# Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych.*

Agata Pilitowska

2007

## 1 Całka podwójna.

### 1.1 Całka podwójna w prostokącie

Niech $f$ będzie funkcją dwóch zmiennych określoną i ograniczoną w prostokącie domkniętym $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$. Podzielmy prostokąt $P$ na $n$ dowolnych prostokątów domkniętych $P_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, o rozłącznych wnętrzach, których długości przekątnych są odpowiednio równe $d_k$ a pola $\Delta P_k$. Podział ten oznaczmy symbolem $\Delta_n$.
Liczbę $\delta_n := \max d_k$ nazwiemy średnicą podziału $\Delta_n$.

Ciąg podziałów $(\Delta_n)$ nazywamy ***ciągiem normalnym*** podziałów, jeżeli odpowiadający mu ciąg średnic $(\delta_n)$ dąży do zera.

Dla danego podziału $\Delta_n$ z wnętrza każdego prostokąta $P_k$ wybieramy dowolnie punkt $\overline{p}_k = (x_k, y_k)$. Sumę

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\overline{p}_k)\Delta P_k$$

nazywamy ***sumą całkową*** funkcji $f$ w prostokącie $P$.
(Dla danego podziału $\Delta_n$, wybierając na dwa różne sposoby punkty $\overline{p}_k \in P_k$ możemy otrzymać dwie różne sumy całkowe.)

**Definicja 1.1.** *Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów prostokąta $P$, każdy (niezależnie od wyboru punktów $\overline{p}_k$) ciąg sum całkowych $(S_n)$ jest zbieżny zawsze do tej samej granicy właściwej, to granicę tę nazywamy* ***całką***

*Matematyka II IChiP- konspekt wykładu cz.II

***podwójną*** *funkcji $f$ w prostokącie $P$ i oznaczamy symbolem $\int\int\limits_P f(x,y)d\sigma$. Zatem*

$$\int\int\limits_P f(x,y)d\sigma \stackrel{df}{=} \lim_{\delta_n\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\overline{p}_k)\Delta P_k.$$

**Definicja 1.2.** *Jeżeli całka $\int\int\limits_P f(x,y)d\sigma$ istnieje, to mówimy, że funkcja $f$ jest* ***całkowalna*** *(w sensie Riemanna) w prostokącie $P$.*

Istnienie całki $\int\int\limits_P f(x,y)d\sigma$ zapewnia, że każde dwie sumy całkowe różnią się dowolnie mało, jeżeli tylko średnice podziałów, dla których zostały one utworzone, są dostatecznie małe.
Warunek, by pola $\Delta P_k$ prostokątów $P_k$ dążyły do zera jest niewystarczający by średnice $d_k$ dążyły do zera. Jeśli natomiast średnice prostokątów $P_k$ dążą do zera, to ich pola również.

**Przykład 1.3.** Niech funkcja $f(x,y)=1$ będzie określona w prostokącie $P$. Dla dowolnego podziału $\Delta_n$ suma całkowa

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta P_k =\mid P\mid .$$

Zatem całka podwójna $\int\int\limits_P 1d\sigma$ równa jest polu prostokąta $P$. □

**Przykład 1.4.** Niech funkcja $f(x,y)=c>0$ będzie określona w prostokącie $P$. Dla dowolnego podziału $\Delta_n$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}c\Delta P_k = c\mid P\mid .$$

Zatem całka podwójna $\int\int\limits_P cd\sigma$ równa jest objętości prostopadłościanu o polu podstawy $\mid P\mid$ i wysokości $c$. □

**Przykład 1.5.** Niech funkcja $f(x,y)\geqslant 0$ będzie ciągła w prostokącie $P$. Dla dowolnego podziału $\Delta_n$ suma całkowa $S_n$ równa jest sumie objętości prostopadłościanów o polach podstawy $\Delta P_k$ i wysokościach $f(\overline{p}_k)$, dla $k=1,2,\ldots,n$. Zatem całka podwójna $\int\int\limits_P f(x,y)d\sigma$ równa jest objętości bryły ograniczonej płaszczyznami $z=0$, $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ oraz powierzchnią o równaniu $z=f(x,y)$. □

**Przykład 1.6.** Jeżeli funkcja $f$ jest gęstością powierzchniową masy prostokąta $P$, to całka podwójna $\int\int\limits_P f(x,y)d\sigma$ wyraża masę tego prostokąta. □

**Przykład 1.7.** Jeżeli funkcja $f$ jest gęstością powierzchniową ładunku elektrycznego, rozłożonego na prostokącie $P$, to całka podwójna $\int\int\limits_P f(x,y)d\sigma$ wyraża całkowity ładunek elektryczny tego prostokąta. □

**Twierdzenie 1.8.** *Funkcja ciągła w prostokącie domkniętym jest w tym prostokącie całkowalna.*

**Twierdzenie 1.9.** *Funkcja ograniczona w prostokącie domkniętym oraz ciągła w tym prostokącie z wyjątkiem zbioru punktów tego prostokąta, którego pole jest równe zero, jest w tym prostokącie całkowalna.*

W szczególnym przypadku zbiór punktów nieciągłości funkcji $f$ może być sumą skończonej liczby krzywych postaci $y = y(x)$ lub $x = x(y)$, gdzie funkcje $y(x)$ oraz $x(y)$ są ciągłe w pewnych przedziałach.
Funkcja nieograniczona nie jest całkowalna.

