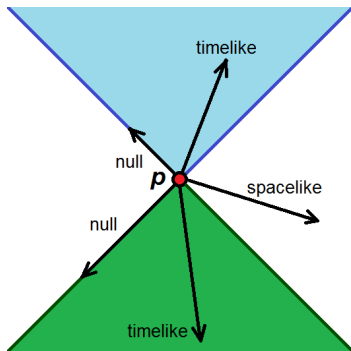
- $\forall p \in \mathcal{M}$ g_p to forma dwuliniowa symetryczna o sygnaturze $(-+++)$,
- $\forall X, Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M})$ odwzorowanie $p \rightarrow g_p(X_p, Y_p)$ jest gładkie.
- czasowo zorientowana (o tym za chwilę)

Punkty \mathcal{M} nazywa się *zdarzeniami*.

Klasyfikacja wektorów stycznych

Wektor $v \in T_p\mathcal{M}$ jest

- *czasopodobny*, jeśli $g(v, v) < 0$,
- *zerowy*, jeśli $g(v, v) = 0$,
- *przestrzennopodobny*, jeśli $g(v, v) > 0$,
- *przyczynowy*, jeśli $g(v, v) \leq 0$, przy czym $v \neq 0$



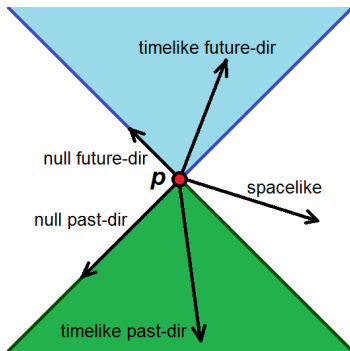
Zbiór wektorów czasopodobnych stycznych w punkcie p ma dwie składowe. *Orientacja czasowa* polega na wyróżnieniu jednej z nich jako zawierającej wektory skierowane ku przyszłości.

Powyższe pojęcia w oczywisty sposób rozszerzają się na *pola wektorowe* i *krzywe kawałkami gładkie*.

Klasyfikacja wektorów stycznych

Wektor $v \in T_p\mathcal{M}$ jest

- czasopodobny, jeśli $g(v, v) < 0$,
- zerowy, jeśli $g(v, v) = 0$,
- przestrzennopodobny, jeśli $g(v, v) > 0$,
- przyczynowy, jeśli $g(v, v) \leq 0$,
przy czym $v \neq 0$



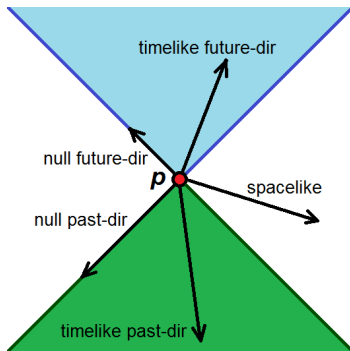
Zbiór wektorów czasopodobnych stycznych w punkcie p ma dwie składowe. *Orientacja czasowa* polega na wyróżnieniu jednej z nich jako zawierającej wektory skierowane ku przyszłości.

Powyższe pojęcia w oczywisty sposób rozszerzają się na *pola wektorowe* i *krzywe kawałkami gładkie*.

Klasyfikacja wektorów stycznych

Wektor $v \in T_p\mathcal{M}$ jest

- *czasopodobny*, jeśli $g(v, v) < 0$,
- *zerowy*, jeśli $g(v, v) = 0$,
- *przestrzennopodobny*, jeśli $g(v, v) > 0$,
- *przyczynowy*, jeśli $g(v, v) \leq 0$, przy czym $v \neq 0$



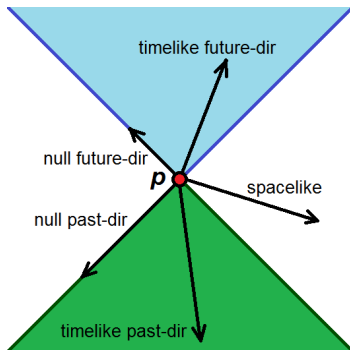
Zbiór wektorów **przyczynowych** stycznych w punkcie p ma dwie składowe. *Orientacja czasowa* polega na wyróżnieniu jednej z nich jako zawierającej wektory skierowane ku przyszłości.

Powyższe pojęcia w oczywisty sposób rozszerzają się na *pola wektorowe* i *krzywe kawałkami gładkie*.

Klasyfikacja wektorów stycznych

Wektor $v \in T_p\mathcal{M}$ jest

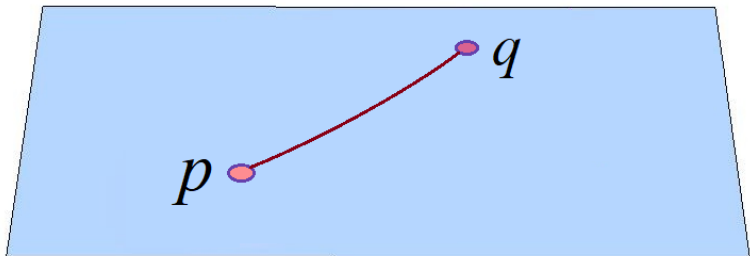
- *czasopodobny*, jeśli $g(v, v) < 0$,
- *zerowy*, jeśli $g(v, v) = 0$,
- *przestrzennopodobny*, jeśli $g(v, v) > 0$,
- *przyczynowy*, jeśli $g(v, v) \leq 0$, przy czym $v \neq 0$



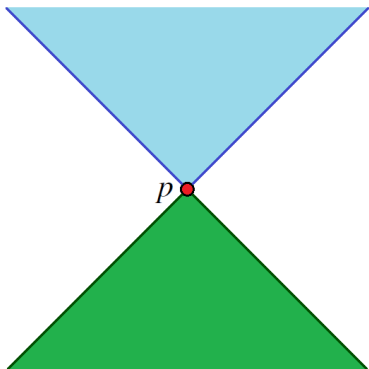
Zbiór wektorów **przyczynowych** stycznych w punkcie p ma dwie składowe. *Orientacja czasowa* polega na wyróżnieniu jednej z nich jako zawierającej wektory skierowane ku przyszłości.

Powyższe pojęcia w oczywisty sposób rozszerzają się na *pola wektorowe* i *krzywe kawałkami gładkie*.

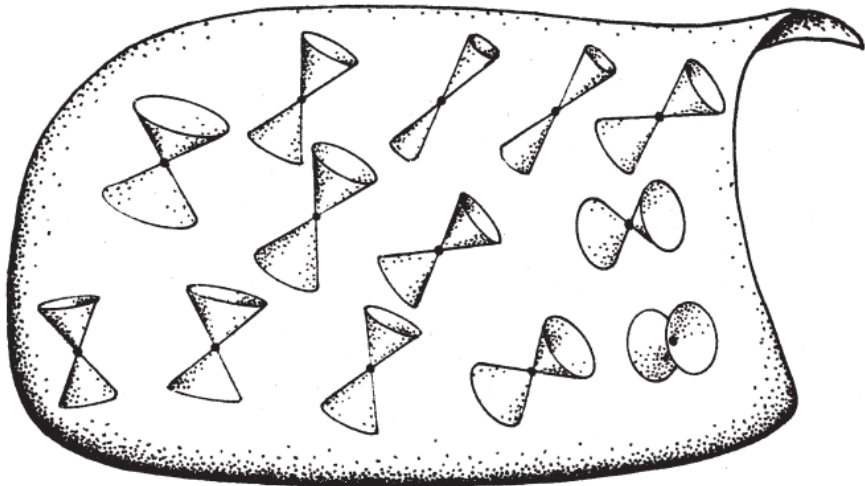
Def. $p \preceq q$, jeśli \exists kawałkami gładka krzywa przyczynowa skierowana ku przyszłości łącząca p z q (lub jeśli $p = q$).



