Matematyka II IChiP- konspekt wykładu cz.I

Agata Pilitowska

2007

1 Przestrzeń $\mathbb{R}^n$.

Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych i niech $n \in \mathbb{N}$.

Rozważmy zbiór $\mathbb{R}^n$ wszystkich uporządkowanych ciągów n-wyrazowych liczb rzeczywistych.

Ciągi $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy ***punktami*** (elementami, wektorami) n-wymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^n$, zaś liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ współrzędnymi tych punktów.

Dwa elementy $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ uważamy za równe, jeżeli mają wszystkie współrzędne równe, tzn. dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i = y_i$. Zapis $\overline{x} \neq \overline{y}$ oznacza, że warunek równości nie jest spełniony, czyli dla co najmniej jednego $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_i \neq y_i$.

Definicja 1.1. ***Odległość*** *$d(\overline{x}, \overline{y})$ dwóch punktów $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ określamy wzorem:*

$$d(\overline{x}, \overline{y}) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Przykład 1.2. Zbiór $\mathbb{R}$ liczb rzeczywistych z odległością między punktami $\overline{x} = (x_1)$ i $\overline{y} = (y_1)$ określoną wzorem $d(\overline{x}, \overline{y}) = \mid x_1 - y_1 \mid$ jest przestrzenią $\mathbb{R}^1$. Interpretacją geometryczną tej przestrzeni jest prosta. □

Przykład 1.3. Zbiór par uporządkowanych liczb rzeczywistych z odległością między punktami $\overline{x} = (x_1, x_2)$ i $\overline{y} = (y_1, y_2)$ określoną wzorem $d(\overline{x}, \overline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ jest przestrzenią $\mathbb{R}^2$. Interpretacją geometryczną tej przestrzeni jest płaszczyzna. □

Przykład 1.4. Zbiór trójek uporządkowanych liczb rzeczywistych z odległością między punktami $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ określoną wzorem $d(\overline{x}, \overline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ jest przestrzenią $\mathbb{R}^3$. Interpretacją geometryczną tej przestrzeni jest przestrzeń trójwymiarowa. □

Z definicji wynika, że odległość dwóch punktów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zawsze jest liczbą rzeczywistą, nieujemną. Ponadto spełnia następujące warunki:

- $d(\overline{x}, \overline{y}) = 0 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$
- $d(\overline{x}, \overline{y}) = d(\overline{y}, \overline{x})$ (prawo symetrii)
- $d(\overline{x}, \overline{y}) + d(\overline{y}, \overline{z}) \geqslant d(\overline{x}, \overline{z})$ (nierówność trójkąta)

1.1 Zbiory w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Otoczenie i sąsiedztwo.

Definicja 1.5. ***Otoczeniem*** *$O(\overline{p}; r)$ punktu $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ o promieniu $r \in \mathbb{R}^+$ nazywamy zbiór $O(\overline{p}; r) = \{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid d(\overline{p}, \overline{x}) < r\}$.*

Definicja 1.6. ***Sąsiedztwem*** *$S(\overline{p}; r)$ punktu $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ o promieniu $r \in \mathbb{R}^+$ nazywamy zbiór $S(\overline{p}; r) = \{\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < d(\overline{p}, \overline{x}) < r\}$.*

Przykład 1.7. W przestrzeni $\mathbb{R}^1$ otoczenie punktu $\overline{p} = (p_1)$ o promieniu $r \in \mathbb{R}^+$ jest przedziałem otwartym $O(\overline{p}; r) = (p_1 - r, p_1 + r)$. □

Przykład 1.8. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ otoczenie punktu $\overline{p} = (p_1, p_2)$ o promieniu $r \in \mathbb{R}^+$ jest wnętrzem koła $O(\overline{p}; r) = \{(x_1, x_2) \mid (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 < r^2\}$ o środku w punkcie $\overline{p} = (p_1, p_2)$ i promieniu r. Sąsiedztwo $S(\overline{p}; r)$ jest wnętrzem tego koła bez punktu $\overline{p}$. □

Przykład 1.9. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ otoczenie punktu $\overline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ o promieniu $r \in \mathbb{R}^+$ jest wnętrzem kuli $O(\overline{p}; r) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2 < r^2\}$ o środku w punkcie $\overline{p} = (p_1, p_2, p_3)$ i promieniu r, natomiast sąsiedztwo $S(\overline{p}; r)$ jest wnętrzem tej kuli bez punktu $\overline{p}$. □

Zbiory otwarte i domknięte.

Definicja 1.10. *Punkt $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ jest* ***punktem wewnętrznym*** *zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$, jeżeli zbiór A zawiera pewne otoczenie punktu $\overline{x}$. Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru A nazywamy jego wnętrzem i oznaczamy $IntA$.*
Punkt $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ jest ***punktem zewnętrznym*** *zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$, jeżeli istnieje otoczenie punktu $\overline{x}$, które nie zawiera się w zbiorze A.*
Punkt $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ jest ***punktem brzegowym*** *zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$, jeżeli nie jest ani punktem wewnętrznym, ani punktem zewnętrznym tego zbioru. Brzegiem zbioru A jest zbiór wszystkich punktów brzegowych tego zbioru.*

Punkt $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ jest zatem punktem brzegowym zbioru A, jeśli w każdym otoczeniu tego punktu znajduje się zarówno punkt należący do zbioru A jak i punkt, który do tego zbioru nie należy.

Przykład 1.11. Niech $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 > 0\}$. Każdy punkt zbioru A jest jego punktem wewnętrznym. Każdy punkt należący do zbioru $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 < 0\}$ jest punktem zewnętrznym zbioru A. □

Przykład 1.12. Niech $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 \leqslant 1, 0 < x_2 < 1\}$. Punkt $(1, \frac{1}{2})$ jest punktem brzegowym zbioru A i należy do tego zbioru. Punkt $(1, 1)$ jest także punktem brzegowym tego zbioru, ale do niego nie należy. □

Przykład 1.13. Brzegiem koła $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ jest okrąg $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$. □

Definicja 1.14. *Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest* ***ograniczony****, jeżeli istnieje punkt $\overline{p} \in \mathbb{R}^n$ i taka liczba rzeczywista $r > 0$, że $A \subset O(\overline{p}; r)$. Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest nieograniczony, gdy takie otoczenie $O(\overline{p}; r)$ nie istnieje.*

Przykład 1.15. W przestrzeni $\mathbb{R}^2$ zbiór jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzbiorem wnętrza koła o środku w początku układu współrzędnych i określonym promieniu r. Jeżeli koło takie nie istnieje, to zbiór jest nieograniczony. □

Definicja 1.16. *Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest* ***skończony****, jeżeli należy do niego dokładnie $n \in \mathbb{N}$ punktów. Zbiór A jest nieskończony, jeżeli nie jest on ani pusty ani skończony.*

Przykład 1.17. Zbiór $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\}$ jest skończony i należą do niego dwa punkty.
Zbiór $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\}$ jest nieskończony. □

Zbiór ograniczony może być skończony albo nieskończony. Każdy zbiór skończony jest ograniczony.

Definicja 1.18. *Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem* ***otwartym****, jeżeli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym zbioru A.*

Przykład 1.19. Zbiory $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 > 0\}$ oraz $B = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ są zbiorami otwartymi. □

Definicja 1.20. *Punkt $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ jest* ***punktem skupienia zbioru*** *$A \subset \mathbb{R}^n$, jeśli każde sąsiedztwo $S(\overline{x}, r)$ tego punktu zawiera punkt ze zbioru A.*

Punkty wewnętrzne i brzegowe zbioru otwartego są jego punktami skupienia.

Przykład 1.21. Niech $A := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 4\}$. Punkt $(0, 0)$ należy do zbioru A i jest jego punktem skupienia. Punkt $(2, 0)$ nie należy do zbioru A, ale także jest jego punktem skupienia, ponieważ w każdym sąsiedztwie $S((2, 0), r)$ znajdują się punkty zbioru A. □

Przykład 1.22. Niech $A \subset \mathbb{R}^3$ oznacza zbiór będący sumą płaszczyzny OXY oraz zbioru jedno-elementowego $\{(0, 0, 2)\}$. Punkt $(0, 0, 2)$ należy do zbioru A, ale nie jest jego punktem skupienia, ponieważ istnieje sąsiedztwo $S((0, 0, 2), 1)$ nie zawierające żadnego punktu ze zbioru A. □

Każde otoczenie punktu skupienia zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$ musi zawierać nieskończenie wiele punktów z tego zbioru. Zatem żaden skończony podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^n$ nie ma punktów skupienia.

Definicja 1.23. *Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem* ***domkniętym****, jeśli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia. Domknięciem $\overline{A}$ zbioru A nazywamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający A.*

Z definicji wynika, że dla każdego zbioru domkniętego A mamy $A = \overline{A}$.

Przykład 1.24. Zbiorami domkniętymi są: koło $\{(x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ na płaszczyźnie, zbiór $\{(x_1, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$, cała płaszczyzna. $\square$

Cała przestrzeń $\mathbb{R}^n$ i zbiór pusty $\emptyset$ są jednocześnie zbiorami otwartymi i domkniętymi.

Przykład 1.25. Rozważmy zbiór $A := \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 \leqslant 1, 0 < x_2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Zbiór A nie jest zbiorem otwartym, ponieważ zawiera punkt $(1, \frac{1}{2})$, który nie jest jego punktem wewnętrznym. Nie jest to także zbiór domknięty, ponieważ nie zawiera punktu $(1, 1)$, który jest jego punktem skupienia. Zatem zbiór A nie jest ani otwarty ani domknięty. $\square$

Definicja 1.26. *Punkt $\overline{x} \in A \subseteq \mathbb{R}^n$, który nie jest punktem skupienia zbioru A jest **punktem odosobnionym** tego zbioru.*

Przykład 1.27. Punkt $(1, 2)$ jest punktem odosobnionym zbioru
$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + x_2 = 1\} \cup \{(1, 2)\}$. $\square$

Prawdziwe są następujące fakty:

- Suma zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.
- Przecięcie zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.
- Dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \overline{A}$.
- Jeżeli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, to zbiór $\mathbb{R}^n \setminus A$ jest zbiorem domkniętym.
- Jeżeli zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym, to zbiór $\mathbb{R}^n \setminus A$ jest zbiorem otwartym.
- Suma zbioru i jego brzegu jest zbiorem domkniętym.

Definicja 1.28. *Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest **spójny**, jeżeli przy każdym rozkładzie na dwa niepuste, rozłączne zbiory A_1 i A_2, przynajmniej jeden ze zbiorów A_1, A_2 ma punkt skupienia należący do drugiego zbioru.*

Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}^n$ jest spójny, jeżeli przy każdym rozkładzie na dwa niepuste, rozłączne zbiory A_1 i A_2, zbiory $\overline{A_1} \cap A_2$ i $A_1 \cap \overline{A_2}$ nie są jednocześnie puste. Cała przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem spójnym. Zbiór spójny może być zarówno ograniczony jak i nieograniczony.

Przykład 1.29. Każdy odcinek prostej jest zbiorem spójnym. Gdy odrzucimy z niego dowolny punkt wewnętrzny przestanie być zbiorem spójnym. □

Przykład 1.30. Okrąg jest zbiorem spójnym i pozostanie spójny, gdy odrzucimy z niego jeden punkt. Gdy odrzucimy z niego dwa różne punkty przestanie być zbiorem spójnym. □

Definicja 1.31. *Zbiór otwarty i spójny nazywamy* ***obszarem****.*
Domknięcie obszaru nazywamy ***obszarem domkniętym****.*

1.2 Krzywe w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Definicja 1.32. *Niech $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ będą funkcjami ciągłymi w przedziale domkniętym $[\alpha, \beta]$ o wartościach rzeczywistych. Dla przekształcenia*

$$\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n; \quad \varphi(t) := (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

zbiór $\{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ nazywamy ***krzywą*** *o przedstawieniu parametrycznym $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ a zmienną t - parametrem.*
Punkt $A = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), \ldots, x_n(\alpha))$ nazywamy początkiem krzywej, natomiast punkt $B = (x_1(\beta), x_2(\beta), \ldots, x_n(\beta))$ - końcem krzywej.
Jeśli $A \neq B$, to krzywą nazywamy otwartą, jeśli $A = B$ to krzywą nazywamy zamkniętą.
Jeżeli przekształcenie φ jest różnowartościowe dla $t \in (\alpha, \beta)$, to krzywą $\{\varphi(t) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ nazywamy ***łukiem*** *(zwykłym) w przestrzeni $\mathbb{R}^n$.*

Łuk zwykły nie ma punktów wielokrotnych (jest krzywą nie przecinającą się ze sobą).