**Twierdzenie 1.10.** (O liniowości całki.)
*Jeżeli dwie funkcje $f$ i $g$ określone w prostokącie $P$ są całkowalne, to ich suma $f+g$, różnica $f-g$ oraz iloczyn $fg$ są całkowalne. Przy czym dla $a, b \in \mathbb{R}$*

$$\int\int\limits_P (af(x,y) \pm bg(x,y))d\sigma = a\int\int\limits_P f(x,y)d\sigma \pm b\int\int\limits_P g(x,y)d\sigma.$$

*Ponadto, jeśli dla każdego $(x,y) \in P$, $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, to*

$$\int\int\limits_P f(x,y)d\sigma \leqslant \int\int\limits_P g(x,y)d\sigma.$$

**Twierdzenie 1.11.** ( O addytywności całki względem obszaru całkowania.)
*Jeżeli prostokąt $P$ podzielimy na dwa prostokąty $P_1$ i $P_2$, zaś $f(x,y)$ jest funkcją całkowalną w prostokącie $P$, to jest także całkowalna w prostokątach $P_2$ i $P_2$, przy czym*

$$\int\int\limits_P f(x,y)\sigma = \int\int\limits_{P_1} f(x,y)d\sigma + \int\int\limits_{P_2} f(x,y)d\sigma.$$

**Twierdzenie 1.12.** *Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w prostokącie $P$ oraz $M := \sup\limits_{(x,y)\in P} f(x,y)$ i $m := \inf\limits_{(x,y)\in P} f(x,y)$, to*

$$m \mid P \mid \leqslant \iint\limits_{P} f(x,y)d\sigma \leqslant M \mid P \mid .$$

**Twierdzenie 1.13.** (Twierdzenie całkowe o wartości średniej.)
*Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w prostokącie $P$, to istnieje taki punkt $c \in P$, że*

$$\iint\limits_{P} f(x,y)d\sigma = f(c) \mid P \mid .$$

Liczbę $\frac{\iint\limits_{P} f(x,y)d\sigma}{|P|}$ nazywamy wartością średnią funkcji $f(x,y)$ w prostokącie $P$.

Symbol $d\sigma$ będziemy często zastępować oznaczeniem $dxdy$.

## 1.2 Całki iterowane.

Niech $f$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w prostokącie domkniętym $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ i niech dla każdego $a \leqslant x \leqslant b$ istnieje całka pojedyncza $\int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy$. Jest ona wtedy funkcją zmiennej $x$, określoną w przedziale $a \leqslant x \leqslant b$. Jeżeli funkcja ta jest całkowalna w przedziale $[a,b]$, to całkę

$$\int\limits_{a}^{b}(\int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy)dx \tag{1.1}$$

nazywamy ***całką iterowaną*** funkcji $f$ i oznaczamy $\int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{c}^{d} f(x,y)dy$.
Analogicznie określamy całkę iterowaną

$$\int\limits_{c}^{d}(\int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx)dy, \tag{1.2}$$

którą oznaczymy $\int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{a}^{b} f(x,y)dx$.

**Przykład 1.14.**

$$\int_{-2}^{3} dx \int_{0}^{1} (1 - xy^2)dy = \int_{-2}^{3} (1 - \frac{1}{3}x)dx = x - \frac{1}{6}x^2 \,|_{-2}^{3} = \frac{25}{6},$$

$$\int_{0}^{1} dy \int_{-2}^{3} (1 - xy^2)dx = \int_{0}^{1} (5 - \frac{5}{2}y^2)dy = 5y - \frac{5}{6}y^3 \,|_{0}^{1} = \frac{25}{6}.$$

□

W przykładzie 1.14 całki iterowane $\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$ oraz $\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx$ są równe. Nie jest to przypadek. Prawdziwe jest bowiem następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1.15.** (O zamianie całki podwójnej na całkę iterowaną.) *Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w prostokącie $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$, to obie całki iterowane (1.1) i (1.2) istnieją i są równe całce podwójnej. Zatem*

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int\int_P f(x,y)dxdy,$$

*oraz*

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x,y)dx = \int\int_P f(x,y)dxdy.$$

*(W tym przypadku wartość całki iterowanej nie zależy od kolejności całkowania.)*