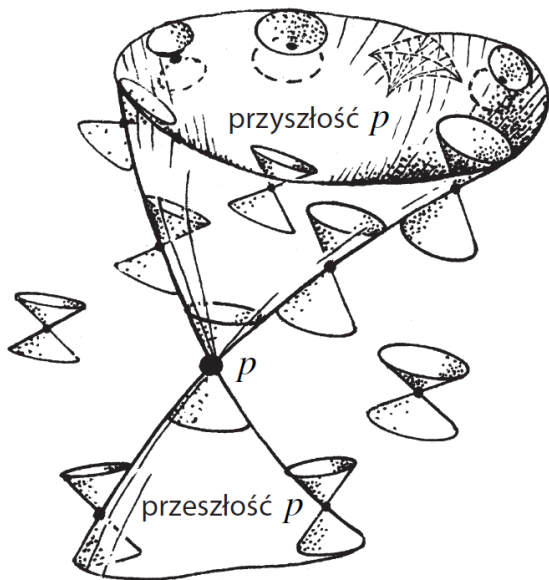
Def. $p \preceq q$, jeśli \exists kawałkami gładka krzywa przyczynowa skierowana ku przyszłości łącząca p z q (lub jeśli $p = q$).



Ozn. $J^+(p) = \{q \in \mathcal{M} : p \preceq q\}$, $J^-(p) = \{q \in \mathcal{M} : q \preceq p\}$

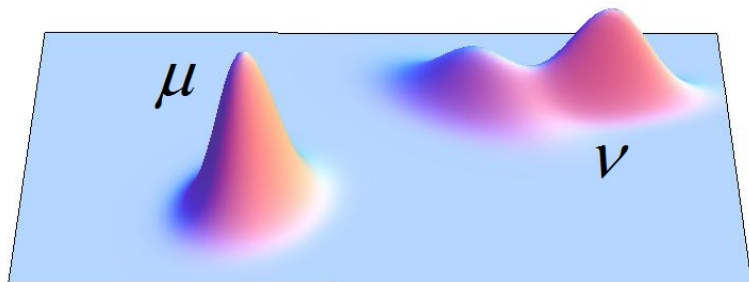


Czasoprzestrzeń zakrzywiona (rys. R. Penrose)



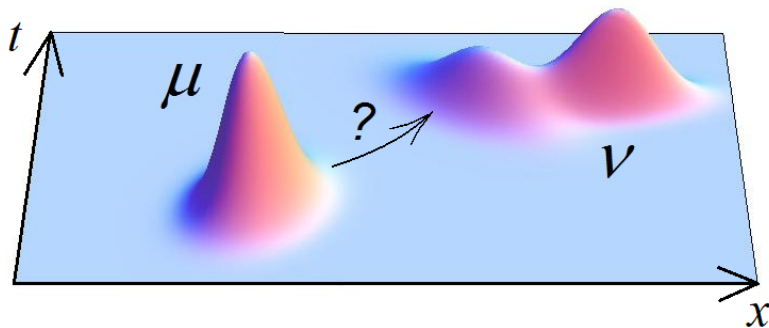
Przyczynowość w zakrzywionej czasoprzestrzeni (rys. R. Penrose)

Przyczynowość dla miar probabilistycznych



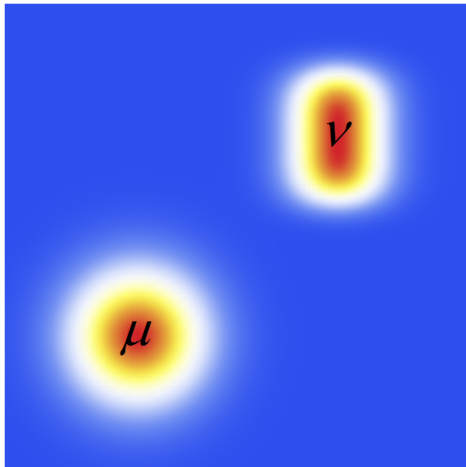
Dane są dwie miary probabilistyczne na czasoprzestrzeni: μ oraz ν ...

Przyczynowość dla miar probabilistycznych



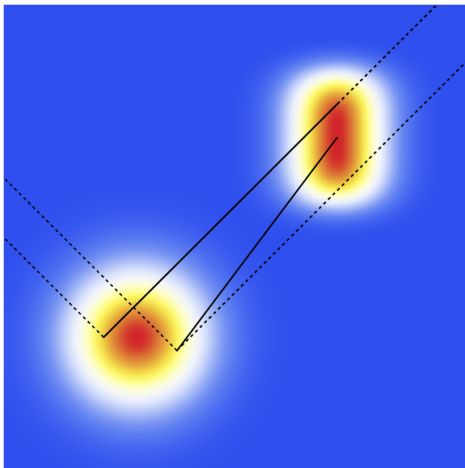
...Co by to miało znaczyć, że $\mu \preceq \nu$?

Przyczynowość dla miar probabilistycznych



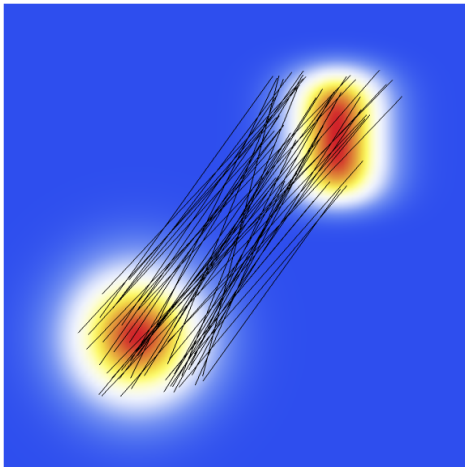
Przyczynowość dla miar probabilistycznych

Intuicja: „Porcje prawdopodobieństwa” mogą przepływać wyłącznie wzdłuż krzywych przyczynowych.



Przyczynowość dla miar probabilistycznych

Intuicja: „Porcje prawdopodobieństwa” mogą przepływać wyłącznie wzdłuż krzywych przyczynowych.



Formalna definicja [M. Eckstein, TM '17]

\mathcal{M} – czasoprzestrzeń. Wówczas dla dowolnych $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mówimy, że μ przyczynowo poprzedza ν ($\mu \preceq \nu$), jeśli istnieje $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^2)$ taka, że:

- \forall_B – borelowski $\omega(B \times \mathcal{M}) = \mu(B)$, $\omega(\mathcal{M} \times B) = \nu(B)$,
- $\omega(J^+) = 1$,

gdzie $J^+ := \{(p, q) \in \mathcal{M}^2 \mid p \preceq q\}$.

- Dla $\mu = \delta_p$, $\nu = \delta_q$, jedyny możliwy *coupling* to $\omega = \delta_{(p,q)}$, wobec czego $\delta_p \preceq \delta_q$ wtw $p \preceq q$.
- \preceq jest zwrotna i przechodnia. Jeśli \mathcal{M} jest rozróżniająca, to \preceq jest porządkiem częściowym.

Formalna definicja [M. Eckstein, TM '17]

\mathcal{M} – czasoprzestrzeń. Wówczas dla dowolnych $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mówimy, że μ przyczynowo poprzedza ν ($\mu \preceq \nu$), jeśli istnieje $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^2)$ taka, że:

- \forall_B – borelowski $\omega(B \times \mathcal{M}) = \mu(B)$, $\omega(\mathcal{M} \times B) = \nu(B)$,
- $\omega(J^+) = 1$,

gdzie $J^+ := \{(p, q) \in \mathcal{M}^2 \mid p \preceq q\}$.