Przykład 1.33. Linia śrubowa jest krzywą w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ o następującym przedstawieniu parametrycznym:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r\cos t \\ x_2(t) &= r\sin t \\ x_3(t) &= t, \qquad \text{dla } t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Początkiem krzywej jest punkt $A = (r, 0, 0)$ natomiast końcem punkt $B = (r, 0, 2\pi)$. □

Krzywa może być określona różnymi równaniami parametrycznymi.

Przykład 1.34. Górny półokrąg okręgu $x^2 + y^2 = r^2$ ma dwa różne przedstawienia parametryczne:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r\cos t \\ x_2(t) &= r\sin t \quad \text{dla} \;\; t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} x_1(t) &= r\cos 2t \\ x_2(t) &= r\sin 2t \quad \text{dla} \;\; t \in [0, \tfrac{\pi}{2}]. \end{aligned}$$

□

Definicja 1.35. *Krzywą* $\{\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ *nazywamy* ***łukiem gładkim****, jeśli jest łukiem zwykłym oraz wszystkie funkcje* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ *mają na przedziale* $[\alpha, \beta]$ *ciągłe pierwsze pochodne i spełniają warunek:*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 > 0. \tag{1.1}$$

Łuk gładki ma w każdym punkcie (wewnętrznym i końcowym) styczną zmieniającą się w sposób ciągły.

Przykład 1.36. Linia śrubowa jest łukiem gładkim. □

Definicja 1.37. *Krzywą nazywamy* ***krzywą kawałkami gładką****, jeżeli daje się podzielić na skończoną ilość łuków gładkich.*

Krzywa kawałkami gładka może mieć skończoną liczbę punktów, w których nie da się poprowadzić stycznej. Są to tzw. ostrza krzywej.

Przykład 1.38. Asteroida - krzywa określona równaniami:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos^3 t \\ x_2 &= r\sin^3 t \quad \text{dla} \;\; t \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

jest krzywą kawałkami gładką, gdyż można ją przedstawić jako sumę czterech łuków regularnych. Asteroida ma cztery ostrza. □

Definicja 1.39. ***Obszarem łukowo spójnym*** *nazywamy zbiór otwarty, którego każde dwa punkty można połączyć łukiem całkowicie w nim zawartym.*

Każdy obszar łukowo spójny jest spójny.

Definicja 1.40. ***Krzywa Jordana*** *jest to krzywa zamknięta bez punktów wielokrotnych.*

Przykład 1.41. Krzywymi Jordana w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ są: okrąg, elipsa, łamana będąca brzegiem wielokąta wypukłego. $\square$

Płaska krzywa Jordana dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Jeden z tych obszarów jest ograniczony i nazywamy go wnętrzem krzywej Jordana. Drugi z nich jest nieograniczony i zwany jest zewnętrzem krzywej.

Definicja 1.42. *Obszar w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ nazywamy jednospójnym, jeśli jest ograniczony jedną krzywą Jordana.*

Przykład 1.43. Obszarem jednospójnym są: prostokąt bez brzegu, koło bez brzegu, cała płaszczyzna. $\square$

Obszary jednospójne, jeśli zawierają pewną krzywą Jordana, to zawierają całe jej wnętrze.

Definicja 1.44. *Obszar w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ ograniczony p krzywymi Jordana nieprzecinającymi się nazywamy p-jednospójnym.*

Przykład 1.45. Obszarem 2-spójnym jest pierścień $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1^2 < x_1^2 + x_2^2 < r_2^2\}$, dla $0 < r_1 < r_2$. $\square$

Uwaga 1.46. Cała przestrzeń jest zbiorem otwartym i spójnym, a więc jest obszarem. Jest to obszar nieograniczony pozbawiony brzegu. Zaliczamy go do obszarów jednospójnych.

Definicja 1.47. *Obszar D w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ nazywamy **powierzchniowo jednospójnym**, jeśli od każdej krzywej kawałkami gładkiej zawartej w tym obszarze i łączącej dwa dowolne ustalone punkty tego obszaru można "przejść" w sposób ciągły (bez odrywania) do każdej innej krzywej łączącej te punkty i należącej do tego obszaru.*

Przykład 1.48. Obszarami powierzchniowo jednospójnymi są wnętrze kuli, wnętrze stożka, wnętrze walca, wnętrze graniastosłupu, cała przestrzeń $\mathbb{R}^3$. Natomiast kula bez średnicy nie jest obszarem powierzchniowo jednospójnym. $\square$

2 Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych.

Funkcje n-zmiennych rzeczywistych.

Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Jeżeli każdemu elementowi $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ przyporządkujemy dokładnie jedną liczbę $w \in \mathbb{R}$, to powiemy że w zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}^n$ została określona funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ n-zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Zmienne $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$ nazywamy zmiennymi niezależnymi. Liczbę $w \in \mathbb{R}$ przyporządkowaną elementowi $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazywamy wartością funkcji f w punkcie $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Piszemy wówczas $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ lub krótko $w = f(\overline{x})$.

Zbiór A nazywamy dziedziną funkcji f, zaś zbiór $f(A) = \{w = f(\overline{x}) \in \mathbb{R} \mid \overline{x} \in A\}$ wartości funkcji nazywamy przeciwdziedziną tej funkcji.
Jeżeli f jest funkcją określoną pewnym wzorem i nie ma przy tym dodatkowych założeń, to przez dziedzinę funkcji n-zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rozumieć będziemy zbiór tych wszystkich punktów $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dla których wzór określający funkcję f ma sens.

Przykład 2.1.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $w = f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0, & x_2 \leqslant x_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \mid x_1 - x_2 \mid, & x_2 > x_1 \end{cases}$

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $w = f(x_1, x_2) := \begin{cases} 1, & x_1, x_2 \in \mathbb{Q} \\ 0, & x_1, x_2 \notin \mathbb{Q} \\ 1, & x_1 \in \mathbb{Q}, x_2 \notin \mathbb{Q} \text{ lub } x_1 \notin \mathbb{Q}, x_2 \in \mathbb{Q} \end{cases}$

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $w = f(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2$.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $w = f(x_1, x_2) := \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$.
   Dziedziną funkcji f jest zbiór $A = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$; $w = f(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 + x_2^2 + \sqrt{x_3}$.
   Dziedziną funkcji f jest zbiór $A = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 \geqslant 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

6. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $w = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.
   Funkcja f określa odległość dowolnego punktu $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ od początku układu współrzędnych. $\square$

Funkcję $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ dwóch zmiennych można interpretować geometrycznie. Niech $OXYZ$ będzie prostokątnym układem współrzędnych. Każdemu punktowi $(x_1, x_2) \in A$ przyporządkowany jest dokładnie jeden punkt $(x_1, x_2, w) \in \mathbb{R}^3$, przy czym $w = f(x_1, x_2)$.

Definicja 2.2. *Zbiór* $S := \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) \mid (x_1, x_2) \in A\}$ *nazywamy* ***wykresem funkcji*** $f : A \to \mathbb{R}$ *dwóch zmiennych.*

Jeżeli w każdym punkcie $\overline{x} = (x_1, x_2) \in A$ odłożymy na prostopadłej do płaszczyzny OXY, wystawionej z punktu $\overline{x}$, wartość $f(x_1, x_2)$, to zbiór S wszystkich punktów $(x_1, x_2, f(x_1, x_2))$ tworzy na ogół pewną powierzchnię. Równanie $x_3 = f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in A$ jest wówczas równaniem tej powierzchni.

Sporządzenie wykresu funkcji dwóch zmiennych jest często dość trudne.

Przykład 2.3. Wykresem funkcji dwóch zmiennych $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$ jest paraboloida eliptyczna o równaniu $x_3 = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2}$. $\square$

Definicja 2.4. *Funkcję* $f : A \to \mathbb{R}$ *nazywamy* ***funkcją ograniczoną*** *w zbiorze* A*, jeżeli istnieje taka liczba* $m \in \mathbb{R}$*, że dla każdego* $\overline{x} \in A$, $\mid f(\overline{x}) \mid \leqslant m$.

Przykład 2.5. Funkcja $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 - x_2)$ jest ograniczona na całej płaszczyźnie (dla $m = 1$).
Funkcja $f(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$ nie jest ograniczona w sąsiedztwie początku układu współrzędnych. Jest natomiast ograniczona w pierścieniu $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x_1^2 + x_2^2 < e^2\}$ (dla $m = 2$). $\square$

W przypadku, gdy wymiar przestrzeni n jest niewielki ($n = 1, 2, 3$), często zamiast indeksów będziemy używać różnych liter do wyróżnienia kolejnych współrzędnych.

2.1 Granica i ciągłość funkcji n-zmiennych rzeczywistych.

Definicja 2.6. ***Ciągiem*** *punktów w przestrzeni* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej punktu przestrzeni* $\mathbb{R}^n$*. Wartość tego przyporządkowania dla liczby naturalnej* k *nazywamy* k*-tym wyrazem ciągu. Ciąg oznaczamy* $(\overline{x}_k)$*.*

Rozważmy ciąg punktów $(\overline{x}_k)$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech $\overline{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Definicja 2.7. *Ciąg punktów* $(\overline{x}_k)$ *jest* ***zbieżny*** *do punktu* $\overline{p}_0 \in \mathbb{R}^n$*, co zapisujemy* $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{p}_0$ *lub* $\overline{x}_k \to \overline{p}_0$ *gdy* $k \to \infty$*, jeżeli w dowolnym otoczeniu tego punktu znajdują się prawie wszystkie wyrazy ciągu.*

Ciąg $(\overline{x}_k)$ jest zbieżny do punktu $\overline{p}_0$, jeżeli odległości $d(\overline{x}_k, \overline{p}_0)$ punktów $\overline{x}_k$ od punktu $\overline{p}_0$ dążą do zera, gdy $k \to \infty$, czyli gdy $\lim_{k\to\infty} d(\overline{x}_k, \overline{p}_0) = 0$.

Twierdzenie 2.8. *Ciąg* $(\overline{x}_k)$ *jest zbieżny do punktu* $\overline{p}_0 = (p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0}) \in \mathbb{R}^n$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $1 \leqslant i \leqslant n$*,*

$$\lim_{k\to\infty} x_{ik} = p_{i0}.$$

Przykład 2.9. Ciąg punktów $(\overline{x}_k) = (\frac{1}{k}, \frac{2-k}{2k+1}, \frac{k}{k+1})$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ jest zbieżny do punktu $\overline{p}_0 = (0, -\frac{1}{2}, 1)$. □

Granica wielokrotna.

Niech $f : A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją n-zmiennych określoną w zbiorze A i niech $\overline{p}_0$ będzie punktem skupienia tego zbioru.

Definicja 2.10. (Definicja Heinego [1] granicy funkcji.)
Liczbę $g \in \mathbb{R}$ *nazywamy* ***granicą funkcji*** $f : A \to \mathbb{R}$ *w punkcie* $\overline{p}_0$*, jeżeli dla każdego ciągu punktów* $(\overline{x}_k)$ *o wyrazach należących do zbioru A, różnych od punktu* $\overline{p}_0$ *i zbieżnego do* $\overline{p}_0$*, ciąg* $(f(\overline{x}_k))$ *jest zbieżny do* g*.*

Jeżeli liczba $g \in \mathbb{R}$ jest granicą funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ w punkcie $\overline{p}_0$, to zapisujemy

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{p}_0} f(\overline{x}) = g,$$

lub

$$f(\overline{x}) \to g, \text{ gdy } \overline{x} \to \overline{p}_0.$$

Podobnie jak dla funkcji jednej zmiennej możemy podać również definicję Cauchy'ego granicy funkcji wielu zmiennych.