**Przykład 1.16.** Całka podwójna funkcji $f(x,y) = x^2y$ w prostokącie $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ jest równa :

$$\int\int_P x^2ydxdy = \int_0^1 (\int_0^2 x^2ydx)dy = \int_0^1 y(\int_0^2 x^2dx)dy =$$

$$= \int_0^1 y(\frac{1}{3}x^3) \,|_0^2 \, dy = \int_0^1 y\frac{8}{3}dy = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{2}y^2 \,|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

Analogicznie

$$\int_0^2 dx \int_0^1 xy^2dy = \frac{4}{3}.$$

□

**Przykład 1.17.** Zgodnie z przykładem (1.5) objętość bryły $V$ ograniczonej płaszczyznami $z = 0, x = 1, x = 2, y = 1, y = 3$ oraz powierzchnią $z = x^2+y^2$ wyraża się następująco:

$$| V |= \int\int_P (x^2 + y^2)dxdy = \int_1^3 (\int_1^2 (x^2 + y^2)dx)dy = \frac{40}{3}.$$

□

## 1.3 Całka podwójna w obszarze normalnym.

Niech $f$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w obszarze ograniczonym $D \subseteq \mathbb{R}^2$ oraz niech $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$ będzie dowolnym prostokątem domkniętym zawierającym obszar $D$. Rozważmy funkcję $f^*$ określoną w prostokącie $P$ następująco:

$$f^*(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & \text{gdy } (x, y) \in D \\ 0, & \text{gdy } (x, y) \in P \setminus D. \end{cases}$$

Całkę podwójną funkcji $f$ w obszarze $D$ określamy w następujący sposób:

$$\int\int_D f(x, y)d\sigma \stackrel{df}{=} \int\int_P f^*(x, y)d\sigma, \tag{1.3}$$

o ile całka $\int\int_P f^*(x, y)d\sigma$ istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja $f$ jest całkowalna w obszarze $D$. Całka $\int\int_P f^*(x, y)d\sigma$ nie zależy od wyboru prostokąta $P$.

**Definicja 1.18.** *Obszar domknięty $D \subseteq \mathbb{R}^2$ nazywamy* ***obszarem normalnym*** *względem osi $OX$, jeżeli istnieją funkcje $\varphi$ i $\psi$ zmiennej $x$, ciągłe w pewnym przedziale $[a, b]$ takie, że*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$$

*oraz $\varphi(x) < \psi(y)$ dla każdego $x \in (a, b)$.*

Analogicznie definiujemy ***obszar normalny*** względem osi $OY$ jako zbiór

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leqslant y \leqslant d, \alpha(y) \leqslant x \leqslant \beta(y)\},$$

gdzie funkcje $\alpha$ i $\beta$ zmiennej $y$ są ciągłe w przedziale $[c, d]$ oraz $\alpha(x) < \beta(x)$ dla $x \in (c, d)$.

**Przykład 1.19.** Obszarem normalnym względem osi $OX$ jest tarcza elipsy wraz z brzegiem. Prostokąt domknięty jest obszarem normalnym jednocześnie względem osi $OX$ i osi $OY$. □

Jeżeli $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$ jest obszarem normalnym względem osi $OX$ oraz $c := \inf\limits_{x\in[a,b]} \varphi(x)$ i $d := \sup\limits_{x\in[a,b]} \psi(x)$, to $D \subset P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$. Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w obszarze $D$ to funkcja $f^*$ jest całkowalna w prostokącie $P$, ponieważ jest w nim ciągła z wyjątkiem, co najwyżej punktów położonych na krzywych $y = \varphi(x)$ oraz $y = \psi(x)$.

**Twierdzenie 1.20.** *Niech $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leqslant x \leqslant b, \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$ będzie obszarem normalnym względem osi $OX$ i niech $f$ będzie funkcją ciągłą w obszarze $D$. Wówczas*

$$\int\!\!\int\limits_D f(x, y)d\sigma = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d f^*(x, y)dy)dx = \int\limits_a^b (\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)dy)dx. \tag{1.4}$$

Całkę podwójną funkcji $f$, ciągłej w obszarze $D$ normalnym względem osi $OY$ obliczamy analogicznie jak w przypadku obszaru normalnego względem osi $OX$. Otrzymujemy wówczas

$$\int\!\!\int\limits_D f(x, y)d\sigma = \int\limits_c^d (\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)dx)dy. \tag{1.5}$$

W przypadku, gdy obszar $D$ jest normalny zarówno względem osi $OX$ jak i względem osi $OY$ to prawdziwe są oba wzory (2.1) oraz (1.5).