- Dla $\mu = \delta_p$, $\nu = \delta_q$, jedyny możliwy *coupling* to $\omega = \delta_{(p,q)}$, wobec czego $\delta_p \preceq \delta_q$ wtw $p \preceq q$.
- \preceq jest zwrotna i przechodnia. Jeśli \mathcal{M} jest rozróżniająca, to \preceq jest porządkiem częściowym.

Formalna definicja [M. Eckstein, TM '17]

\mathcal{M} – czasoprzestrzeń. Wówczas dla dowolnych $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mówimy, że μ przyczynowo poprzedza ν ($\mu \preceq \nu$), jeśli istnieje $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{M}^2)$ taka, że:

- \forall_B – borelowski $\omega(B \times \mathcal{M}) = \mu(B)$, $\omega(\mathcal{M} \times B) = \nu(B)$,
- $\omega(J^+) = 1$,

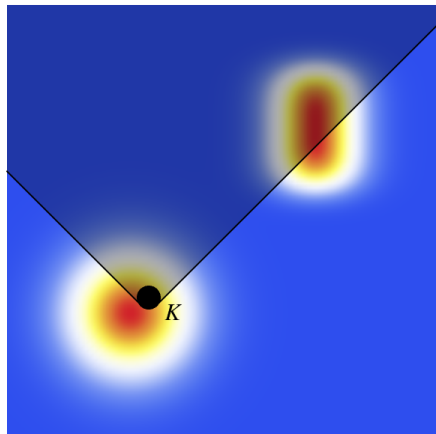
gdzie $J^+ := \{(p, q) \in \mathcal{M}^2 \mid p \preceq q\}$.

- Dla $\mu = \delta_p$, $\nu = \delta_q$, jedyny możliwy *coupling* to $\omega = \delta_{(p,q)}$, wobec czego $\delta_p \preceq \delta_q$ wtw $p \preceq q$.
- \preceq jest zwrotna i przechodnia. Jeśli \mathcal{M} jest rozróżniająca, to \preceq jest porządkiem częściowym.

Przyczynowość dla miar probabilistycznych

Dla \mathcal{M} przyczynowo prostej:

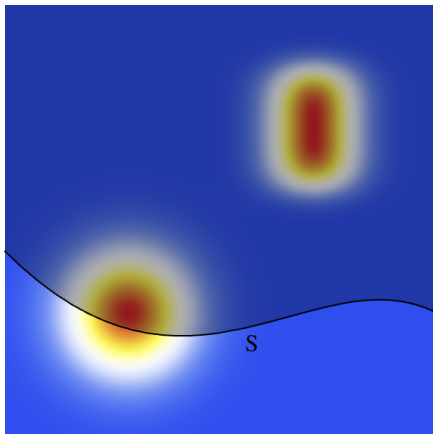
$$\mu \preceq \nu \iff \text{dla każdego zwartego } \mathcal{K} \subset \text{supp } \mu \quad \mu(\mathcal{K}) \leq \nu(J^+(\mathcal{K}))$$



Przyczynowość dla miar probabilistycznych

Dla \mathcal{M} globalnie hiperbolicznej:

$\mu \preceq \nu \iff$ dla każdej hiperpow. Cauchy'ego \mathcal{S} $\mu(J^+(\mathcal{S})) \leq \nu(J^+(\mathcal{S}))$

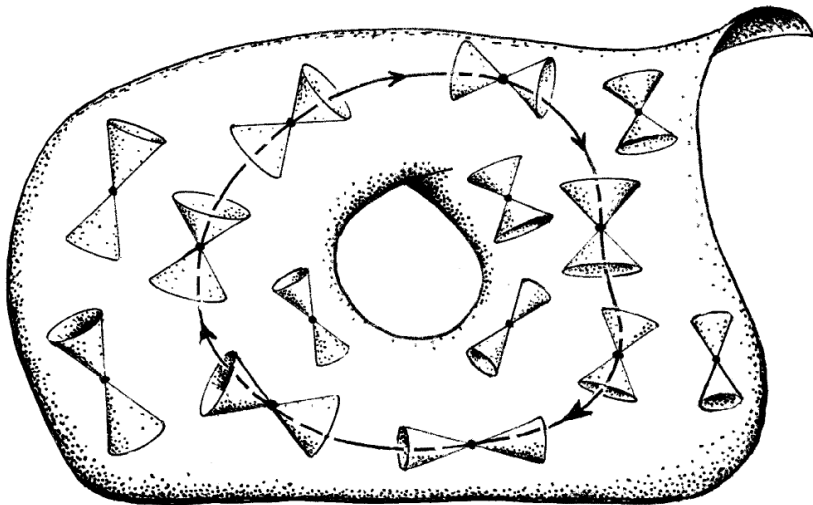


„Drabina przyczynowa”

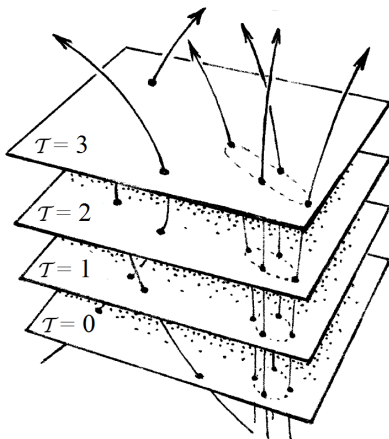
Hierarchia własności przyczynowych czasoprzestrzeni (od najsilniejszych do najłabszych):

- ☺ Globalnie hiperboliczna
- ⇒ Przyczynowo prosta
- ⇒ Przyczynowo ciągła
- ⇒ Stabilnie przyczynowa
- ⇒ Mocno przyczynowa
- ⇒ Rozróżniająca
- ⇒ Przyczynowa
- ⇒ Chronologiczna
- ⇒ *Totally vicious* 😞



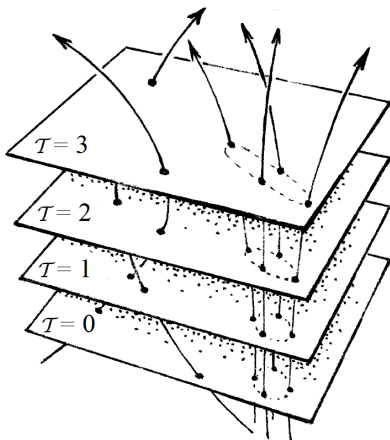


Czasoprzestrzeń niechronologiczna (rys. R. Penrose)



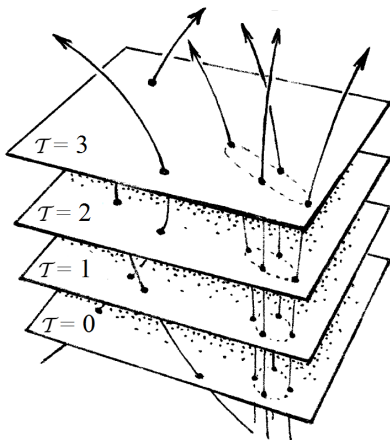
\mathcal{M} jest globalnie hiperboliczna $\iff \exists T \in C^\infty(\mathcal{M})$ taka, że każdą krzywą przyczynową γ da się sparametryzować tak, iż $T(\gamma(t)) = t$.

Taka \mathcal{M} daje się „poszatkować” hiperpowierzchniami stałego T (które są parami dyfeomorficzne). Taka foliacja nie jest absolutna – różne wybory T prowadzą do różnych „poszatkowań” czasoprzestrzeni. $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \mathcal{S}$



\mathcal{M} jest globalnie hiperboliczna $\iff \exists T \in C^\infty(\mathcal{M})$ taka, że każdą krzywą przyczynową γ da się sparametryzować tak, iż $T(\gamma(t)) = t$.