Definicja 2.11. (Definicja Cauchy'ego [2] granicy funkcji.)
Liczbę $g \in \mathbb{R}$ *nazywamy* ***granicą funkcji*** $f : A \to \mathbb{R}$ *w punkcie* $\overline{p}_0$*, jeżeli*

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(\overline{x} \in A)(0 < d(\overline{x}, \overline{p}_0) < \delta) \Rightarrow (| f(\overline{x}) - g |< \varepsilon).$$

[1] Eduard Heinrich Heine (1821-1881) - matematyk niemiecki
[2] Augustin Louis Cauchy (1789-1857) - matematyk i fizyk francuski

Powyższy warunek oznacza, że wartość funkcji $f(\overline{x})$ różni się od liczby g dowolnie mało, jeżeli punkt $\overline{x}$ jest położony dostatecznie blisko punktu $\overline{p}_0$. Zauważmy, że funkcja f może wcale nie być określona w punkcie $f(\overline{p}_0)$.

Granicę funkcji n-zmiennych nazywamy także ***granicą n-krotną***. W przypadku funkcji dwóch zmiennych granicą podwójną. Granicę funkcji dwóch zmiennych $f(x,y)$ w punkcie (x_0,y_0) zwykle oznaczamy:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \quad \text{lub} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y).$$

Definicje Heinego i Cauchy'ego granicy funkcji dwóch zmiennych są równoważne. W niektórych zagadnieniach wygodniej jest posłużyć się definicją Heinego, w innych zaś definicją Cauchy'ego. Z praktycznego punktu widzenia definicja Heinego zawiera więcej elementów konstrukcyjnych. Często korzystamy z niej chcąc wykazać, że pewna granica nie istnieje. Wystarczy wówczas pokazać, że istnieją takie dwa ciągi $(\overline{x}_k^1)$ i $(\overline{x}_k^2)$ punktów dziedziny rozważanej funkcji zbieżne do punktu $\overline{p}_0$, ale od niego różne, dla których odpowiednie ciągi wartości funkcji $f(\overline{x}_k^1)$ i $f(\overline{x}_k^2)$ nie są zbieżne do tej samej granicy g.

Przykład 2.12. Dla $x \neq y$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3-y^3}{x-y} = 0.$$

□

Przykład 2.13. Granica podwójna

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

nie istnieje. □

Definicja 2.14. *Jeżeli dla każdego ciągu punktów $(\overline{x}_k)$ o wyrazach należących do zbioru A, różnych od punktu $\overline{p}_0$ i zbieżnego do $\overline{p}_0$, odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $f(\overline{x}_k)$ jest rozbieżny do $+\infty$ $(-\infty)$, to mówimy, że rozważana funkcja ma w punkcie $\overline{p}_0$ granicę niewłaściwą $+\infty$ $(-\infty)$ i zapisujemy:*

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{p}_0} f(\overline{x}) = +\infty \ (-\infty).$$

Twierdzenie 2.15. *Jeżeli funkcje $f, h : A \to \mathbb{R}$ mają w punkcie $\overline{p}_0$ odpowiednio granice g_1 i g_2, to*

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{p}_0}(f(\overline{x}) \pm h(\overline{x})) = g_1 \pm g_2,$$

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{p}_0}(f(\overline{x}) \cdot h(\overline{x})) = g_1 \cdot g_2,$$

$$\lim_{\overline{x}\to\overline{p}_0}\frac{f(\overline{x})}{h(\overline{x})} = \frac{g_1}{g_2}, \quad \text{gdy} \quad g_2 \neq 0 \ \text{ oraz } \ \forall(\overline{x} \in A)h(\overline{x}) \neq 0.$$

Granice iterowane.

Niech $A := X \times Y \subseteq \mathbb{R}^2$.

Definicja 2.16. *Załóżmy, że przy ustalonym $y \in Y$ istnieje granica funkcji f przy $x \to x_0$. Granica $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ zależy od ustalonego $y \in Y$. Jeżeli przy $y \to y_0$ istnieje granica*

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y) = \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x, y)),$$

to nazywamy ją ***granicą iterowaną*** *funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0), gdy najpierw $x \to x_0$ a następnie $y \to y_0$.*
Załóżmy, teraz że przy ustalonym $x \in X$ istnieje granica funkcji f przy $y \to y_0$. Granica $\lim\limits_{y\to y_0} f(x, y) = \phi(x)$ zależy od ustalonego $x \in X$. Jeżeli przy $x \to x_0$ istnieje granica

$$\lim_{x\to x_0}\phi(y) = \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x, y)),$$

to nazywamy ją granicą iterowaną [3] *funkcji $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0), gdy najpierw $y \to y_0$ a następnie $x \to x_0$.*

Funkcja f dwu zmiennych niezależnych x i y może mieć dwie granice iterowane, które różnią się kolejnością przejścia do granicy.
Istnienie granicy funkcji w punkcie (x_0, y_0) jest niezależne od istnienia granic iterowanych. Granica podwójna funkcji $f(x, y)$ może nie istnieć, natomiast granice iterowane istnieją i na odwrót.

Twierdzenie 2.17. *Jeżeli istnieje granica podwójna i co najmniej jedna z granic iterowanych, to granica podwójna jest równa tej granicy iterowanej.*

[3] Termin granica iterowana pochodzi od łacińskiego słowa *iterare* - powtarzać.

Przykład 2.18. Granice iterowane w punkcie $(0,0)$ funkcji

$$f(x,y) = \frac{2x - y + x^2 + y^2}{x + y}, \quad \text{dla} \;\; x + y \neq 0$$

istnieją, ale są różne. Zatem funkcja $f(x,y)$ nie posiada w punkcie $(0,0)$ granicy podwójnej. $\square$

Przykład 2.19. W punkcie $(0,0)$ istnieje tylko jedna z granic iterowanych funkcji

$$f(x,y) = x \sin(\frac{1}{y}), \quad \text{dla} \;\; y \neq 0.$$

Ale funkcja ta ma w punkcie $(0,0)$ granicę podwójną równą 0. $\square$

Ciągłość funkcji n-zmiennych.

Niech $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicja 2.20. *Funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest* ***ciągła w punkcie*** *$\overline{p}_0 \in A$, jeżeli dla każdego ciągu $(\overline{x}_k)$ punktów zbioru A zbieżnego do punktu $\overline{p}_0$,*

$$\lim_{k \to \infty} f(\overline{x}_k) = f(\overline{p}_0).$$

Ciągłość funkcji f w punkcie $\overline{p}_0$ oznacza, że

$$\lim_{\overline{x} \to \overline{p}_0} f(\overline{x}) = f(\overline{p}_0).$$

Funkcja jest ciągła w pewnym zbiorze, jeżeli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Przykład 2.21. Funkcja $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ jest ciągła w punkcie $\overline{x}_0 = (1,1)$, ponieważ $f(1,1) = \frac{1}{2}$ oraz $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 1}} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$. $\square$

Przykład 2.22. Funkcja $f(x,y) = x^2 + xy + y^3$ jest ciągła na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.
Funkcja $f(x,y) = \ln(x+y)$ jest ciągła w każdym punkcie dziedziny. $\square$

Jeżeli funkcja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-zmiennych określona w pewnym otoczeniu punktu $\overline{p}_0 = (p_{10}, p_{20}, \dots, p_{n0})$ jest w tym punkcie ciągła, to dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$, funkcja $f(p_{10}, p_{20}, \dots, p_{(i-1)0}, x_i, p_{(i+1)0}, \dots, p_{n0})$ jednej zmiennej x_i jest ciągła w punkcie $\overline{p}_0$. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Przykład 2.23. Funkcja dwóch zmiennych

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$, ponieważ granica podwójna funkcji f nie istnieje w tym punkcie.
Natomiast funkcja $f(x,0) \equiv 0$ jest ciągła w punkcie $x = 0$ oraz funkcja $f(0,y) \equiv 0$ jest ciągła w punkcie $y = 0$. □

Twierdzenie 2.24. *Jeżeli funkcje f i h są ciągłe w punkcie $\overline{p}_0$, to suma, różnica i iloczyn tych funkcji są funkcjami ciągłymi w tym punkcie. Iloraz jest funkcją ciągłą przy dodatkowym założeniu, że dzielenie jest wykonalne.*

Twierdzenie 2.25. (Twierdzenie o lokalnym zachowaniu znaku.)
Jeżeli funkcja f określona w pewnym otoczeniu punktu $\overline{p}_0$, jest w tym punkcie ciągła i $f(\overline{p}_0) > 0$ (albo $f(\overline{p}_0) < 0$), to istnieje takie sąsiedztwo S punktu $\overline{p}_0$, że dla każdego punktu $\overline{x} \in S$ jest spełniona nierówność $f(\overline{x}) > 0$ (albo $f(\overline{x}) < 0$).

Twierdzenie 2.26. (Twierdzenie o ograniczoności funkcji.)
Jeżeli funkcja f jest ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym, to jest w tym obszarze ograniczona.

Jeżeli funkcja f jest ciągła w obszarze domkniętym i nieograniczonym albo w obszarze ograniczonym, to może być nieograniczona w tym obszarze.

Przykład 2.27. Funkcja $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ jest ciągła w półpłaszczyźnie domkniętej $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant 0\}$, czyli w obszarze domkniętym i nieograniczonym, i jest w tym obszarze nieograniczona. □

Przykład 2.28. Funkcja $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ jest ciągła w obszarze ograniczonym $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, ale nie jest w tym obszarze ograniczona.
□

Funkcja ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym ma tę własność, że osiąga w pewnych punktach tego obszaru kres górny i kres dolny zbioru wartości, jakie w tym obszarze przyjmuje.

Twierdzenie 2.29. (Weierstrassa [4] o osiąganiu kresów.)
Jeżeli funkcja f jest ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym $\overline{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, to istnieją takie punkty $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \overline{D}$, że

$$f(\overline{x}_1) = \sup_{\overline{x} \in \overline{D}} f(\overline{x}) \ \ oraz \ \ f(\overline{x}_2) = \inf_{\overline{x} \in \overline{D}} f(\overline{x}).$$

Jeżeli funkcja jest ciągła w obszarze ograniczonym lub nieograniczonym, to kresy te mogą być nieskończone lub funkcja może ich w tym obszarze nie osiągać.

Przykład 2.30. Funkcja $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$ rozważana w zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, ma nieskończony kres górny zbioru wartości. □

Przykład 2.31. Funkcja $f(x,y) = x^2+y^2$ rozważana w tym samym zbiorze $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$, nie osiąga w żadnym jego punkcie kresu górnego, który w tym przypadku wynosi 1. □

Twierdzenie 2.32. (Darboux [5] o przyjmowaniu wartości pośrednich.)
Jeżeli funkcja f jest ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym $\overline{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, oraz

$$\inf_{\overline{x} \in \overline{D}} f(\overline{x}) \leqslant m \leqslant \sup_{\overline{x} \in \overline{D}} f(\overline{x})$$

to istnieje taki punkt $\overline{x}_0 \in \overline{D}$, że $f(\overline{x}_0) = m$.

Twierdzenie 2.33. (Cantora [6] o ciągłości jednostajnej.)
Jeżeli funkcja f jest ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym $\overline{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, to jest w tym obszarze jednostajnie ciągła, tzn.

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(\delta > 0)\forall(\overline{x}_1, \overline{x}_2 \in A)(d(\overline{x}_1, \overline{x}_2) < \delta) \Rightarrow (\mid f(\overline{x}_1) - f(\overline{x}_2) \mid < \varepsilon).$$

[4] Karl Weierstrass (1815-1897) - matematyk niemiecki
[5] Jean Darboux (1842-1917) - matematyk francuski
[6] Georg Cantor (1845-1918) - matematyk niemiecki

2.2 Pochodne funkcji n-zmiennych.

Pochodne cząstkowe.