**Przykład 1.21.** Całka podwójna funkcji $f(x, y) = x^2y$ w obszarze $D$ ograniczonym prostymi: $x = 0$, $y = 1 - \frac{1}{2}x$ oraz $y = 2 - x$ wynosi:

$$\int\!\!\int\limits_D x^2y d\sigma = \int\limits_0^2 (\int\limits_{1-\frac{1}{2}x}^{2-x} x^2ydy)dx = \frac{18}{5}.$$

□

**Definicja 1.22.** *Sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem osi $OX$ lub osi $OY$) o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy* ***obszarem regularnym*** *na płaszczyźnie.*

**Twierdzenie 1.23.** *Niech obszar regularny $D$ będzie sumą obszarów normalnych $D_1, D_2, \ldots, D_m$ o parami rozłącznych wnętrzach i niech funkcja $f$ będzie całkowalna w tym obszarze. Wówczas funkcja $f$ jest także całkowalna w każdym obszarze normalnym $D_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ oraz*

$$\int\int_D f(x,y)d\sigma = \int\int_{D_1} f(x,y)d\sigma + \int\int_{D_2} f(x,y)d\sigma + \ldots + \int\int_{D_m} f(x,y)d\sigma.$$

Dla obszaru regularnego $D$ (w szczególności normalnego względem osi $OX$ lub osi $OY$) prawdziwe są wszystkie twierdzenia sformułowane dla przypadku, gdy $D$ jest prostokątem.

**Przykład 1.24.** Obszar $D$ ograniczony prostymi: $y - x = 0$, $3x - y - 2 = 0$ oraz $x + y - 6 = 0$ można podzielić prostą $y = 3$ na dwa obszary $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant y \leqslant 3, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant y\}$ oraz $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3 \leqslant y \leqslant 4, \frac{1}{3}y + \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 6 - y\}$ normalne względem osi $OY$. Stąd całka podwójna funkcji $f(x,y) = 2x + y$ w obszarze $D$ wynosi:

$$\int\int_D (2x+y)dxdy = \int\int_{D_1} (2x+y)dxdy + \int\int_{D_2} (2x+y)dxdy =$$

$$= \int_1^3 \Big( \int_{\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}}^{y} (2x+y)dx\Big)dy + \int_3^4 \Big( \int_{\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}}^{6-y} (2x+y)dx\Big)dy = \frac{40}{3}.$$

□

**Przykład 1.25.** Niech funkcja $f(x,y) = 1$ będzie określona w obszarze regularnym $D$. Całka podwójna $\int\int_D 1d\sigma$ równa jest polu obszaru $D$. □

**Przykład 1.26.** Niech funkcja $f(x,y) \geqslant 0$ będzie ciągła w obszarze regularnym $D$. Całka podwójna $\int\int_D f(x,y)d\sigma$ równa jest objętości bryły $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in D, 0 \leqslant z \leqslant f(x,y)\}$ o podstawie $D$, ograniczonej powierzchnią będącą wykresem funkcji $z = f(x,y)$ oraz powierzchnią walcową, utworzoną z prostych równoległych do osi $OZ$ i przechodzących przez brzeg obszaru $D$. □

**Przykład 1.27.** Niech funkcja $f(x,y)$ będzie gęstością powierzchniową masy obszaru regularnego $D$.

- Całka podwójna
$$\int\int_D f(x,y)d\sigma$$
wyraża masę obszaru $D$.

- Całki
$$M_x := \int\int_D yf(x,y)d\sigma \quad \text{oraz} \quad M_y := \int\int_D xf(x,y)d\sigma$$
przedstawiają momenty statyczne $M_x$ (względem osi $OX$) oraz $M_y$ (względem osi $OY$) obszaru $D$.

- Całki
$$B_x := \int\int_D y^2 f(x,y)d\sigma, \quad B_y := \int\int_D x^2 f(x,y)d\sigma$$
wyrażają momenty bezwładności $B_x$ (względem osi $OX$) oraz $B_y$ (względem osi $OY$) obszaru $D$.

- Całka
$$M_O := \int\int_D (x^2+y^2)f(x,y)d\sigma$$
wyraża moment bezwładności obszaru $D$ względem środka $O=(0,0)$ układu współrzędnych.

- Współrzędne środka masy obszaru $D$ wyrażają się wzorami:
$$x_C := \frac{B_y}{\int\int_D f(x,y)d\sigma}, \quad y_C := \frac{B_x}{\int\int_D f(x,y)d\sigma}.$$