Taka \mathcal{M} daje się „poszatkować” hiperpowierzchniami stałego T (które są parami dyfeomorficzne). Taka foliacja nie jest absolutna – różne wybory T prowadzą do różnych „poszatkowań” czasoprzestrzeni. $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \mathcal{S}$



\mathcal{M} jest globalnie hiperboliczna $\iff \exists T \in C^\infty(\mathcal{M})$ taka, że każdą krzywą przyczynową γ da się sparametryzować tak, iż $T(\gamma(t)) = t$.

Taka \mathcal{M} daje się „poszatkować” hiperpowierzchniami stałego T (które są parami dyfeomorficzne). Taka foliacja nie jest absolutna – różne wybory T prowadzą do różnych „poszatkowań” czasoprzestrzeni. $\mathcal{M} \cong \mathbb{R} \times \mathcal{S}$

- \mathcal{M} – globalnie hiperboliczna, \mathcal{T} – temporalna funkcja Cauchy'ego

Ewolucja przyczynowa cząstki punktowej

Krzywa $\gamma \in C(I, \mathcal{M})$ sparametryzowana tak, że $\gamma(t) \in \mathcal{T}^{-1}(t)$ jest **przyczynowa**, jeśli

$$\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \gamma(s) \preceq \gamma(t).$$

Ewolucja przyczynowa cząstki-„chmury prawdopodobieństwa”

Odwzorowanie $\mu : I \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $t \mapsto \mu_t$ takie, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$, $t \in I$ jest **przyczynową ewolucją miary prob.**, jeśli

$$\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t.$$

- \mathcal{M} – globalnie hiperboliczna, \mathcal{T} – temporalna funkcja Cauchy'ego

Ewolucja przyczynowa cząstki punktowej

Krzywa $\gamma \in C(I, \mathcal{M})$ sparametryzowana tak, że $\gamma(t) \in \mathcal{T}^{-1}(t)$ jest **przyczynowa**, jeśli

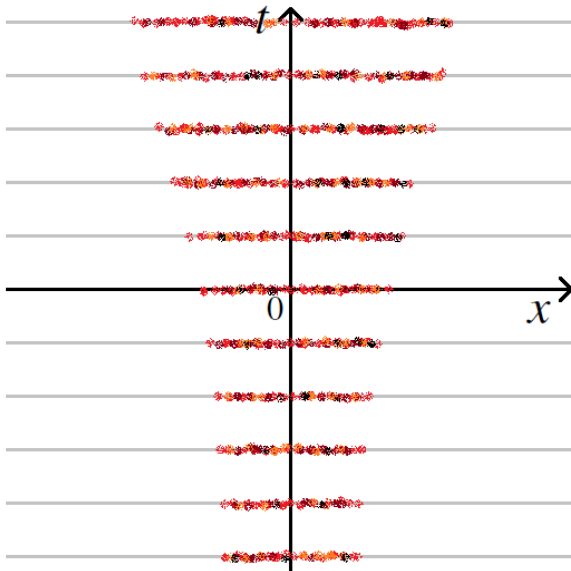
$$\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \gamma(s) \preceq \gamma(t).$$

Ewolucja przyczynowa cząstki-„chmury prawdopodobieństwa”

Odwzorowanie $\mu : I \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $t \mapsto \mu_t$ takie, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$, $t \in I$ jest **przyczynową ewolucją miary prob.**, jeśli

$$\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t.$$

Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



Przyczynowa ewolucja miar probabilistycznych



- $A_T^I := \{\gamma \in C(I, \mathcal{M}) \mid \gamma - \text{przyczynowa}, \mathcal{T} \circ \gamma = \text{id}_I\}$
- Dla $t \in I$ niech $\text{ev}_t : A_T^I \rightarrow \mathcal{M}$ oznacza ewaluację $\text{ev}_t(\gamma) := \gamma(t)$

Twierdzenie [TM '17]

Niech $I \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $t \mapsto \mu_t$ jest **ewolucją przyczynową**, tzn.
 $\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t$.
- Istnieje $\sigma \in \mathcal{P}(A_T^I)$ taka, że
 $\mu_t = \sigma \circ \text{ev}_t^{-1}, t \in I$.

Przestrzeń krzywych przyczynowych A_T^I trzeba jednak w pierw wyposażyć w porządną topologię!

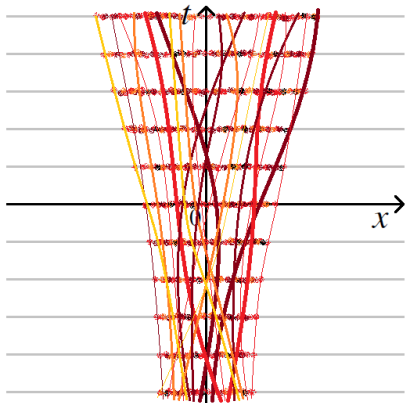
- $A_{\mathcal{T}}^I := \{\gamma \in C(I, \mathcal{M}) \mid \gamma - \text{przyczynowa}, \mathcal{T} \circ \gamma = \text{id}_I\}$
- Dla $t \in I$ niech $\text{ev}_t : A_{\mathcal{T}}^I \rightarrow \mathcal{M}$ oznacza ewaluację $\text{ev}_t(\gamma) := \gamma(t)$

Twierdzenie [TM '17]

Niech $I \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $t \mapsto \mu_t$ jest **ewolucją przyczynową**, tzn.
 $\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t$.
- Istnieje $\sigma \in \mathcal{P}(A_{\mathcal{T}}^I)$ taka, że $\mu_t = \sigma \circ \text{ev}_t^{-1}$, $t \in I$.

Przestrzeń krzywych przyczynowych $A_{\mathcal{T}}^I$ trzeba jednak w pierw wyposażyć w porządną topologię!



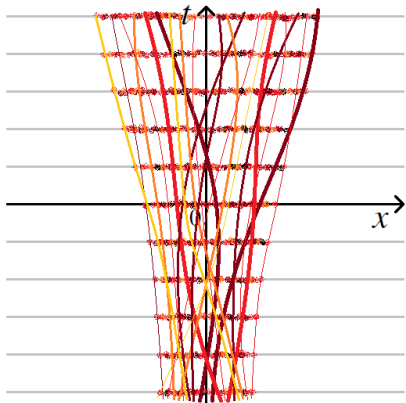
- $A_{\mathcal{T}}^I := \{\gamma \in C(I, \mathcal{M}) \mid \gamma - \text{przyczynowa}, \mathcal{T} \circ \gamma = \text{id}_I\}$
- Dla $t \in I$ niech $\text{ev}_t : A_{\mathcal{T}}^I \rightarrow \mathcal{M}$ oznacza ewaluację $\text{ev}_t(\gamma) := \gamma(t)$

Twierdzenie [TM '17]

Niech $I \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $t \mapsto \mu_t$ jest **ewolucją przyczynową**, tzn.
 $\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t$.
- Istnieje $\sigma \in \mathcal{P}(A_{\mathcal{T}}^I)$ taka, że $\mu_t = \sigma \circ \text{ev}_t^{-1}$, $t \in I$.

Przestrzeń krzywych przyczynowych $A_{\mathcal{T}}^I$ trzeba jednak wprawdzie wyposażyć w porządną topologię!



Definicja

C^0 -**topologią** na $A_{\mathcal{I}}$ nazywamy topologię indukowaną z $C(I, \mathcal{M})$ z topologią zwarto-otwartą.

- Niech h będzie dowolnym **zupełnym (riemannowskim) tensorem metrycznym** na \mathcal{M} , a d_h – stowarzyszoną z nim **metryką (zupełną)**
- $\gamma_\lambda \rightarrow \gamma$ w C^0 -topologii $\iff \forall [a, b] \subset I \sup_{t \in [a, b]} d_h(\gamma_\lambda, \gamma) \rightarrow 0$
- $A_{\mathcal{I}}$ z C^0 -topologią jest **lokalnie zwartą przestrzenią polską**.