Niech f będzie funkcją n zmiennych określoną w pewnym otoczeniu $O(\overline{p}_0; r)$ punktu $\overline{p}_0 = (p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{n0})$. Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ oznaczmy symbolem Δ_{x_i} różny od zera przyrost zmiennej i taki, żeby punkt $\overline{x}_{\Delta_{x_i}} = (p_{10}, p_{20}, \ldots, p_{i0} + \Delta_{x_i}, \ldots, p_{n0}) \in O(\overline{p}_0; r)$.

Definicja 2.34. *Granicę właściwą (o ile istnieje)*

$$\lim_{\Delta_{x_i} \to 0} \frac{f(\overline{x}_{\Delta_{x_i}}) - f(\overline{p}_0)}{\Delta_{x_i}}$$

nazywamy ***pochodną cząstkową rzędu pierwszego*** *funkcji f względem zmiennej x_i w punkcie $\overline{p}_0$ i oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{p}_0)$ lub $f_{x_i}(\overline{p}_0)$.*

Dla funkcji $f(x, y)$ dwóch zmiennych definicje pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego względem zmiennych x i y w punkcie $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$ są następujące:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{p}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

gdzie h oznacza przyrost zmiennej x. Zatem $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{p}_0)$ jest zwykłą pochodną funkcji $f(x, y)$ względem zmiennej x w punkcie $\overline{p}_0$ przy założeniu, że zmienna y ma stałą wartość.

Analogicznie pochodna $\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{p}_0)$ jest zwykłą pochodną funkcji $f(x, y)$ względem zmiennej y w punkcie $\overline{p}_0$ przy założeniu, że zmienna x ma stałą wartość, czyli

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{p}_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k},$$

gdzie k oznacza przyrost zmiennej y.

Przykład 2.35. Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji $f(x, y) = x \sin xy$ w punkcie $\overline{p}_0 = (\pi, 1)$ wynoszą odpowiednio:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\pi, 1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\pi + h, 1) - f(\pi, 1)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\pi + h)\sin(\pi + h) - \pi \sin \pi}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(\pi + h)(-\sin h)}{h} = -\pi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\pi,1)=\lim_{k\to 0}\frac{f(\pi,1+k)-f(\pi,1)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{\pi\sin(\pi(1+k))-\pi\sin\pi}{k}=$$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{-\pi\sin(\pi k)}{k}=-\pi^2\lim_{k\to 0}\frac{\sin(\pi k)}{\pi k}=-\pi^2.$$

□

Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych. Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{p}_0)$ funkcji $f(x,y)$ w punkcie $\overline{p}_0=(x_0,y_0)$ wyraża tangens kąta α, jaki tworzy z osią OX styczna w punkcie $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ do linii, wzdłuż której płaszczyzna $y=y_0$ przecina powierzchnię o równaniu $z=f(x,y)$.

Pochodna cząstkowa względem x jest miarą szybkości, z jaką zmienia się wartość funkcji $f(x,y)$, gdy zmienia się wartość zmiennej niezależnej x, przy ustalonej wartości zmiennej y.

Przy obliczaniu pochodnych cząstkowych należy postępować tak, jak przy obliczaniu pochodnej funkcji jednej zmiennej x_i, traktując pozostałe zmienne jako ustalone parametry.

Przykład 2.36.

1. $f(x,y)=2x-3y+5$; $\frac{\partial f}{\partial x}=2$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}=-3$.
2. $f(x,y)=x^2y-xy+10$; $\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-y$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-x$.
3. $f(x,y)=x^y$; $\frac{\partial f}{\partial x}=yx^{y-1}$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}=x^y\ln x$. □

Przykład 2.37. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $f(x,y)=\frac{x}{x+y}$ w punkcie $\overline{p}_0=(2,-3)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{(x+y)-x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial x}(2,-3)=\frac{-3}{(-1)^2}=-3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{0\cdot(x+y)-x}{(x+y)^2}=\frac{-x}{(x+y)^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial f}{\partial y}(2,-3)=\frac{-2}{(-1)^2}=-2.$$

□

Jeżeli funkcja $f(\overline{x})$ ma pochodną cząstkową rzędu pierwszego względem zmiennej x_i w każdym punkcie zbioru otwartego $A \subseteq \mathbb{R}^n$, to powiemy, że funkcja ta ma pochodną cząstkową pierwszego rzędu względem zmiennej x_i w tym zbiorze. W zbiorze A jest wówczas określona nowa funkcja, która każdemu punktowi $\overline{x} \in A$ przyporządkowuje liczbę $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x})$. Funkcję tę nazywamy pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem zmiennej x_i i oznaczamy $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ lub $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ lub f_{x_i}.

Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie pewnego obszaru $D \subseteq \mathbb{R}^n$, to można je dalej różniczkować względem zmiennych x_j.

Definicja 2.38. *Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych cząstkowych $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$, nazywamy pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego funkcji $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Funkcja n zmiennych może mieć n^2 różnych pochodnych cząstkowych rzędu drugiego.

Przykład 2.39. Funkcja $f(x, y)$ dwóch zmiennych może mieć 4 różne pochodne rzędu drugiego:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

□

Pochodną $\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ dla $1 \leqslant i, j, \leqslant n$, oznaczamy symbolami:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{lub} \quad f_{x_i x_j}.$$

Pochodne cząstkowe rzędu drugiego $f_{x_i x_j}$ oraz $f_{x_j x_i}$, dla $i \neq j$, różniące się tylko kolejnością różniczkowania, nazywamy pochodnymi mieszanymi rzędu drugiego.

Jeżeli $i = j$, to zamiast $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}$, będziemy pisać $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ lub $f_{x_i x_i}$.

Przykład 2.40.

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cdot \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cdot \cos(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2\cos(x^2+y^2) - 4x^2\sin(x^2+y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\cos(x^2+y^2) - 4y^2\sin(x^2+y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy\sin(x^2+y^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4xy\sin(x^2+y^2).$$

□

Twierdzenie 2.41. (Schwarz'a [7])
Jeżeli funkcja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ma w pewnym obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ciągłe pochodne cząstkowe mieszane drugiego rzędu $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ oraz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ to w każdym punkcie tego obszaru

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Założenie ciągłości pochodnych mieszanych jest istotne. Jeżeli pochodne mieszane istnieją w pewnym punkcie obszaru swej określoności, ale nie są w tym punkcie ciągłe, to ich równość może się okazać fałszywa.

Przykład 2.42. Pochodne mieszane funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

nie są równe w punkcie $(0,0)$. Są natomiast równe w każdym punkcie różnym od punktu $(0,0)$. Pochodne mieszane funkcji f nie są ciągłe w punkcie $(0,0)$, gdyż żadna z nich nie ma w tym punkcie granicy podwójnej. □

Definicja 2.43. ***Pochodną cząstkową rzędu*** $m+1$ *nazywamy pochodną cząstkową rzędu pierwszego pochodnej cząstkowej rzędu m.*

Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych cząstkowych rzędu drugiego nazywamy pochodnymi cząstkowymi rzędu trzeciego, itd.
Symbole do oznaczenia pochodnych cząstkowych wyższych rzędów stanowią naturalne rozwinięcie symboli stosowanych dla pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego i drugiego.

[7]Karol Schwarz (1843-1921) - matematyk niemiecki

Przykład 2.44. Dla funkcji $f(x,y)$ dwóch zmiennych:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = f_{xxy},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = f_{xyy},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}) = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^2 \partial x} = f_{xyyx}, \quad \text{itd.}$$

□

Pochodna cząstkowa rzędu m, określona za pomocą różniczkowań względem co najmniej dwóch różnych zmiennych, nazywa się ***pochodną cząstkową mieszaną rzędu*** m. Podobnie jak dla pochodnych rzędu drugiego, jeżeli funkcja $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ma pochodne cząstkowe mieszane różniące się tylko kolejnością różniczkowania względem zmiennych (przy tej samej liczbie różniczkowań względem każdej z tych zmiennych) i jeżeli te pochodne są ciągłe w obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^n$ to są w tym obszarze równe.

Przykład 2.45. Pochodne cząstkowe rzędu trzeciego funkcji $f(x,y) = x^3y + 2xy^2 + 5$:

$$f_x = 3x^2y + 2y^2; \quad f_{xx} = 6xy; \quad f_{xxx} = 6y,$$

$$f_y = x^3 + 4xy; \quad f_{yy} = 4x; \quad f_{yyy} = 0,$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 3x^2 + 4y,$$

$$f_{xxy} = f_{xyx} = f_{yxx} = 6x,$$

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} = 4.$$

□

Funkcje klasy C^m.

Funkcja f może mieć w punkcie $\overline{p}_0$ pochodne cząstkowe pierwszego rzędu i może nie być ciągła w tym punkcie.

Przykład 2.46. Granica podwójna funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0\\ 0, & xy\neq 0\end{cases}$$

w punkcie $(0,0)$ nie istnieje, zatem funkcja ta nie jest ciągła w tym punkcie. Natomiast

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{h}=0,$$
$$\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{1-1}{k}=0,$$

stąd pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $(0,0)$ istnieją i wynoszą odpowiednio: $f_x(0,0)=0$ i $f_y(0,0)=0$. □

Twierdzenie 2.47. *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ ma w pewnym otoczeniu punktu $\overline{p}_0$ pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, które są ciągłe w tym punkcie, to jest ciągła w punkcie $\overline{p}_0$.*

Twierdzenie 2.48. *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ ma w pewnym otoczeniu punktu $\overline{p}_0$ ograniczone pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to jest ciągła w punkcie $\overline{p}_0$.*

Definicja 2.49. *Funkcja f jest **funkcją klasy** C^m w pewnym obszarze $D\subseteq\mathbb{R}^n$, jeżeli ma ona w tym obszarze wszystkie pochodne cząstkowe rzędu m ciągłe.*

Jeśli funkcja f jest klasy C^{m+1} to jest również funkcją klasy C^m.

Przykład 2.50. Jak wynika z przykładu 2.42, funkcja

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy\sin(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

jest klasy C^1 na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, ponieważ jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu istnieją i są funkcjami ciągłymi na całej płaszczyźnie. Funkcja ta nie jest natomiast klasy C^2 na całej płaszczyźnie, gdyż jej pochodne cząstkowe mieszane rzędu drugiego nie są w punkcie $(0,0)$ ciągłe. □

Pochodne cząstkowe funkcji złożonej.