□

**Przykład 1.28.** Moment bezwładności względem osi $OX$ jednorodnego trójkąta o masie $m$ i wierzchołkach w punktach: $\overline{p}_1=(0,0)$, $\overline{p}_2=(a,0)$ i $\overline{p}_3=(a,a)$, wynosi:
$$B_x = \int\int_D \frac{2m}{a^2}y^2 d\sigma,$$

gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant x\}$. Stąd

$$B_x = \frac{2m}{a^2} \int_0^a (\int_0^x y^2 dy) dx = \frac{1}{6} m a^2.$$

$\square$

**Przykład 1.29.** Niech $V$ będzie bryłą ograniczoną powierzchniami: $z = x^2 + y$, $z = 0$, $xy = 4$ oraz $x + y = 5$. Ponieważ $z = x^2 + y > 0$ dla punktów $(x, y) \in D$ należących do obszaru ograniczonego krzywymi $xy = 4$ oraz $x + y = 5$, zatem objętość bryły $V$ dana jest wzorem:

$$| V |= \int\int_D (x^2 + y) dx dy.$$

Obszar $D$ jest normalny względem obu osi. Jako normalny względem osi $OX$ można go określić jako $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x \leqslant 4, \frac{4}{x} \leqslant y \leqslant 5 - x\}$. Stąd

$$| V |= \int_1^4 (\int_{\frac{4}{x}}^{5-x} (x^2 + y) dy) dx = \frac{63}{4}.$$

$\square$

**Przykład 1.30.** Objętość bryły ograniczonej powierzchniami dwóch walców: $x^2 + y^2 = r^2$ oraz $y^2 + z^2 = r^2$ równa jest, z uwagi na symetrię tej bryły, ośmiokrotnej objętości tej jej części, która leży w pierwszej ósemce przestrzeni. Zatem

$$| V |= 8 \int\int_D \sqrt{r^2 - y^2} d\sigma,$$

gdzie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{r^2 - y^2}, 0 \leqslant y \leqslant r\}$. Stąd

$$| V |= 8 \int_0^r ( \int_0^{\sqrt{r^2 - y^2}} \sqrt{r^2 - y^2} dx) dy = \frac{16}{3} r^3.$$

$\square$

## 1.4 Zamiana zmiennych w całce podwójnej.

**Twierdzenie 1.31.** (O zamianie zmiennych w całce podwójnej.)
*Niech funkcja $f$ będzie określona, ciągła i ograniczona w pewnym obszarze regularnym $D \subset \mathbb{R}^2$ i niech przekształcenie*

$$\Phi : \Delta \to D, \quad (u, v) \mapsto (x = \varphi_1(u, v), y = \varphi_2(u, v))$$

*odwzorowuje różnowartościowo wnętrze obszaru regularnego $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ na płaszczyźnie zmiennych $u, v$ na wnętrze obszaru regularnego $D$ (odwzorowanie brzegów może nie być 1-1). Załóżmy ponadto, że funkcje $\varphi_1$ i $\varphi_2$ są klasy $C^1$ na pewnym zbiorze otwartym zawierającym obszar $\Delta$ oraz jakobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ jest różny od zera wewnątrz obszaru $\Delta$.*

*Wówczas zachodzi następujący wzór:*

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_\Delta f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv.$$

Jeżeli $f(x, y) = 1$ to

$$|D| = \int\int_D dxdy = \int\int_\Delta \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dudv.$$

Odpowiedni wybór zmiennych całkowania może znacznie uprościć obliczenia całki. Decydując się na zamianę zmiennych staramy się tak dobierać przekształcenie $\Phi : \Delta \to D$, żeby obszar $\Delta$ był jak najprostszy (najlepiej, aby był normalny względem osi, gdyż wówczas można całkę po obszarze $\Delta$ zamienić na całkę iterowaną). Należy przy tym zwrócić uwagę, żeby funkcja podcałkowa nie uległa na skutek tej zamiany zbytniemu skomplikowaniu.

**Przykład 1.32.** (Przesunięcie równoległe.)
Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Przekształcenie

$$(u, v) \mapsto (x = u + a, y = v + b)$$

odwzorowuje różnowartościowo obszar $\Delta = \mathbb{R}^2$ na obszar $D = \mathbb{R}^2$. Ponadto

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Stąd
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(u+a, v+b)dudv.$$
□

**Przykład 1.33.** (Przekształcenie podobieństwa.)
Niech $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $ab \neq 0$. Przekształcenie
$$(u,v) \mapsto (x = au, y = bv)$$
odwzorowuje różnowartościowo obszar $\Delta = \mathbb{R}^2$ na obszar $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ponadto
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = ab.$$
Stąd
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(au, bv)\,|ab|\,dudv.$$
□

**Przykład 1.34.** (Przekształcenie biegunowe.)
Położenie punktu $\overline{p}$ na płaszczyźnie można opisać parą liczb $(\varphi, r)$, gdzie $\varphi$ oznacza miarę kąta między dodatnią częścią osi $OX$ a promieniem wodzącym punktu $\overline{p}$ natomiast $r$ oznacza odległość punktu $\overline{p}$ od początku układu współrzędnych. Parę liczb $(\varphi, r)$ nazywamy *współrzędnymi biegunowymi* punktu płaszczyzny.