Rys. Roger Penrose

Definicja

C^0 -**topologią** na $A_{\mathcal{I}}$ nazywamy topologię indukowaną z $C(I, \mathcal{M})$ z topologią zwarto-otwartą.

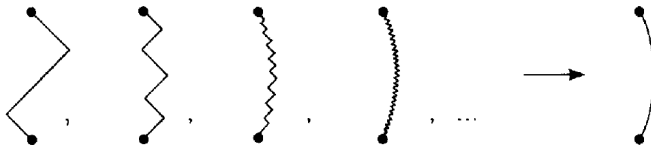
- Niech h będzie dowolnym **zupełnym (riemannowskim) tensorem metrycznym** na \mathcal{M} , a d_h – stowarzyszoną z nim **metryką (zupełną)**
- $\gamma_\lambda \rightarrow \gamma$ w C^0 -topologii $\iff \forall [a, b] \subset I \sup_{t \in [a, b]} d_h(\gamma_\lambda, \gamma) \rightarrow 0$
- $A_{\mathcal{I}}$ z C^0 -topologią jest **lokalnie zwartą przestrzenią polską**.

Rys. Roger Penrose

Definicja

C^0 -**topologią** na A_T^I nazywamy topologię indukowaną z $C(I, \mathcal{M})$ z topologią zwarto-otwartą.

- Niech h będzie dowolnym **zupełnym (riemannowskim) tensorem metrycznym** na \mathcal{M} , a d_h – stowarzyszoną z nim **metryką (zupełną)**
- $\gamma_\lambda \rightarrow \gamma$ w C^0 -topologii $\iff \forall [a, b] \subset I \sup_{t \in [a, b]} d_h(\gamma_\lambda, \gamma) \rightarrow 0$
- A_T^I z C^0 -topologią jest **lokalnie zwartą przestrzenią polską**.

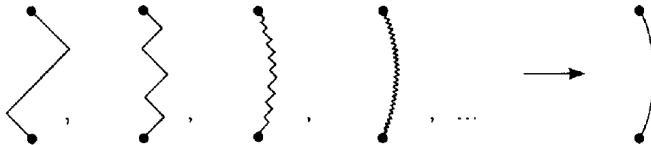


Rys. Roger Penrose

Definicja

C^0 -**topologią** na A_T^I nazywamy topologię indukowaną z $C(I, \mathcal{M})$ z topologią zwarto-otwartą.

- Niech h będzie dowolnym **zupełnym (riemannowskim) tensorem metrycznym** na \mathcal{M} , a d_h – stowarzyszoną z nim **metryką (zupełną)**
- $\gamma_\lambda \rightarrow \gamma$ w C^0 -topologii $\iff \forall [a, b] \subset I \sup_{t \in [a, b]} d_h(\gamma_\lambda, \gamma) \rightarrow 0$
- A_T^I z C^0 -topologią jest **lokalnie zwartą przestrzenią polską**.



Rys. Roger Penrose

Definicja

Odwzorowanie $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, $t \mapsto \mu_t$ takie, że $\text{supp } \mu_t \subset \{t\} \times \mathbb{R}^n$ spełnia **równanie ciągłości**, jeśli dla pewnej funkcji borelowskiej $\mathbf{v} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, zwanej **polem prędkości**, $\partial_t \mu + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0$ w sensie dystrybucyjnym, tj.

$$\forall \Phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^n) \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \Phi + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Phi] d\mu_t dt = 0.$$

Twierdzenie [M. Eckstein, TM '17]

Jeśli μ spełnia równanie ciągłości z polem prędkości \mathbf{v} takim, że $|\mathbf{v}(t, \mathbf{x})| \leq 1$ dla wszystkich $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, to μ jest przyczynową ewolucją miary prob.

Hipoteza: Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne, i to w szerszym kontekście czasoprzestrzeni globalnie hiperbolicznych. Potrzebna jest silniejsza topologia na A_T^I , która będzie “czuła” różniczkową strukturę krzywych!

Definicja

Odwzorowanie $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, $t \mapsto \mu_t$ takie, że $\text{supp } \mu_t \subset \{t\} \times \mathbb{R}^n$ spełnia **równanie ciągłości**, jeśli dla pewnej funkcji borelowskiej $\mathbf{v} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, zwanej **polem prędkości**, $\partial_t \mu + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0$ w sensie dystrybucyjnym, tj.

$$\forall \Phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^n) \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \Phi + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Phi] d\mu_t dt = 0.$$

Twierdzenie [M. Eckstein, TM '17]

Jeśli μ spełnia równanie ciągłości z polem prędkości \mathbf{v} takim, że $|\mathbf{v}(t, \mathbf{x})| \leq 1$ dla wszystkich $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, to μ jest przyczynową ewolucją miary prob.

Hipoteza: **Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne, i to w szerszym kontekście czasoprzestrzeni globalnie hiperbolicznych. Potrzebna jest silniejsza topologia na A_T^I , która będzie "czuła" różniczkową strukturę krzywych!**

Definicja

Odwzorowanie $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, $t \mapsto \mu_t$ takie, że $\text{supp } \mu_t \subset \{t\} \times \mathbb{R}^n$ spełnia **równanie ciągłości**, jeśli dla pewnej funkcji borelowskiej $\mathbf{v} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, zwanej **polem prędkości**, $\partial_t \mu + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0$ w sensie dystrybucyjnym, tj.

$$\forall \Phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^n) \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \Phi + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Phi] d\mu_t dt = 0.$$

Twierdzenie [M. Eckstein, TM '17]

Jeśli μ spełnia równanie ciągłości z polem prędkości \mathbf{v} takim, że $|\mathbf{v}(t, \mathbf{x})| \leq 1$ dla wszystkich $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, to μ jest przyczynową ewolucją miary prob.

Hipoteza: Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne, i to w szerszym kontekście czasoprzestrzeni globalnie hiperbolicznych.

Potrzebna jest silniejsza topologia na A_T^I , która będzie "czuła" różniczkową strukturę krzywych!

Definicja

Odwzorowanie $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, $t \mapsto \mu_t$ takie, że $\text{supp } \mu_t \subset \{t\} \times \mathbb{R}^n$ spełnia **równanie ciągłości**, jeśli dla pewnej funkcji borelowskiej $\mathbf{v} : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, zwanej **polem prędkości**, $\partial_t \mu + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0$ w sensie dystrybucyjnym, tj.

$$\forall \Phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^n) \quad \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t \Phi + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Phi] d\mu_t dt = 0.$$

Twierdzenie [M. Eckstein, TM '17]

Jeśli μ spełnia równanie ciągłości z polem prędkości \mathbf{v} takim, że $|\mathbf{v}(t, \mathbf{x})| \leq 1$ dla wszystkich $t \in [0, T]$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, to μ jest przyczynową ewolucją miary prob.

Hipoteza: Prawdziwe jest także twierdzenie odwrotne, i to w szerszym kontekście czasoprzestrzeni globalnie hiperbolicznych. Potrzebna jest silniejsza topologia na A_T^I , która będzie “czuła” różniczkową strukturę krzywych!

Definicja

$W_{\text{loc}}^{k,p}(I; \mathbb{R}^N)$ to zbiór klas funkcji $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ równych p.w. takich, że

$$\forall [a, b] \subset I^\circ \quad u|_{[a,b]} \in W^{k,p}(a, b; \mathbb{R}^N).$$

- $L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{0,2}(I; \mathbb{R}^N)$ oraz $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{k,2}(I; \mathbb{R}^N)$.
- Dla $u \in H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ istnieje słaba pochodna $u' \in H_{\text{loc}}^{k-1}(I; \mathbb{R}^N)$.
- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N) \subset C(I^\circ; \mathbb{R}^N) \subset L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N)$.