Niech funkcja

$$z = f(u_1, u_2, \dots, u_m), \quad m \geqslant 2,$$

będzie określona na pewnym obszarze $G \subseteq \mathbb{R}^m$ i niech ponadto funkcje

$$u_i = \alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad n \geqslant 2,$$

będą określone na pewnym wspólnym obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicja 2.51. *Jeżeli dla każdego* $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, $(\alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \alpha_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \alpha_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in G$, *to funkcję*

$$z = f(\alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \alpha_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \alpha_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

nazywamy ***funkcją złożoną*** *n zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n$ w obszarze D.*

W przypadku, gdy $n = m = 2$, funkcja

$$z = f(u_1, u_2) = f(\alpha_1(x, y), \alpha_2(x, y)),$$

dla $(u_1, u_2) \in G \subseteq \mathbb{R}^2$, gdzie $u_1 = \alpha_1(x, y)$, $u_2 = \alpha_2(x, y)$ jest funkcją złożoną dwóch zmiennych x i y w obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie 2.52. (O pochodnych cząstkowych funkcji złożonej.)
Jeżeli funkcja $z = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$, $m \geqslant 2$, jest klasy C^1 (tzn. funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe f_{u_i}) w obszarze $G \subseteq \mathbb{R}^m$, a ponadto funkcje $\alpha_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $n \geqslant 2$, mają pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^n$, to funkcja złożona

$$z = f(\alpha_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \alpha_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \alpha_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

ma pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w każdym punkcie obszaru D, przy czym

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Przykład 2.53. Dla $m = n = 2$, jeśli funkcja $z = f(u_1, u_2)$ ma w obszarze $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ciągłe pochodne cząstkowe f_{u_1} i f_{u_2} oraz funkcje $\alpha_1(x, y)$ i $\alpha_2(x, y)$ mają w obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^2$ pochodne cząstkowe względem zmiennych x i y, to funkcja z ma w obszarze D pochodne cząstkowe względem zmiennych x i y określone następującymi wzorami:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} \tag{2.2}$$

□

Przykład 2.54. Niech $z = f(u_1, u_2) = u_1 \ln u_2$, gdzie $u_1 = \alpha_1(x, y) = 3x - y$ oraz $u_2 = \alpha_2(x, y) = x^2 + y^2$. Wówczas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\ln(x^2 + y^2) + 2x\frac{3x - y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\ln(x^2 + y^2) + 2y\frac{3x - y}{x^2 + y^2}.$$

□

Jeżeli funkcje u_1 i u_2 zależą tylko od jednej zmiennej x, czyli $u_1 = \alpha_1(x)$ i $u_2 = \alpha_2(x)$, to funkcja złożona $z = f(u_1, u_2) = f(\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ zależy też tylko od jednej zmiennej x. W tym przypadku pochodne cząstkowe $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}$ i $\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}$ są pochodnymi funkcji jednej zmiennej i wzory (2) i (3) redukują się do jednego wzoru postaci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u_1} \cdot \alpha_1'(x) + \frac{\partial f}{\partial u_2} \cdot \alpha_2'(x)$$

Przykład 2.55. Niech $z = f(u_1, u_2) = e^{u_1} \ln u_2$, gdzie $u_1 = \alpha_1(x) = 5 - 2x$ oraz $u_2 = \alpha_2(x) = x^2 + 3$. Wówczas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2e^{(5-2x)} \ln(x^2 + 3) + 2x\frac{e^{(5-2x)}}{x^2 + 3}.$$

□

Jeżeli natomiast funkcje $\alpha_1(x) = x$ oraz $\alpha_2(x) = y(x)$, to funkcja $z = f(x, y(x))$ ma pochodną

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'.$$

W celu wyznaczenia pochodnych cząstkowych drugiego rzędu różniczkujemy przy odpowiednich założeniach wyrażenia (2) i (3) traktując pochodne $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ i $\frac{\partial f}{\partial u_2}$ jako funkcje złożone zmiennych x i y.
Wykorzystując twierdzenie Schwarza (2.41) o pochodnych mieszanych otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u_2}(\frac{\partial \alpha_2}{\partial x})^2 + \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial^2 y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}(\frac{\partial \alpha_1}{\partial y})^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 u_2}(\frac{\partial \alpha_2}{\partial y})^2 + \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x}\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}) +$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 u_2}\frac{\partial \alpha_2}{\partial x}\frac{\partial \alpha_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x \partial y}.$$

Pochodne kierunkowe.

Niech l będzie prostą na płaszczyźnie OXY określoną równaniami:

$$x = x_0 + t\alpha$$
$$y = y_0 + t\beta,$$

dla $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ i $t \in \mathbb{R}$. (Prosta l jest równoległa do wektora $\overrightarrow{v} = [\alpha, \beta]$ o długości 1.)

Definicja 2.56. ***Pochodną kierunkową*** *funkcji $f(x, y)$ w punkcie $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$ w kierunku prostej l nazywamy granicę:*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(\overline{p}_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Pochodna funkcji f w kierunku osi l określa szybkość wzrostu tej funkcji w kierunku l.

Jeśli $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, czyli prosta l jest równoległa do osi OX, to $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$.
Podobnie, jeśli $\alpha = 0$ i $\beta = 1$, czyli prosta l jest równoległa do osi OY, to $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$.

Funkcja może mieć w punkcie $\overline{p}_0$ pochodne kierunkowe w każdym kierunku i nie być ciągła w tym punkcie.

Przykład 2.57. Funkcja

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^4\neq 0\\ 0, & x^2+y^4=0\end{cases}$$

ma w punkcie $\overline{p}_0=(0,0)$ pochodną w każdym kierunku, mimo to nie jest ciągła w tym punkcie. □

Twierdzenie 2.58. *Niech $A\subseteq\mathbb{R}^2$ i niech funkcja $f:A\to\mathbb{R}$ ma w otoczeniu $O(\overline{p}_0;r)\subset A$ punktu $\overline{p}_0$ ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu. Wówczas, pochodna kierunkowa w punkcie $\overline{p}_0$ w każdym kierunku $l\parallel[\alpha,\beta]$ istnieje i jest określona wzorem:*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(\overline{p}_0)=\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{p}_0)+\beta\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{p}_0).$$

Definicję pochodnej kierunkowej można uogólnić na przypadek dowolnej funkcji $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ określonej w pewnym obszarze przestrzeni $\mathbb{R}^n$.

Różniczka zupełna.

Niech f będzie funkcją dwóch zmiennych x i y określoną i mającą pierwsze pochodne cząstkowe w pewnym otoczeniu $O(\overline{p}_0;r)$ punktu $\overline{p}_0=(x_0,y_0)$. Ponadto, niech punkt $\overline{x}_\Delta=(x_0+h,y_0+k)$, gdzie h i k są dowolnymi przyrostami odpowiednio zmiennych x i y, również należy do otoczenia $O(\overline{p}_0;r)$.

Przyrostem Δf funkcji f między punktami $\overline{p}_0=(x_0,y_0)$ i $\overline{x}_\Delta=(x_0+h,y_0+k)$ nazywamy różnicę określoną wzorem:

$$\Delta f=f(\overline{x}_\Delta)-f(\overline{p}_0).$$

Wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$df(\overline{p}_0):=hf_x(\overline{p}_0)+kf_y(\overline{p}_0),\ \text{ dla }\ h^2+k^2>0.$$

Twierdzenie 2.59. *Jeżeli funkcja f ma w pewnym otoczeniu $O(\overline{p}_0;r)$ punktu $\overline{p}_0$ ciągłe pochodne cząstkowe f_x i f_y oraz punkt $\overline{x}_\Delta=(x_0+h,y_0+k)\in O(\overline{p}_0;r)$ to*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\frac{\Delta f-df(\overline{p}_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

W szczególności, dla małych przyrostów h i k zmiennych niezależnych x i y, wyrażenie $df(\overline{p}_0)$ daje przybliżenie przyrostu Δf funkcji f. Oznacza to, że przyrost Δf wyraża się wzorem $\Delta f = df(\overline{p}_0) + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$, gdzie $\varepsilon(h,k)$ dąży do zera, gdy $\sqrt{h^2+k^2} \to 0$ ($\Delta f \approx df(\overline{p}_0)$).

Praktyczne znaczenie tego wzoru polega na wykorzystaniu go do oceny błędów i obliczeń przybliżonych wartości funkcji, gdyż dla małych przyrostów h i k możemy przyjąć, że:

$$f(x_0+h, y_0+k) \approx f(x_0,y_0) + hf_x(x_0,y_0) + kf_y(x_0,y_0).$$

Definicja 2.60. *Funkcja $f(x,y)$ jest **różniczkowalna** w punkcie $\overline{p}_0 = (x_0,y_0)$, jeśli*

- *Funkcja f ma obie pochodne cząstkowe $f_x(\overline{p}_0)$ i $f_y(\overline{p}_0)$,*
- $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\Delta f - df(\overline{p}_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$

Różniczkowalność funkcji $f(x,y)$ w punkcie (x_0,y_0) oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

Twierdzenie 2.61. (Warunek wystarczający różniczkowalności.)
Jeżeli funkcja $f(x,y)$ ma w pewnym otoczeniu punktu $\overline{p}_0$ pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, które są ciągłe w tym punkcie, to jest w punkcie $\overline{p}_0$ różniczkowalna.

Wniosek 2.62. *Funkcja różniczkowalna w punkcie $\overline{p}_0$ ma w tym punkcie pochodną kierunkową w każdym kierunku.*

Samo istnienie pochodnych $f_x(\overline{p}_0)$ i $f_y(\overline{p}_0)$ nie zapewnia różniczkowalności funkcji $f(x,y)$ w punkcie $\overline{p}_0$.

Przykład 2.63. Funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x(y+1)}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}}, & (x,y) \neq (0,-1) \\ 0, & (x,y) = (0,-1) \end{cases}$$

posiada w punkcie $(0,-1)$ obie pochodne cząstkowe, ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna. □

Twierdzenie 2.64. (Warunek konieczny różniczkowalności.)
Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest różniczkowalna w punkcie $\overline{p}_0$, to jest w tym punkcie ciągła.

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

Przykład 2.65. Funkcja

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

jest ciągła w punkcie $(0,0)$, ale nie jest w tym punkcie różniczkowalna, gdyż nie istnieją pochodne cząstkowe $f_x(0,0)$ oraz $f_y(0,0)$. $\square$

Definicja 2.66. *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest różniczkowalna, to wyrażenie*

$$df(\overline{p}_0) := hf_x(\overline{p}_0) + kf_y(\overline{p}_0), \quad h^2+k^2>0$$

nazywamy ***różniczką zupełną*** *funkcji f w punkcie $\overline{p}_0$ dla przyrostów h i k.*

Wzór Taylora dla funkcji dwóch zmiennych.

Niech $f(x,y)$ będzie funkcją dwóch zmiennych klasy C^m w pewnym obszarze D zawierającym punkty $\overline{p}_0 = (x_0,y_0)$ oraz $\overline{x}_\Delta = (x_0+h, y_0+k)$ dla przyrostów $h,k \in \mathbb{R}$.
Dla $s = 1,2,\ldots,m$ wprowadźmy oznaczenie:

$$d^s f(\overline{p}_0) = (h\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{p}_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{p}_0))^{(s)} := \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} h^{s-i}k^i \frac{\partial^s f}{\partial x^{s-i}\partial y^i}(\overline{p}_0).$$

Przykład 2.67. Dla $s=1$,

$$df(\overline{p}_0) = h\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{p}_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{p}_0)$$

jest różniczką zupełną funkcji f w punkcie $\overline{p}_0$ dla przyrostów h i k. $\square$

Przykład 2.68. Dla $s=2$,

$$d^2 f(\overline{p}_0) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\overline{p}_0) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\overline{p}_0) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\overline{p}_0)$$

nazywamy różniczką zupełną rzędu drugiego funkcji f w punkcie $\overline{p}_0$ dla przyrostów h i k. $\square$

Twierdzenie 2.69. *Jeżeli funkcja f jest klasy C^m w obszarze zawierającym cały odcinek $\overline{p}_0\overline{x}_\Delta$, to wewnątrz odcinka $\overline{p}_0\overline{x}_\Delta$ znajduje się taki punkt $\overline{x_\theta} = (x_0+h\theta, y_0+k\theta)$, gdzie $0 < \theta < 1$, że wartość funkcji f w punkcie $\overline{x}_\Delta$ wyraża się wzorem:*

$$\begin{aligned} f(\overline{x}_\Delta) = f(\overline{p}_0) + \frac{1}{1!}df(\overline{p}_0) + \frac{1}{2!}d^2f(\overline{p}_0) + \ldots + \\ + \frac{1}{(m-1)!}d^{m-1}f(\overline{p}_0) + R_m(\overline{x_\theta}), \end{aligned} \tag{2.3}$$

gdzie $R_m(\overline{x}_\theta) = \frac{1}{m!}(h\frac{\partial f}{\partial x}(\overline{x}_\theta) + k\frac{\partial f}{\partial y}(\overline{x}_\theta))^{(m)} = d^m f(\overline{x}_\theta)$.

Równość (4) nazywamy ***wzorem Taylora***[8] dla funkcji dwóch zmiennych.