Przekształcenie
$$(u,v) \mapsto (x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi)$$
przeprowadza prostokąt domknięty $\Delta = \{(\varphi, r) | 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant R\}$ na koło $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$. Ponadto
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det \begin{bmatrix} -r\sin\varphi & \cos\varphi \\ r\cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix} = -r\sin^2\varphi - r\cos^2\varphi = -r.$$
Jakobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ jest różny od zera wewnątrz obszaru $\Delta$, stąd
$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rd\varphi dr = \int_0^{2\pi}(\int_0^R f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr)d\varphi.$$
□

**Przykład 1.35.** Całkę podwójną z funkcji $f(x,y) = xy^2$ po obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 4, x \geqslant 0\}$ można obliczyć wprowadzając współrzędne biegunowe. Obszar $D$ jest wówczas obrazem obszaru $\Delta = \{(\varphi, r) \in \mathbb{R}^2 | \frac{-\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 2\}$. Stąd

$$\int\int_D xy^2 dxdy = \int\int_\Delta (r\cos\varphi)(r\sin\varphi)^2 r d\varphi dr = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^2 r^4 \sin^2\varphi \cos\varphi dr = \frac{64}{15}.$$

□

**Przykład 1.36.** Z interpretacji geometrycznej całki podwójnej wynika, że objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = x^2+y^2$ (paraboloida obrotowa), $z = 0$ oraz $x^2 + y^2 = 1$ (walec obrotowy) określona jest wzorem:

$$\int\int_D (x^2 + y^2) dxdy,$$

gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Dokonując w rozważanej całce zamiany zmiennych na współrzędne biegunowe otrzymujemy

$$\int\int_D (x^2 + y^2) dxdy = \int\int_\Delta (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) r d\varphi dr = \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

□

# 2 Całka potrójna

## 2.1 Całka potrójna na prostopadłościanie

Niech $f$ będzie funkcją trzech zmiennych określoną i ograniczoną w prostopadłościanie domkniętym $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ p \leqslant z \leqslant q\}$. Podzielmy prostopadłościan $V$ na $n$ dowolnych prostopadłościanów domkniętych $V_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, o rozłącznych wnętrzach, których długości przekątnych są odpowiednio równe $d_k$ a objętości $\Delta V_k$. Podział ten oznaczmy symbolem $\Delta_n$. Liczbę $\delta_n := \max d_k$ nazwiemy średnicą podziału $\Delta_n$.

Ciąg $(\Delta_n)$ podziałów prostopadłościanu nazywamy ***ciągiem normalnym*** podziałów, jeżeli odpowiadający mu ciąg średnic $(\delta_n)$ dąży do zera.

Dla danego podziału $\Delta_n$ z wnętrza każdego prostopadłościanu $V_k$ wybieramy dowolnie punkt $\overline{p}_k = (x_k, y_k, z_k)$. Sumę

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\overline{p}_k)\Delta V_k$$

nazywamy ***sumą całkową*** funkcji $f$ w prostopadłościanie $V$.
(Dla danego podziału $\Delta_n$, wybierając na dwa różne sposoby punkty $\overline{p}_k \in V_k$ możemy otrzymać dwie różne sumy całkowe.)

**Definicja 2.1.** *Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów $(\Delta_n)$ prostopadłościanu $V$, każdy (niezależnie od wyboru punktów $\overline{p}_k$) ciąg sum całkowych $(S_n)$ jest zbieżny zawsze do tej samej granicy właściwej, to granicę tę nazywamy* ***całką potrójną*** *funkcji $f$ w prostopadłościanie $V$ i oznaczamy symbolem $\int\int\limits_V\int f(x,y)dV$. Zatem*

$$\int\int\limits_V\int f(x,y,z)dV \stackrel{df}{=} \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{p}_k)\Delta V_k.$$

**Definicja 2.2.** *Jeżeli całka $\int\int\limits_V\int f(x,y,z)dV$ istnieje, to mówimy, że funkcja $f$ jest* ***całkowalna*** *(w sensie Riemanna) w prostopadłościanie $V$.*

**Twierdzenie 2.3.** *Funkcja ciągła w prostopadłościanie domkniętym jest w tym prostopadłościanie całkowalna.*

Podobnie jak dla całek podwójnych dowodzi się ogólniejszego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.4.** *Jeżeli funkcja $f$ jest ograniczona na prostopadłościanie domkniętym oraz jest na tym prostopadłościanie ciągła z wyjątkiem zbioru punktów tego prostopadłościanu, którego objętość jest równa zero, to funkcja $f$ jest całkowalna w tym prostopadłościanie.*

W szczególnym przypadku zbiór punktów nieciągłości funkcji $f$ może być sumą skończonej liczby powierzchni określonych równaniami $z = \varphi(x,y)$, $y = \psi(x,z)$ lub $x = \chi(y,z)$, gdzie funkcje $\varphi, \psi, \chi$ są ciągłe w odpowiednich obszarach płaskich płaszczyzn $OXY$, $OXZ$ i $OYZ$.