Definicja

Rodzina obcięć $|_{[a,b]} : H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) \rightarrow H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$ pozwala zdefiniować na $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ topologie:

- silną: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$
- słabą: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$

Definicja

$W_{\text{loc}}^{k,p}(I; \mathbb{R}^N)$ to zbiór klas funkcji $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ równych p.w. takich, że

$$\forall [a, b] \subset I^\circ \quad u|_{[a,b]} \in W^{k,p}(a, b; \mathbb{R}^N).$$

- $L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{0,2}(I; \mathbb{R}^N)$ oraz $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{k,2}(I; \mathbb{R}^N)$.
- Dla $u \in H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ istnieje słaba pochodna $u' \in H_{\text{loc}}^{k-1}(I; \mathbb{R}^N)$.
- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N) \subset C(I^\circ; \mathbb{R}^N) \subset L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N)$.

Definicja

Rodzina obcięć $|_{[a,b]} : H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) \rightarrow H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$ pozwala zdefiniować na $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ topologie:

- silną: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$
- słabą: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$

Definicja

$W_{\text{loc}}^{k,p}(I; \mathbb{R}^N)$ to zbiór klas funkcji $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ równych p.w. takich, że

$$\forall [a, b] \subset I^\circ \quad u|_{[a,b]} \in W^{k,p}(a, b; \mathbb{R}^N).$$

- $L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{0,2}(I; \mathbb{R}^N)$ oraz $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{k,2}(I; \mathbb{R}^N)$.
- Dla $u \in H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ istnieje słaba pochodna $u' \in H_{\text{loc}}^{k-1}(I; \mathbb{R}^N)$.
- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N) \subset C(I^\circ; \mathbb{R}^N) \subset L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N)$.

Definicja

Rodzina obcięć $|_{[a,b]} : H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) \rightarrow H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$ pozwala zdefiniować na $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ topologie:

- silną: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$
- słabą: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$

Definicja

$W_{\text{loc}}^{k,p}(I; \mathbb{R}^N)$ to zbiór klas funkcji $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ równych p.w. takich, że

$$\forall [a, b] \subset I^\circ \quad u|_{[a,b]} \in W^{k,p}(a, b; \mathbb{R}^N).$$

- $L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{0,2}(I; \mathbb{R}^N)$ oraz $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{k,2}(I; \mathbb{R}^N)$.
- Dla $u \in H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ istnieje słaba pochodna $u' \in H_{\text{loc}}^{k-1}(I; \mathbb{R}^N)$.
- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N) \subset C(I^\circ; \mathbb{R}^N) \subset L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N)$.

Definicja

Rodzina obcięć $|_{[a,b]} : H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) \rightarrow H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$ pozwala zdefiniować na $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ topologie:

- silną: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$
- słabą: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$

Definicja

$W_{\text{loc}}^{k,p}(I; \mathbb{R}^N)$ to zbiór klas funkcji $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ równych p.w. takich, że

$$\forall [a, b] \subset I^\circ \quad u|_{[a,b]} \in W^{k,p}(a, b; \mathbb{R}^N).$$

- $L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{0,2}(I; \mathbb{R}^N)$ oraz $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{k,2}(I; \mathbb{R}^N)$.
- Dla $u \in H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ istnieje słaba pochodna $u' \in H_{\text{loc}}^{k-1}(I; \mathbb{R}^N)$.
- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N) \subset C(I^\circ; \mathbb{R}^N) \subset L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N)$.

Definicja

Rodzina obcięć $|_{[a,b]} : H_{\text{loc}}^k(I, \mathbb{R}^N) \rightarrow H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$ pozwala zdefiniować na $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ topologie:

- **silną**: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$
- **słabą**: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$

Definicja

$W_{\text{loc}}^{k,p}(I; \mathbb{R}^N)$ to zbiór klas funkcji $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ równych p.w. takich, że

$$\forall [a, b] \subset I^\circ \quad u|_{[a,b]} \in W^{k,p}(a, b; \mathbb{R}^N).$$

- $L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{0,2}(I; \mathbb{R}^N)$ oraz $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{k,2}(I; \mathbb{R}^N)$.
- Dla $u \in H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ istnieje słaba pochodna $u' \in H_{\text{loc}}^{k-1}(I; \mathbb{R}^N)$.
- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N) \subset C(I^\circ; \mathbb{R}^N) \subset L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N)$.

Definicja

Rodzina obcięć $|_{[a,b]} : H_{\text{loc}}^k(I, \mathbb{R}^N) \rightarrow H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$ pozwala zdefiniować na $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ topologie:

- **silną**: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$
- **słabą**: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$

Definicja

$W_{\text{loc}}^{k,p}(I; \mathbb{R}^N)$ to zbiór klas funkcji $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ równych p.w. takich, że

$$\forall [a, b] \subset I^\circ \quad u|_{[a,b]} \in W^{k,p}(a, b; \mathbb{R}^N).$$

- $L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{0,2}(I; \mathbb{R}^N)$ oraz $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N) := W_{\text{loc}}^{k,2}(I; \mathbb{R}^N)$.
- Dla $u \in H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ istnieje słaba pochodna $u' \in H_{\text{loc}}^{k-1}(I; \mathbb{R}^N)$.
- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N) \subset C(I^\circ; \mathbb{R}^N) \subset L_{\text{loc}}^2(I; \mathbb{R}^N)$.

Definicja

Rodzina obcięć $|_{[a,b]} : H_{\text{loc}}^k(I, \mathbb{R}^N) \rightarrow H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$ pozwala zdefiniować na $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ topologie:

- **silną**: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$
- **słabą**: $u_\lambda \rightarrow u$ w $H_{\text{loc}}^k(I; \mathbb{R}^N)$ wtw $u_\lambda|_{[a,b]} \rightarrow u|_{[a,b]}$ w $H^k(a, b; \mathbb{R}^N)$
 $\forall [a, b] \subset I^\circ$

- W jaki sensie krzywe przyczynowe są “lokalnie klasy H^1 ”?
- Można posługiwać się mapami (Palais, Candela–Sánchez), ale to niewygodne...

Twierdzenie [J. Nash '56, O. Müller '09]

Jeśli \mathcal{M} jest zupełną rozmaitością riemannowską, to istnieje $N \in \mathbb{N}$ oraz domknięte izometryczne włożenie $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ klasy C^∞ .

Stwierdzenie

Niech i będzie włożeniem Nasha–Müllera. Wówczas

$i_* : A_T^I \rightarrow H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N)$, $i_*(\gamma) := i \circ \gamma$ jest dobrze zdefiniowaną injekcją.

- W jaki sensie krzywe przyczynowe są “lokalnie klasy H^1 ”?
- Można posługiwać się mapami (Palais, Candela–Sánchez), ale to niewygodne...

Twierdzenie [J. Nash '56, O. Müller '09]

Jeśli \mathcal{M} jest zupełną rozmaitością riemannowską, to istnieje $N \in \mathbb{N}$ oraz domknięte izometryczne włożenie $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ klasy C^∞ .

Stwierdzenie

Niech i będzie włożeniem Nasha–Müllera. Wówczas

$i_* : A_T^I \rightarrow H_{loc}^1(I; \mathbb{R}^N)$, $i_*(\gamma) := i \circ \gamma$ jest dobrze zdefiniowaną injekcją.

- W jaki sensie krzywe przyczynowe są “lokalnie klasy H^1 ”?
- Można posługiwać się mapami (Palais, Candela–Sánchez), ale to niewygodne...

Twierdzenie [J. Nash '56, O. Müller '09]

Jeśli \mathcal{M} jest zupełną rozmaitością riemannowską, to istnieje $N \in \mathbb{N}$ oraz domknięte izometryczne włożenie $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ klasy C^∞ .