Dla $m = 1$, wzór przyjmuje postać:

Twierdzenie 2.70. (Twierdzenie o wartości średniej.)
Niech funkcja $f(x, y)$ w obszarze zawierającym odcinek $\overline{p}_0\overline{x}_\Delta$ będzie klasy C^1. Wówczas

$$\Delta f = f(\overline{x}_\Delta) - f(\overline{p}_0) = hf_x(\overline{x_\theta}) + kf_y(\overline{x_\theta}) = df(\overline{x_\theta}),$$

gdzie $\overline{x_\theta} = (x_0 + h\theta, y_0 + k\theta)$, *dla* $0 < \theta < 1$.

Twierdzenie 2.59 orzeka, że przyrost funkcji między punktami $\overline{x}_\Delta = (x_0 + h, y_0 + k)$ i $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$ jest w przybliżeniu równy różniczce zupełnej w punkcie $\overline{p}_0$.

Z twierdzenia 2.70 wynika, ze przyrost ten jest dokładnie równy różniczce, lecz w pewnym punkcie $\overline{x_\theta} = (x_0+h\theta, y_0+k\theta)$ położonym wewnątrz odcinka $\overline{p}_0\overline{x}_\Delta$.

2.3 Ekstrema funkcji n-zmiennych.

Niech $f(\overline{x})$ będzie funkcją n zmiennych określoną w pewnym otoczeniu punktu $\overline{p}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Definicja 2.71. *Funkcja $f(\overline{x})$ ma w punkcie $\overline{p}_0$* ***maksimum (minimum)*** *lokalne, jeżeli istnieje takie sąsiedztwo $S(\overline{p}_0; r)$, że dla każdego $\overline{x} \in S(\overline{p}_0; r)$ spełniona jest nierówność:*

$$f(\overline{x}) \leqslant f(\overline{p}_0) \quad (f(\overline{x}) \geqslant f(\overline{p}_0)).$$

[8]Brook Taylor (1685-1731) - matematyk angielski

Maksima i minima lokalne funkcji f nazywamy ***ekstremami lokalnymi*** tej funkcji.
Jeżeli zamiast nierówności słabych są spełnione odpowiednio nierówności mocne:

$$f(\overline{x}) < f(\overline{p}_0) \ \ (f(\overline{x}) > f(\overline{p}_0))$$

to ekstremum w punkcie $\overline{p}_0$ nazywamy właściwym.

Ekstremum lokalne w punkcie $\overline{p}_0$ jest pojęciem odnoszącym się do dostatecznie małego otoczenia punktu $\overline{p}_0$, a nie do całej dziedziny funkcji. Jeżeli odniesiemy się do całej dziedziny funkcji, to mamy ekstrema absolutne, czyli po prostu odpowiednio największą albo najmniejszą wartość funkcji w tym zbiorze.

Nie każda funkcja ma ekstrema i nie każda funkcja przyjmuje wartość najmniejszą lub największą. Maksimum lokalne funkcji może być jednocześnie największą jej wartością w rozpatrywanym zbiorze, a może nią nie być. Podobnie, dla minimum lokalnego funkcji i jej wartości najmniejszej.

Przykład 2.72. Funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$, dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ma jedno ekstremum - minimum właściwe w punkcie $\overline{p}_0 = (1, -2)$ ($f_{min} = f(1, -2) = 0$), które jest jednocześnie wartością najmniejszą tej funkcji na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.
Ponieważ funkcja f jest nieograniczona, nie posiada wartości największej. $\square$

Przykład 2.73. Funkcja $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + 2$, dla $x^2 + y^2 \leqslant 1$ ma jedno ekstremum - maksimum właściwe w punkcie $\overline{p}_0 = (0, 0)$ ($f_{max} = f(0, 0) = 3$), które jest jednocześnie wartością największą tej funkcji w jej dziedzinie.

Wartość najmniejszą, równą 2, funkcja f przyjmuje na brzegu swej dziedziny, czyli na okręgu $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Natomiast w żadnym punkcie $\overline{x}$ tego okręgu funkcja nie posiada minimum, ponieważ nie istnieje sąsiedztwo punktu $\overline{x}$, w którym funkcja ta jest określona. $\square$

Przykład 2.74. Funkcja $f(x, y) = 1 - x - y$, dla $(x, y) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 1\}$ nie ma w zbiorze A ani maksimum ani minimum. Funkcja ta przyjmuje natomiast wartość największą, równą 1, na brzegu trójkąta A w punkcie $\overline{p}_0 = (0, 0)$.

Natomiast wartość najmniejszą, równą 0, funkcja f przyjmuje w każdym punkcie odcinka $(0,1)(1,0)$, będącego jednym z boków tego trójkąta. □

Przykład 2.75. Funkcja $f(x,y) = (x-y)^2$ określona na całej płaszczyźnie, ma w każdym punkcie leżącym na prostej $y = x$ minimum, które wynosi 0. Nie ma natomiast żadnego ekstremum właściwego. □

Przykład 2.76. Funkcja stała określona w pewnym zbiorze otwartym ma w każdym punkcie tego zbioru ekstremum, które można uważać bądź za minimum, bądź za maksimum lokalne. Żadne z tych ekstremów nie jest właściwe. □

Twierdzenie 2.77. (Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.) *Jeżeli funkcja $f(\overline{x})$ ma pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w punkcie $\overline{p}_0$ i ma w tym punkcie ekstremum, to dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{p}_0) = 0.$$

Definicja 2.78. *Punkt $\overline{p}_0 \in \mathbb{R}^n$, w którym dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$, $f_{x_i}(\overline{p}_0) = 0$ nazywamy punktem* ***stacjonarnym*** *funkcji $f(\overline{x})$.*

Na mocy twierdzenia 2.77 funkcja $f(x)$ może mieć ekstremum jedynie w punktach stacjonarnych lub w tych punktach, w których pochodna nie istnieje. Jeżeli natomiast funkcja $f(\overline{x})$ ma w pewnym obszarze pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, to może ona mieć ekstremum tylko w swych punktach stacjonarnych.

Przykład 2.79. Funkcja $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5$ posiada pochodne cząstkowe na całej płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Punkty stacjonarne znajdujemy przyrównując pochodne cząstkowe pierwszego rzędu do zera:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 0.$$

Z powyższego układu otrzymujemy, że $x = 1$ i $y = -2$. Zatem jedynym punktem stacjonarnym funkcji f jest $\overline{p}_0 = (1,-2)$. Tylko w tym punkcie funkcja f może mieć ekstremum. Z przykładu 2.72 wynika, że funkcja posiada w tym punkcie minimum. □

Warunek konieczny istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych nie jest warunkiem wystarczającym istnienie ekstremum lokalnego.

Przykład 2.80. Funkcja $f(x, y) = xy$ ma w punkcie $\overline{p}_0 = (0, 0)$ obie pochodne cząstkowe równe 0. Natomiast nie ma w tym punkcie ekstremum, gdyż ma wartości dodatnie w pierwszej i trzeciej ćwiartce płaszczyzny $\mathbb{R}^2$, zaś ujemne w ćwiartce drugiej i czwartej. $\square$

Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych.

Twierdzenie 2.81. (Warunek wystarczający istnienie ekstremum lokalnego funkcji dwóch zmiennych.)
Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$, a ponadto:

- $f_x(\overline{p}_0) = 0$ *oraz* $f_y(\overline{p}_0) = 0$,
- $W_2(\overline{p}_0) := \det \begin{pmatrix} f_{xx}(\overline{p}_0) & f_{xy}(\overline{p}_0) \\ f_{yx}(\overline{p}_0) & f_{yy}(\overline{p}_0) \end{pmatrix} > 0,$

to funkcja f ma w punkcie $\overline{p}_0$ ekstremum lokalne: maksimum, gdy $f_{xx}(\overline{p}_0) < 0$, a minimum, gdy $f_{xx}(\overline{p}_0) > 0$.
Funkcja nie ma ekstremum w punkcie $\overline{p}_0$, gdy $W_2(\overline{p}_0) < 0$.

Twierdzenie 2.81 nie roztrzyga, czy w punkcie $\overline{p}_0$ istnieje ekstremum, gdy $W_2(\overline{p}_0) = 0$.

Przykład 2.82. Funkcja $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$ ma w punkcie $\overline{p}_0 = (-2, 0)$ minimum, przy czym $f_{min} = f(-2, 0) = -\frac{2}{e}$. $\square$

Przykład 2.83. Funkcja $f(x, y) = e^{-x}(x + y^2)$ ma jeden punkt stacjonarny $\overline{p}_0 = (1, 0)$, w którym $W_2(1, 0) < 0$, zatem funkcja f nie ma ekstremów lokalnych. $\square$

Przykład 2.84. Funkcja $f(x, y) = x^3 - y^3$ ma jeden punkt stacjonarny $\overline{p}_0 = (0, 0)$, w którym $W_2(0, 0) = 0$ i nie ma ekstremów lokalnych. $\square$

Przykład 2.85. Funkcja $f(x, y) = x^4 + y^4$ ma jeden punkt stacjonarny $\overline{p}_0 = (0, 0)$, w którym $W_2(0, 0) = 0$ i ma w tym punkcie minimum lokalne. $\square$

Znajdywanie największej lub najmniejszej wartości funkcji.

Niech funkcja $f(\overline{x})$ będzie określona w obszarze $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Jeżeli w pewnym punkcie $\overline{p}_0 \in D$ tego obszar funkcja $f(\overline{x})$ przyjmuje swą wartość największą (najmniejszą), to w punkcie tym ma ona maksimum (minimum). Zatem funkcja określona w obszarze D może osiągać swą wartość największą (najmniejszą) jedynie w tych punktach, w których ma ekstremum.

Jeżeli natomiast funkcja $f(\overline{x})$ jest określona w obszarze domkniętym $\overline{D} \subset \mathbb{R}^n$, to może przyjmować wartość największą (lub najmniejszą) nie tylko w punkcie, w którym ma ekstremum, lecz także na brzegu obszaru $\overline{D}$.

Jeżeli funkcja $f(\overline{x})$ jest ciągła w obszarze domkniętym $\overline{D}$, to na mocy twierdzenia Weierstrassa o osiąganiu kresów (tw.2.29), przyjmuje ona w pewnym punkcie tego obszaru swą wartość największą (najmniejszą). Punktami tymi są wówczas bądź punkty ekstremalne, bądź punkty brzegowe. W żadnym innym punkcie obszaru domkniętego $\overline{D}$ funkcja nie może przyjmować ani wartości największej ani wartości najmniejszej.

Poszukując najmniejszej bądź największej wartości funkcji wystarczy ograniczyć się do zbadania ekstremów danej funkcji w punktach wewnętrznych obszaru $\overline{D}$ a następnie zmienności funkcji na brzegu tego obszaru.

Badanie funkcji dwóch zmiennych na brzegu obszaru $\overline{D}$ sprowadza się do badania zmienności funkcji jednej zmiennej. W celu zbadania jakie funkcja f przyjmuje wartości na brzegu $\overline{D}$ dzielimy ten brzeg (o ile to możliwe) na skończoną liczbę krzywych o równaniach typu:

$$y = g(x), \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta \ \text{ lub } \ x = h(y), \quad \gamma \leqslant y \leqslant \delta.$$

Wzdłuż każdej krzywej nasza funkcja przechodzi odpowiednio w funkcję tylko jednej zmiennej x: $f(x, g(x))$ lub y: $f(h(y), y)$. Jeżeli brzeg obszaru dany jest równaniami parametrycznymi: $x = x(t)$, $y = y(t)$ dla $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, to na tym brzegu funkcja f jest funkcją jednej zmiennej t: $f(t) = f(x(t), y(t))$.

Przykład 2.86. Funkcja $f(x, y) = x^2y(2 - x - y)$ rozpatrywana w trójkącie $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y,\ x + y \leqslant 6\}$ przyjmuje wartość największą w punkcie $\overline{p}_1 = (1, \frac{1}{2})$ natomiast wartość najmniejszą w punkcie $\overline{p}_2 = (4, 2)$. Przy czym $f(1, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ oraz $f(4, 2) = -128$. $\square$

Ekstrema lokalne funkcji n-zmiennych.