Analogicznie jak dla funkcji dwóch zmiennych, dla funkcji trzech zmiennych prawdziwe są twierdzenia o liniowości całki oraz o addytywności całki względem obszaru całkowania a także twierdzenie całkowe o wartości średniej.

**Twierdzenie 2.5.** (Twierdzenie całkowe o wartości średniej.)
*Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w prostopadłościanie $V$, to istnieje taki punkt $c \in V$, że*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = f(c) \mid V \mid,$$

*gdzie $\mid V \mid$ oznacza objętość prostopadłościanu $V$.*

Liczbę $\frac{\iiint\limits_V f(x,y,z)dV}{|V|}$ nazywamy wartością średnią funkcji $f(x,y,z)$ w prostopadłościanie $V$.

**Twierdzenie 2.6.** (O zamianie całki potrójnej na całkę iterowaną.) *Jeżeli funkcja $f$ jest ciągła w prostopadłościanie domkniętym $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ p \leqslant z \leqslant q\}$, to*

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b (\int\limits_c^d (\int\limits_p^q f(x,y,z)dz)dy)dx.$$

Zauważmy, że przy założeniu ciągłości funkcji $f$ wartość całki $\iiint\limits_V f(x,y,z)dV$ nie zależy od kolejności całkowania. Zatem powyższy wzór można zapisać w sześciu postaciach uwzględniając różne kolejności całkowania. (W wielu przypadkach wybór odpowiedniej kolejności całkowania pozwala znacznie uprościć obliczenie całki potrójnej.)

Symbol $dV$ będziemy często zastępować oznaczeniem $dxdydz$.

**Przykład 2.7.** Całka potrójna z funkcji $f(x,y,z) = x+y+2z$ w prostopadłościanie $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2, 1 \leqslant z \leqslant 2\}$ jest równa:

$$\iiint\limits_V (x+y+2z)dxdydz = \int\limits_0^1 (\int\limits_0^2 (\int\limits_1^2 (x+y+2z)dx)dy)dz = 9.$$

$\square$

**Przykład 2.8.** Bezpośrednio z definicji całki potrójnej wynika, że

$$\iiint\limits_V 1dV = |V|,$$

gdzie $|V|$ oznacza objętość prostopadłościanu $V$. $\square$

**Przykład 2.9.** Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ jest gęstością objętościową masy prostopadłościanu $V$, to całka potrójna

$$\int\int_V\int f(x, y, z)dV$$

wyraża masę tego prostopadłościanu. $\square$

**Przykład 2.10.** Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ jest gęstością objętościową ładunku elektrycznego rozłożonego w prostopadłościanie $V$, to całka potrójna

$$\int\int_V\int f(x, y, z)dV$$

wyraża całkowity ładunek elektryczny zgromadzony w tym prostopadłościanie. $\square$

## 2.2 Całka potrójna w obszarze normalnym.

Niech $f$ będzie funkcją określoną i ograniczoną w obszarze ograniczonym $A \subset \mathbb{R}^3$ oraz niech $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d, p \leqslant z \leqslant q\}$ będzie dowolnym prostopadłościanem domkniętym zawierającym obszar $A$. Rozważmy funkcję $f^*$ określoną w prostopadłościanie $V$ następująco:

$$f^*(x, y, z) := \begin{cases} f(x, y, z), & \text{gdy } (x, y, z) \in A \\ 0, & \text{gdy } (x, y, z) \in V \setminus A. \end{cases}$$

Całkę potrójną funkcji $f$ w obszarze $A$ określamy w następujący sposób:

$$\int\int_A\int f(x, y, z)dV \stackrel{df}{=} \int\int_V\int f^*(x, y, z)dV, \tag{2.1}$$

o ile całka $\int\int_V\int f^*(x, y, z)dV$ istnieje. Mówimy wtedy, że funkcja $f$ jest całkowalna w obszarze $A$. Całka $\int\int_V\int f^*(x, y, z)dV$ nie zależy od wyboru prostopadłościanu $V$.