Stwierdzenie

Niech i będzie włożeniem Nasha–Müllera. Wówczas

$i_* : A_T^I \rightarrow H_{loc}^1(I; \mathbb{R}^N)$, $i_*(\gamma) := i \circ \gamma$ jest dobrze zdefiniowaną injekcją.

- W jaki sensie krzywe przyczynowe są “lokalnie klasy H^1 ”?
- Można posługiwać się mapami (Palais, Candela–Sánchez), ale to niewygodne...

Twierdzenie [J. Nash '56, O. Müller '09]

Jeśli \mathcal{M} jest zupełną rozmaitością riemannowską, to istnieje $N \in \mathbb{N}$ oraz domknięte izometryczne włożenie $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ klasy C^∞ .

Stwierdzenie

Niech i będzie włożeniem Nasha–Müllera. Wówczas

$i_* : A_T^I \rightarrow H_{loc}^1(I; \mathbb{R}^N)$, $i_*(\gamma) := i \circ \gamma$ jest dobrze zdefiniowaną injekcją.

Definicja

Słabą- H^1_{loc} -topologią na $A^I_{\mathcal{T}}$ nazywamy topologię indukowaną z $H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$ ze słabą topologią za pośrednictwem iniekcji $i_* : A^I_{\mathcal{T}} \rightarrow H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$, gdzie $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ jest wybranym włożeniem Nasha–Müllera.

- $\gamma_\lambda \rightharpoonup \gamma \iff i \circ \gamma_\lambda \rightharpoonup i \circ \gamma$ w $H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$
- Czemu właściwie nie silna- H^1_{loc} -topologia?
Bo potrzebujemy lokalnej zwartości!

Rys. Roger Penrose

Definicja

Słabą- H^1_{loc} -topologią na $A^I_{\mathcal{T}}$ nazywamy topologię indukowaną z $H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$ ze słabą topologią za pośrednictwem iniekcji $i_* : A^I_{\mathcal{T}} \rightarrow H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$, gdzie $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ jest wybranym włożeniem Nasha–Müllera.

- $\gamma_\lambda \rightharpoonup \gamma \iff i \circ \gamma_\lambda \rightharpoonup i \circ \gamma$ w $H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$
- Czemu właściwie nie silna- H^1_{loc} -topologia?
Bo potrzebujemy lokalnej zwartości!

Rys. Roger Penrose

Definicja

Słabą- H^1_{loc} -topologią na $A^I_{\mathcal{T}}$ nazywamy topologię indukowaną z $H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$ ze słabą topologią za pośrednictwem iniekcji $i_* : A^I_{\mathcal{T}} \rightarrow H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$, gdzie $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ jest wybranym włożeniem Nasha–Müllera.

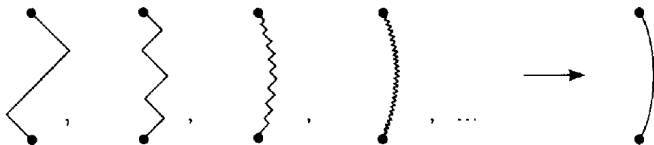
- $\gamma_\lambda \rightharpoonup \gamma \iff i \circ \gamma_\lambda \rightharpoonup i \circ \gamma$ w $H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$
- **Czemu właściwie nie silna- H^1_{loc} -topologia?**
Bo potrzebujemy lokalnej zwartości!

Rys. Roger Penrose

Definicja

Słabą- H^1_{loc} -topologią na $A^I_{\mathcal{T}}$ nazywamy topologię indukowaną z $H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$ ze słabą topologią za pośrednictwem iniekcji $i_* : A^I_{\mathcal{T}} \rightarrow H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$, gdzie $i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ jest wybranym włożeniem Nasha–Müllera.

- $\gamma_\lambda \rightharpoonup \gamma \iff i \circ \gamma_\lambda \rightharpoonup i \circ \gamma$ w $H^1_{\text{loc}}(I; \mathbb{R}^N)$
- **Czemu właściwie nie silna- H^1_{loc} -topologia?**
Bo potrzebujemy lokalnej zwartości!



Rys. Roger Penrose

- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N)$ ze słabą topologią nie jest metryzowalna...
Mimo to, A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią jest!
- **Twierdzenie:** A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią to lokalnie zwarta przestrzeń polska.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia $\supset C^0$ -topologia.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia **nie zależy** od wyboru włożenia Nasha–Müllera.

Twierdzenie

Niech $I \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $t \mapsto \mu_t$ jest **ewolucją przyczynową**, tzn.
 $\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t$.
- Istnieje $\sigma \in \mathcal{P}(A_T^I)$ taka, że
 $\mu_t = \sigma \circ \text{ev}_t^{-1}, t \in I$.
- ...

- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N)$ ze słabą topologią nie jest metryzowalna...
Mimo to, A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią jest!
- Twierdzenie: A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią to lokalnie zwarta przestrzeń polska.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia $\supset C^0$ -topologia.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia **nie zależy** od wyboru włożenia Nasha–Müllera.

Twierdzenie

Niech $I \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $t \mapsto \mu_t$ jest **ewolucją przyczynową**, tzn.
 $\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t$.
- Istnieje $\sigma \in \mathcal{P}(A_T^I)$ taka, że
 $\mu_t = \sigma \circ \text{ev}_t^{-1}$, $t \in I$.
- ...

- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N)$ ze słabą topologią nie jest metryzowalna...
Mimo to, A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią jest!
- **Twierdzenie:** A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią to lokalnie zwarta przestrzeń polska.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia $\supset C^0$ -topologia.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia **nie zależy** od wyboru włożenia Nasha–Müllera.

Twierdzenie

Niech $I \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $t \mapsto \mu_t$ jest **ewolucją przyczynową**, tzn.
 $\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t$.
- Istnieje $\sigma \in \mathcal{P}(A_T^I)$ taka, że
 $\mu_t = \sigma \circ \text{ev}_t^{-1}$, $t \in I$.
- ...

- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N)$ ze słabą topologią nie jest metryzowalna...
Mimo to, A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią jest!
- **Twierdzenie:** A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią to lokalnie zwarta przestrzeń polska.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia $\supset C^0$ -topologia.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia **nie zależy** od wyboru włożenia Nasha–Müllera.

Twierdzenie

Niech $I \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

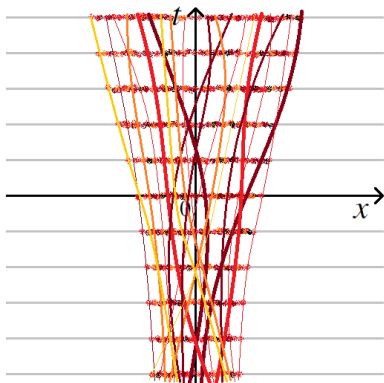
- $t \mapsto \mu_t$ jest **ewolucją przyczynową**, tzn.
 $\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t$.
- Istnieje $\sigma \in \mathcal{P}(A_T^I)$ taka, że
 $\mu_t = \sigma \circ \text{ev}_t^{-1}, t \in I$.
- ...

- $H_{\text{loc}}^1(I; \mathbb{R}^N)$ ze słabą topologią nie jest metryzowalna...
Mimo to, A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią jest!
- **Twierdzenie:** A_T^I ze słabą- H_{loc}^1 -topologią to lokalnie zwarta przestrzeń polska.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia $\supset C^0$ -topologia.
- Słaba- H_{loc}^1 -topologia **nie zależy** od wyboru włożenia Nasha–Müllera.

Twierdzenie

Niech $I \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $t \mapsto \mu_t$ jest **ewolucją przyczynową**, tzn.
 $\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t$.
- Istnieje $\sigma \in \mathcal{P}(A_T^I)$ taka, że $\mu_t = \sigma \circ \text{ev}_t^{-1}$, $t \in I$.
- ...