Definicja 2.87. *Niech dla* $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$. *Wielomian*

$$F(h_1, h_2, \ldots, h_n) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} h_1 h_2$$

nazywamy ***formą kwadratową*** *n-zmiennych* $h_1, h_2, \ldots, h_n$.

Przykład 2.88. Dla $n = 2$

$$F(h_1, h_2) = a_{11} h_1^2 + a_{12} a_{21} h_1 h_2 + a_{22} h_2^2.$$

□

Definicja 2.89. *Forma kwadratowa* $F(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ *jest określona* ***dodatnio (ujemnie)****, jeżeli dla każdego niezerowego wektora* $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, $F(h_1, h_2, \ldots, h_n) > 0$ ($F(h_1, h_2, \ldots, h_n) < 0$).

Jeśli istnieją wektory $(h_1^{'}, h_2^{'}, \ldots, h_n^{'}), (h_1^{''}, h_2^{''}, \ldots, h_n^{''}) \in \mathbb{R}^n$ *takie, że* $F(h_1^{'}, h_2^{'}, \ldots, h_n^{'}) > 0$ *oraz* $F(h_1^{''}, h_2^{''}, \ldots, h_n^{''}) < 0$, *to forma kwadratowa* F *jest* ***nieokreślona***.

Przykład 2.90. Forma kwadratowa trzech zmiennych

$$F(h_1, h_2, h_3) = 3h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_1 h_2 + h_3^2 = (h_1 + h_2)^2 + 2h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$$

jest określona dodatnio, a forma kwadratowa czterech zmiennych

$$F(h_1, h_2, h_3, h_4) = -h_1^2 - 2h_2^2 - 3h_3^2 - h_4^2$$

jest określona ujemnie. □

Twierdzenie 2.91. (Sylvester'a [9]) *Forma kwadratowa*

$$F(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

[9] James Sylvester (1814-1897) - matematyk angielski

jest określona dodatnio wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$ *wszystkie wyznaczniki*

$$W_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

są dodatnie. Natomiast forma $F(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ *jest określona ujemnie, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $k = 1, 2, \ldots, n$, $(-1)^k W_k > 0$.

Twierdzenie 2.92. (Warunek wystarczający istnienia ekstremum.)
Jeżeli funkcja $f(\overline{x})$ *jest klasy* C^2 *w pewnym otoczeniu punktu* $\overline{p}_0 \in \mathbb{R}^n$*, spełnia dla każdego* $1 \leqslant i \leqslant n$ *warunek* $f_{x_i}(\overline{p}_0) = 0$ *oraz forma kwadratowa (różniczka zupełna drugiego rzędu funkcji* f *w punkcie* $\overline{p}_0$*)*

$$F(h_1, h_2, \ldots, h_n) = d^2 f(\overline{p}_0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j$$

jest określona dodatnio (ujemnie), to funkcja $f(\overline{x})$ *ma w punkcie* $\overline{p}_0$ *minimum (maksimum) lokalne.*
Jeśli forma F *jest nieokreślona, to funkcja* $f(\overline{x})$ *nie ma ekstremum w punkcie* $\overline{p}_0$*.*

Przykład 2.93. Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego $\overline{p}_0 \in \mathbb{R}^2$ oraz dla każdego niezerowego wektora $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, różniczka zupełna drugiego rzędu funkcji f w punkcie $\overline{p}_0$

$$F(h, k) = d^2 f(\overline{p}_0) = \frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial y^2} k^2$$

jest dodatnio (ujemnie) określona to funkcja f posiada w punkcie $\overline{p}_0$ minimum (maksimum) lokalne. $\square$

Przykład 2.94. Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego $\overline{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ oraz dla każdego niezerowego wektora $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$, różniczka zupełna drugiego rzędu funkcji f w punkcie $\overline{p}_0$

$$F(h_1, h_2, h_3) = d^2 f(\overline{p}_0) = \frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial y^2} h_2^2 + \frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial z^2} h_3^2 +$$

$$+2\frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial x \partial y}h_1h_2 + 2\frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial x \partial z}h_1h_3 + 2\frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial y \partial z}h_2h_3$$

jest dodatnio (ujemnie) określona to funkcja f posiada w punkcie $\overline{p}_0$ minimum (maksimum) lokalne. □

Przykład 2.95. Z przykładu (2.82) wiemy, że punkt $\overline{p}_0 = (-2, 0)$ jest punktem stacjonarnym funkcji $f(x, y) = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$. Ponadto dla h, k takich, że $h^2 + k^2 > 0$,

$$d^2 f(\overline{p}_0) = \frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f(\overline{p}_0)}{\partial y^2}k^2 = \frac{1}{2e}h^2 + \frac{2}{e}k^2 > 0,$$

czyli forma $F(h, k) = d^2 f(\overline{p}_0)$ jest określona dodatnio. Zatem funkcja f posiada w punkcie $\overline{p}_0$ minimum. □

Przykład 2.96. Funkcja $f(x, y, z) = x^2 - 2x - y^3 + 3y + 5z^2$ posiada w punkcie $\overline{p}_1 = (1, -1, 0)$ minimum, $f_{min} = f(1, -1, 0) = -3$. Natomiast funkcja f nie ma ekstremum w punkcie stacjonarnym $\overline{p}_2 = (1, 1, 0)$. □

Wniosek 2.97. *Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu punktu stacjonarnego $\overline{p}_0 \in \mathbb{R}^3$ oraz*

$$W_1(\overline{p}_0) = f_{xx}(\overline{p}_0) > 0 \;\; (W_1(\overline{p}_0) < 0),$$

$$W_2(\overline{p}_0) := \det\begin{pmatrix} f_{xx}(\overline{p}_0) & f_{xy}(\overline{p}_0) \\ f_{yx}(\overline{p}_0) & f_{yy}(\overline{p}_0) \end{pmatrix} > 0 \;\; (W_2(\overline{p}_0) > 0),$$

$$W_3(\overline{p}_0) := \det\begin{pmatrix} f_{xx}(\overline{p}_0) & f_{xy}(\overline{p}_0) & f_{xz}(\overline{p}_0) \\ f_{yx}(\overline{p}_0) & f_{yy}(\overline{p}_0) & f_{yz}(\overline{p}_0) \\ f_{zx}(\overline{p}_0) & f_{zy}(\overline{p}_0) & f_{zz}(\overline{p}_0) \end{pmatrix} > 0 \;\; (W_3(\overline{p}_0) < 0),$$

to funkcja f ma w punkcie $\overline{p}_0$ minimum (maksimum) lokalne.

2.4 Funkcje uwikłane.

Niech $F(x, y)$ będzie funkcją ciągłą określoną w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ i niech $A \subseteq D$ będzie zbiorem takich punktów tego obszaru, w których $F(x, y) = 0$.

Definicja 2.98. ***Funkcją uwikłaną*** *określoną przez warunek* $F(x, y) = 0$ *nazywamy każdą funkcję* $y = f(x)$ *spełniającą warunek* $F(x, f(x)) = 0$.

Z postaci $F(x, y) = 0$ funkcji uwikłanej korzystamy w tych przypadkach, gdy przejście do postaci jawnej, czyli do wzoru $y = f(x)$ jest niemożliwe lub praktycznie nieprzydatne. Funkcję określoną w sposób jawny wzorem $y = f(x)$ można zawsze traktować jako funkcję uwikłaną, określoną równaniem $F(x, y) = y - f(x) = 0$.

Równanie $F(x, y) = 0$ może określać dokładnie jedną funkcję uwikłaną, a może także określać nieskończenie wiele funkcji uwikłanych.

Przykład 2.99. Równanie $y - x^2 = 0$ określa dokładnie jedną funkcję uwikłaną $y = x^2$. □

Przykład 2.100. Funkcja $y = \sqrt{1 - x^2}$ jest funkcją uwikłaną, określoną w przedziale $[-1, 1]$ równaniem

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \tag{2.4}$$

ponieważ dla każdego $x \in [-1, 1]$ spełniony jest warunek $x^2 + (\sqrt{1 - x^2})^2 - 1 = 0$.
Funkcja $y = \sqrt{1 - x^2}$ nie jest jedyną funkcją uwikłaną określoną w przedziale $[-1, 1]$ za pomocą równania (2.4). Funkcji takich jest nieskończenie wiele, przy czym tylko dwie z nich są ciągłe w tym przedziale: $y = \sqrt{1 - x^2}$ i $y = -\sqrt{1 - x^2}$. □

Nie każde równanie $F(x, y) = 0$ określa funkcję uwikłaną.

Przykład 2.101. Równanie $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nie określa żadnej funkcji. □

Twierdzenie 2.102. (O istnieniu i jednoznaczności funkcji uwikłanej.) *Jeżeli funkcja* $F(x, y)$ *jest klasy* C^1 *w pewnym otoczeniu* $O(\overline{p}_0; r)$ *punktu* $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$ *oraz*

- $F(\overline{p}_0) = 0$,
- $F_y(\overline{p}_0) \neq 0$

to w pewnym przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *istnieje dokładnie jedna ciągła funkcja uwikłana* $y = f(x)$ *określona za pomocą równania* $F(x, y) = 0$ *i spełniająca warunek* $f(x_0) = y_0$.

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 2.102, to równanie $F(x, y) = 0$ jest równaniem krzywej przechodzącej przez punkt $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$, która w pewnym otoczeniu tego punktu pokrywa się z wykresem funkcji $y = f(x)$, spełniającej równanie $F(x, y(x)) = 0$.

Przykład 2.103. Funkcja $F(x, y) = x^y - y$ jest klasy C^1 w każdym otoczeniu punktu $\overline{p}_0 = (1, 1)$ leżącym w półpłaszczyźnie $x > 0$ oraz $F(1, 1) = 0$ i $F_y(1, 1) = -1$. Zatem istnieje dokładnie jedna funkcja uwikłana $y = f(x)$, określona w pewnym przedziale $(1 - \delta, 1 + \delta)$ równaniem $x^y - y = 0$ i spełniająca warunek $f(1) = 1$. Podanie wzoru określającego tę funkcję w sposób jawny nie jest możliwe, ponieważ nie potrafimy rozwiązać równania $x^y - y = 0$ względem niewiadomej y. $\square$

Pochodne funkcji uwikłanej.

Twierdzenie 2.104. (O pierwszej pochodnej funkcji uwikłanej.)
Jeżeli funkcja $F(x, y)$ *jest klasy* C^1 *w pewnym otoczeniu* $O(\overline{p}_0; r)$ *punktu* $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$ *oraz*

- $F(\overline{p}_0) = 0$,
- $F_y(\overline{p}_0) \neq 0$

to ciągła funkcja uwikłana $y = f(x)$ *dana równaniem* $F(x, y) = 0$ *ma w pewnym przedziale* $(x_0 - \delta, y_0 + \delta)$ *ciągłą pochodną wyrażoną wzorem:*

$$y^{'} = f^{'}(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}. \tag{2.5}$$

Twierdzenie 2.105. (O drugiej pochodnej funkcji uwikłanej.)
Jeżeli funkcja $F(x, y)$ *jest klasy* C^2 *w pewnym otoczeniu* $O(\overline{p}_0; r)$ *punktu* $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$ *oraz*

- $F(\overline{p}_0) = 0$,
- $F_y(\overline{p}_0) \neq 0$

to ciągła funkcja uwikłana $y = f(x)$ dana równaniem $F(x, y) = 0$ ma w pewnym przedziale $(x_0 - \delta, y_0 + \delta)$ ciągłą drugą pochodną, która wyraża się wzorem:

$$y^{''} = f^{''}(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}. \tag{2.6}$$

Jeżeli funkcja $F(x, y)$ jest klasy C^m w pewnym otoczeniu $O(\overline{p}_0; r)$ punktu $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$ oraz $F(\overline{p}_0) = 0$ i $F_y(\overline{p}_0) \neq 0$ to istnieje w pewnym otoczeniu punktu x_0 ciągła pochodna rzędu m funkcji uwikłanej danej równaniem $F(x, y) = 0$.