Twierdzenie

Niech $I \ni t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $\text{supp } \mu_t \subset \mathcal{T}^{-1}(t)$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- $t \mapsto \mu_t$ jest **ewolucją przyczynową**, tzn.

$$\forall s, t \in I \quad s \leq t \Rightarrow \mu_s \preceq \mu_t.$$

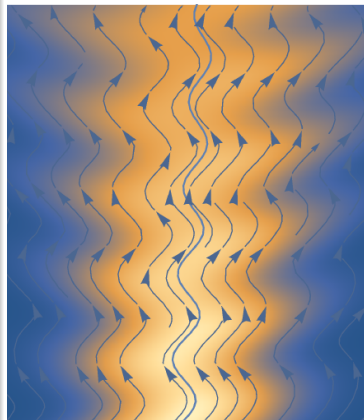
- Istnieje $\sigma \in \mathcal{P}(A_T^I)$ taka, że

$$\mu_t = \sigma \circ \text{ev}_t^{-1}, \quad t \in I.$$

- Ozn. $\mathcal{M}_I := \mathcal{T}^{-1}(I^\circ)$. Istnieje $X : C_c^\infty(\mathcal{M}_I) \rightarrow L^2(\mathcal{M}_I, \int_I \mu_t dt)$ liniowe i spełniające $\forall \Phi, \Psi \in C_c^\infty(\mathcal{M}_I)$:

1. $X(\Phi\Psi) = X(\Phi)\Psi + \Phi X(\Psi)$
2. $X(\Phi\mathcal{T}) - X(\Phi)\mathcal{T} = \Phi$ (“ $X(\mathcal{T}) = 1$ ”)
3. $\int_I \int_{\mathcal{M}} X(\Psi) d\mu_t dt = 0$ (r-nie ciągłości)
4. $\forall \tilde{\mathcal{T}} \in C^\infty(\mathcal{M}_I)$ – temporalna $X(\Phi\tilde{\mathcal{T}}) - X(\Phi)\tilde{\mathcal{T}} = \Phi$ (przyczynowość)

Co więcej: $(\int_{\mathcal{M}} \Phi d\mu_t)' = \int_{\mathcal{M}} X(\Phi) d\mu_t.$



Take-home messages

- Relacja poprzedzania przyczynowego \preceq daje się **naturalnie** rozszerzyć na przestrzeń $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ miar probabilistycznych na czasoprzestrzeni \mathcal{M} .
- Tak rozszerzoną relację można wykorzystać w opisie **przyczynowej ewolucji miar prob.** w czasoprzestrzeniach glob. hiperbolicznych.
 - Czasowa ewolucja cząstki **punktowej** \rightsquigarrow pojedyncza linia świata.
 - Czasowa ewolucja obiektu **nielokalnego** \rightsquigarrow miara **probabilistyczna** na przestrzeni linii świata.
- Słaba H^1_{loc} -topologia “czuje” strukturę różniczkową linii świata, a jednocześnie jest bardzo “porządna” — lokalnie zwarta i polska.
- Przyczynowa ewolucji jest charakteryzowana przez **równanie ciągłości** z podświetlnym polem prędkości.

- Relacja poprzedzania przyczynowego \preceq daje się **naturalnie** rozszerzyć na przestrzeń $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ miar probabilistycznych na czasoprzestrzeni \mathcal{M} .
- Tak rozszerzoną relację można wykorzystać w opisie **przyczynowej ewolucji miar prob.** w czasoprzestrzeniach glob. hiperbolicznych.
 - Czasowa ewolucja cząstki **punktowej** \iff **pojedyncza** linia świata.
 - Czasowa ewolucja obiektu **nielokalnego** \iff **miara probabilistyczna** na przestrzeni linii świata.
- Słaba H_{loc}^1 -topologia “czuje” strukturę różniczkową linii świata, a jednocześnie jest bardzo “porządna” — lokalnie zwarta i polska.
- Przyczynowa ewolucja jest charakteryzowana przez **równanie ciągłości** z podświetlnym polem prędkości.

- Relacja poprzedzania przyczynowego \preceq daje się **naturalnie** rozszerzyć na przestrzeń $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ miar probabilistycznych na czasoprzestrzeni \mathcal{M} .
- Tak rozszerzoną relację można wykorzystać w opisie **przyczynowej ewolucji miar prob.** w czasoprzestrzeniach glob. hiperbolicznych.
 - Czasowa ewolucja cząstki **punktowej** \iff **pojedyncza** linia świata.
 - Czasowa ewolucja obiektu **nielokalnego** \iff **miara probabilistyczna** na przestrzeni linii świata.
- Słaba H^1_{loc} -topologia “czuje” strukturę różniczkową linii świata, a jednocześnie jest bardzo “porządna” — lokalnie zwarta i polska.
- Przyczynowa ewolucja jest charakteryzowana przez **równanie ciągłości** z podświetlnym polem prędkości.

- Relacja poprzedzania przyczynowego \preceq daje się **naturalnie** rozszerzyć na przestrzeń $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ miar probabilistycznych na czasoprzestrzeni \mathcal{M} .
- Tak rozszerzoną relację można wykorzystać w opisie **przyczynowej ewolucji miar prob.** w czasoprzestrzeniach glob. hiperbolicznych.
 - Czasowa ewolucja cząstki **punktowej** \iff **pojedyncza** linia świata.
 - Czasowa ewolucja obiektu **nielokalnego** \iff **miara probabilistyczna** na przestrzeni linii świata.
- Słaba H_{loc}^1 -topologia “czuje” strukturę różniczkową linii świata, a jednocześnie jest bardzo “porządna” — lokalnie zwarta i polska.
- Przyczynowa ewolucji jest charakteryzowana przez **równanie ciągłości** z podświetlnym polem prędkości.

- Relacja poprzedzania przyczynowego \preceq daje się **naturalnie** rozszerzyć na przestrzeń $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ miar probabilistycznych na czasoprzestrzeni \mathcal{M} .
- Tak rozszerzoną relację można wykorzystać w opisie **przyczynowej ewolucji miar prob.** w czasoprzestrzeniach glob. hiperbolicznych.
 - Czasowa ewolucja cząstki **punktowej** \iff **pojedyncza** linia świata.
 - Czasowa ewolucja obiektu **nielokalnego** \iff **miara probabilistyczna** na przestrzeni linii świata.
- Słaba H_{loc}^1 -topologia “czuje” strukturę różniczkową linii świata, a jednocześnie jest bardzo “porządna” — lokalnie zwarta i polska.
- Przyczynowa ewolucja jest charakteryzowana przez **równanie ciągłości** z podświetlnym polem prędkości.









„Cały świat okazuje się rozplatać na takie linie świata, i pragnę z góry powiedzieć, iż w moim rozumieniu prawa fizyki mogą znaleźć swój najpełniejszy wyraz jako współzależności między tymi liniami.”

— *Hermann Minkowski*

Rys. Marion le Crayon

Dziękuję za uwagę!

-  T. Miller, *Causal evolution and continuity equation*, in preparation.
-  T. Miller, M. Eckstein, P. Horodecki, R. Horodecki, *Generally covariant N -particle dynamics*, J. Geom. Phys., in press (2020).
-  M. Eckstein, P. Horodecki, R. Horodecki, T. Miller, *Operational causality in spacetime*, Phys. Rev. A 101, 042128 (2020).
-  T. Miller, *Polish spaces of causal curves*, J. Geom. Phys. 116, 295–315 (2017).
-  M. Eckstein, T. Miller, *Causality for nonlocal phenomena*, Ann. Henri Poincaré 18(9), 3049–3096 (2017).
-  M. Eckstein, T. Miller, *Causal evolution of wave packets*, Phys. Rev. A 95, 032106 (2017).