Wzory (2.5) i (2.6) pozwalają obliczać pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y = f(x)$ danej równaniem $F(x, y) = 0$ bez rozwiązywania tego równania.

Przykład 2.106. Równanie $F(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ określa w pewnym otoczeniu punktu $x_0 = 0$ dokładnie jedną ciągłą funkcję uwikłaną $y = f(x)$ spełniającą warunek $f(0) = 1$. Ponadto:

$$y^{'} = -\frac{x}{4y} \Rightarrow y^{'}(0) = 0,$$

$$y^{''} = -\frac{x^2 + 4y^2}{16y^3} \Rightarrow y^{''}(0) = -\frac{1}{4}.$$

□

Ekstrema funkcji uwikłanej.

Twierdzenie 2.107. *Jeżeli funkcja $F(x, y)$ jest klasy C^2 w pewnym otoczeniu $O(\overline{p}_0; r)$ punktu $\overline{p}_0 = (x_0, y_0)$ oraz*

- $F(\overline{p}_0) = 0$,
- $F_x(\overline{p}_0) = 0$,
- $F_y(\overline{p}_0) \neq 0$,

- $\frac{F_{xx}(\overline{p}_0)}{F_y(\overline{p}_0)} \neq 0$

to ciągła funkcja uwikłana $y = f(x)$ określona równaniem $F(x, y) = 0$ ma w punkcie x_0 ekstremum lokalne.
W przypadku, gdy $\frac{F_{xx}(\overline{p}_0)}{F_y(\overline{p}_0)} > 0$, to w punkcie x_0 funkcja uwikłana $y = f(x)$ ma maksimum oraz $f_{max} = f(x_0) = y_0$.
Gdy $\frac{F_{xx}(\overline{p}_0)}{F_y(\overline{p}_0)} < 0$, to w punkcie x_0 funkcja uwikłana $y = f(x)$ ma minimum oraz $f_{min} = f(x_0) = y_0$.

Równość $F_x(\overline{p}_0) = 0$ jest warunkiem koniecznym, a nierówność $F_{xx}(\overline{p}_0) \neq 0$ jest warunkiem wystarczającym istnienia w punkcie x_0 ekstremum funkcji uwikłanej.

Przykład 2.108. Funkcja uwikłana dana równaniem $x^2 - 2xy - 3y^3 + 4 = 0$ ma minimum w punkcie $x_1 = 1$ i $f_{min} = f(1) = 1$ oraz maksimum w punkcie $x_2 = -1$ i $f_{max} = f(-1) = -1$. □

Funkcje dwóch lub więcej zmiennych mogą być także określone w sposób uwikłany za pomocą równania $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, z) = 0$.

Przykład 2.109. Równanie $x^2+y^2+z^2-1 = 0$ określa w obszarze domkniętym $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ dwie ciągłe funkcje uwikłane:
$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ oraz $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. □

2.5 Ekstrema warunkowe.

Niech $f(\overline{x})$ i $g(\overline{x})$ będą funkcjami określonymi i ciągłymi w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$. Niech ponadto $A = \{\overline{x} \in R^n \mid g(\overline{x}) = 0\}$ oraz $\overline{p}_0 \in A$.

Definicja 2.110. *Funkcja f ma w punkcie $\overline{p}_0$ **ekstremum warunkowe** przy warunku $g(\overline{x}) = 0$, jeżeli funkcja $f_{/A} : D \cap A \to \mathbb{R}$ obcięta do zbioru A ma w tym punkcie ekstremum lokalne.*

Jeśli funkcje $f(x, y)$ i $g(x, y)$ dwóch zmiennych są klasy C^1 w otoczeniu punktu $\overline{p}_0$ i $g_y(\overline{p}_0) \neq 0$, to zgodnie z twierdzeniem 2.102 o istnieniu i jednoznaczności funkcji uwikłanej istnieje dokładnie jedna ciągła funkcja uwikłana $y = y(x)$ określona w pewnym otoczeniu punktu $\overline{p}_0$ za pomocą równania $g(x, y) = 0$.

Zatem znalezienie ekstremów funkcji f przy warunku $g(x,y) = 0$ sprowadza się do znalezienia ekstremów funkcji złożonej jednej zmiennej:

$$F(x) = f(x, y(x)).$$

Ekstremum funkcji $F(x) = f(x, y(x))$ istnieje w punktach, w których

$$F^{'} = f_x + f_y y^{'} = 0.$$

Ponieważ $y = y(x)$ jest funkcją uwikłaną równaniem $g(x,y) = 0$, to $y^{'} = -\frac{g_x}{g_y}$, stąd

$$F^{'} = \frac{f_x g_y - f_y g_x}{g_y}.$$

Zatem funkcja f może mieć ekstremum przy warunku $g(x,y) = 0$ tylko w takich punktach $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$, w których $g(\overline{x}) = 0$ oraz

$$f_x(\overline{x}) g_y(\overline{x}) - f_y(\overline{x}) g_x(\overline{x}) = 0. \tag{2.7}$$

Definicja 2.111. *Punkt $\overline{p}_0 \in \mathbb{R}^n$, w którym funkcja f może mieć ekstremum przy warunku $g(\overline{p}_0) = 0$ nazywamy* ***krytycznym punktem warunkowym****.*

Metoda mnożników Lagrange'a.

Punkty, w których jest możliwe ekstremum funkcji $f(x,y)$ przy warunku $g(x,y) = 0$ można wyznaczyć w następujący sposób.

Niech $\Phi(x,y) := f(x,y) + \lambda g(x,y)$ będzie funkcję dwóch zmiennych, gdzie λ jest parametrem. Zauważmy, że na zbiorze $A = \{\overline{x} \in R^n \mid g(\overline{x}) = 0\}$ funkcje Φ i f są równe, zatem mają te same ekstrema. Ekstremów funkcji $\Phi(x,y)$ szukamy przyrównując do zera pochodne cząstkowe tej funkcji. Równanie (2.7) jest wynikiem rugowania parametru λ z równań:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\overline{x}) = f_x(\overline{x}) + \lambda g_x(\overline{x}) = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(\overline{x}) = f_y(\overline{x}) + \lambda g_y(\overline{x}) = 0. \tag{2.9}$$

Do równań (2.8) i (2.9) dołączamy warunek $g(x,y) = 0$ i otrzymujemy układ trzech równań z trzema niewiadomymi x, y i λ. Punkty $\overline{p}_0 = (x,y)$ są szukanymi punktami krytycznymi.

Przykład 2.112. Funkcja $f(x,y) = xy^2$ przy warunku $x + y = 1$ ma dwa krytyczne punkty warunkowe: $\overline{p}_1 = (1,0)$ oraz $\overline{p}_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. □

Opisaną dla funkcji dwóch zmiennych metodę można uogólnić na przypadek funkcji n-zmiennych.

2.6 Powierzchnie o równaniu $F(x,y,z) = 0$.

Niech $F(x,y,z)$ będzie funkcją klasy C^1 w obszarze $D \subset \mathbb{R}^3$ i niech pochodne cząstkowe tej funkcji nie będą jednocześnie równe zero w pewnym punkcie $\overline{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$ (tzn. $((F_x(\overline{p}_0))^2 + (F_y(\overline{p}_0))^2 + (F_z(\overline{p}_0))^2 \neq 0)$, w którym $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Wówczas równanie $F(x,y,z) = 0$ przedstawia pewną powierzchnię przechodzącą przez punkt $\overline{p}_0$.

Płaszczyzna styczna do powierzchni $F(x,y,z) = 0$ w punkcie $\overline{p}_0$ ma równanie:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\overline{p}_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(\overline{p}_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(\overline{p}_0)(z - z_0) = 0.$$

Prosta normalna do tej powierzchni w punkcie $\overline{p}_0$ ma przedstawienie parametryczne:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + F_x(\overline{p}_0)t \\ y &= y_0 + F_y(\overline{p}_0)t \\ z &= z_0 + F_z(\overline{p}_0)t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Przykład 2.113. Równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni kuli $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ w punkcie $\overline{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ma postać:

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0, \quad \text{czyli}$$

$$x_0x + y_0y + z_0z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2.$$

□

2.7 Jakobian.

Niech dany będzie układ n funkcji n zmiennych $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ x_2 &= \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) \end{aligned} \tag{2.10}$$

określonych w pewnym obszarze $\Delta \subset \mathbb{R}^n$.
Zbiór punktów

$$D := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots, u_n),\ (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \Delta\}$$

nazywamy obrazem zbioru Δ przy przekształceniu (2.10).
Układ funkcji (2.10) przyporządkowuje każdemu punktowi $\overline{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \Delta$ pewien punkt $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$. Określone jest w ten sposób odwzorowanie $\Phi : \Delta \to D$ opisane przez funkcje (2.10).
Powiemy, że przekształcenie Φ jest ciągłe (różniczkowalne), jeśli wszystkie funkcje φ_i są ciągłe (mają ciągłe pochodne cząstkowe) w obszarze Δ.

Definicja 2.114. *Niech przekształcenie $\Phi : \Delta \to D$ określone przez układ (2.10) będzie różniczkowalne. Wyznacznik:*

$$J(\Phi) = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial u_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{pmatrix}$$

*nazywamy **jakobianem** układu (2.10) lub wyznacznikiem funkcyjnym Jacobiego* [10]*.*

Przykład 2.115. Dla $n = 2$ jakobian układu

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v) \\ y &= \varphi_2(u, v) \end{aligned}$$

jest równy

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

□

Przykład 2.116. Dla $n = 3$ jakobian układu

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u, v, w) \\ y &= \varphi_2(u, v, w) \\ z &= \varphi_3(u, v, w) \end{aligned}$$

[10]Carl Jacobi (1804-1851) - matematyk niemiecki

jest równy

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

□

Twierdzenie 2.117. *Jeśli jakobian układu (2.10) jest różny od zera w pewnym punkcie* $\overline{p}_0 \in \Delta$*, to istnieje takie otoczenie* $O(\overline{p}_0; r)$ *punktu* $\overline{p}_0$*, że odwzorowanie* Φ *jest w tym otoczeniu różnowartościowe.*

Twierdzenie 2.118. *Jeśli odwzorowanie* $\Phi : \Delta \to D$ *określone przez układ (2.10) jest przekształceniem różniczkowalnym o jakobianie* $J(\Phi)$ *różnym od zera w obszarze* Δ*, to istnieje różniczkowalne odwzorowanie odwrotne* $\Phi^{-1} : D \to \Delta$ *określone przez układ:*

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ u_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Ponadto

$$J(\Phi^{-1}) = (J(\Phi))^{-1}.$$

Przykład 2.119. Para funkcji

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(u,v) = u - v \\ y &= \varphi_2(u,v) = u + v \end{aligned} \tag{2.11}$$

odwzorowuje wnętrze kwadratu $\overline{\Delta} = \{(u,v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v \leqslant 1\}$ na płaszczyźnie OUV na wnętrze kwadratu $\overline{D} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x + y \leqslant 2, -2 \leqslant x - y \leqslant 0\}$ na płaszczyźnie OXY.
Jakobian układu (2.11) wynosi:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Do odwzorowania $\Phi : \Delta \to D$ określonego przez układ (2.11) istnieje odwzorowanie odwrotne $\Phi^{-1} : D \to \Delta$ określone parą funkcji:

$$\begin{aligned} u &= f_1(x,y) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ v &= f_2(x,y) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y. \end{aligned}$$

Jakobian tego układu wynosi:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}.$$

□

Literatura

[1] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa, 1979.

[2] F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa, 1979.

[3] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2*, GiS, Wrocław, 2005.

[4] I. Dziubiński, L. Siewierski, *Matematyka dla wyższych szkół technicznych*, tom 1, PWN, Warszawa, 1984.

[5] I. Dziubiński, L. Siewierski, *Matematyka dla wyższych szkół technicznych*, tom 2, PWN, Warszawa, 1985.

[6] W. Żakowski, W. Kołodziej, *Matematyka część II*, WNT, Warszawa, 1976.