**Definicja 2.11.** *Obszar domknięty $A \subset \mathbb{R}^3$ nazywamy **obszarem normalnym** względem płaszczyzny $OXY$, jeżeli istnieją funkcje $\varphi_1$ i $\psi_1$ zmiennych*

*$x$ i $y$, ciągłe w pewnym obszarze regularnym $D_{xy}$ na płaszczyźnie $OXY$ takie, że*

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_{xy}, \varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \psi_1(x, y)\}$$

*oraz $\varphi_1(x, y) < \psi_1(x, y)$ dla wszystkich $(x, y)$ należących do wnętrza obszaru $D_{xy}$.*

Geometrycznie normalność obszaru $A$ względem płaszczyzny $OXY$ oznacza, że każda prosta prostopadła do płaszczyzny $OXY$ wystawiona z obszaru $D_{xy}$ przecina brzeg obszaru $A$ dokładnie w dwóch punktach należących odpowiednio do powierzchni o równaniach $z = \varphi_1(x, y)$ i $z = \psi_1(x, y)$. Jeżeli $A$ jest obszarem normalnym względem płaszczyzny $OXY$, to $D_{xy}$ jest rzutem tego obszaru na płaszczyznę $OXY$.

Analogicznie określamy ***obszar normalny*** względem płaszczyzny $OYZ$ jako zbiór

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in D_{yz}, \varphi_2(y, z) \leqslant x \leqslant \psi_2(y, z)\},$$

gdzie $\varphi_2(y, z) < \psi_2(y, z)$ dla wszystkich $(y, z)$ należących do wnętrza obszaru $D_{yz}$, oraz ***obszar normalny*** względem płaszczyzny $OXZ$ jako zbiór

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in D_{xz}, \varphi_3(x, z) \leqslant y \leqslant \psi_3(x, z)\},$$

gdzie $\varphi_3(x, z) < \psi_3(x, z)$ dla wszystkich $(x, z)$ należących do wnętrza obszaru $D_{xz}$.

**Przykład 2.12.** Kula domknięta i ostrosłup wraz z ograniczającą go powierzchnią są przykładami obszarów normalnych względem każdej z płaszczyzn układu $OXYZ$. □

**Twierdzenie 2.13.** *Niech $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_{xy}, \varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \psi_1(x, y)\}$ będzie obszarem normalnym względem płaszczyzny $OXY$ i niech $f$ będzie funkcją ciągłą w obszarze $A$. Wówczas*

$$\int\!\!\int\limits_A\!\!\int f(x, y, z) dV = \int\!\!\int\limits_{D_{xy}} \Big( \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x, y, z) dz \Big) dx dy.$$

Prawdziwe są także analogiczne wzory z całkami iterowanymi po obszarach normalnych względem pozostałych płaszczyzn układu.

**Przykład 2.14.** Obszar $V$ ograniczony płaszczyznami: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ oraz $2x+y+z = 2$ jest obszarem normalnym względem wszystkich płaszczyzn układu współrzędnych. Traktując go jako obszar normalny względem płaszczyzny $OXY$ możemy $V$ opisać następująco

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in D_{xy}, 0 \leqslant z \leqslant -2x - y + 2\},$$

gdzie obszar $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2 - 2x\}$ jest normalny względem osi $OX$.

Stąd całka potrójna z funkcji $f(x, y, z) = x^2 + 6yz$ na obszarze $V$ wynosi

$$\iiint\limits_V (x^2 + 6yz) dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_0^{2-2x-y} (x^2 + 6yz)dz =$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-2x} dy \int\limits_0^{2-2x-y} (x^2 + 6yz)dz = \frac{13}{15}.$$

□

**Przykład 2.15.** Jeżeli $f(x, y, z) = 1$ w obszarze normalnym $A \subset \mathbb{R}^3$, to całka potrójna

$$\iiint\limits_A 1dxdydz$$

przedstawia objętość obszaru $A$. □

**Definicja 2.16.** *Sumę skończonej liczby obszarów normalnych (względem przynajmniej jednej z płaszczyzn układu współrzędnych) o parami rozłącznych wnętrzach nazywamy* ***obszarem regularnym*** *w przestrzeni.*

**Twierdzenie 2.17.** *Niech obszar $A$ regularny w przestrzeni będzie sumą obszarów normalnych $A_1, A_2, \ldots, A_m$ o parami rozłącznych wnętrzach i niech funkcja $f$ będzie całkowalna w tym obszarze. Wówczas funkcja $f$ jest także całkowalna w każdym obszarze normalnym $A_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ oraz*

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)dV = \iiint\limits_{A_1} f(x, y, z)dV + \ldots + \iiint\limits_{A_m} f(x, y, z)dV.$$

Całki potrójne po obszarach regularnych mają te same własności co całki potrójne po prostopadłościanie.

## 2.3 Zamiana zmiennych w całce potrójnej.

**Twierdzenie 2.18.** (O zamianie zmiennych w całce potrójnej.)
*Niech funkcja $f$ będzie określona, ciągła i ograniczona w pewnym obszarze regularnym $U \subset \mathbb{R}^3$ i niech przekształcenie*

$$\Phi : \Omega \to U, \quad (u, v, w) \mapsto (x = \varphi_1(u, v, w), y = \varphi_2(u, v, w), z = \varphi_3(u, v, w))$$

*odwzorowuje różnowartościowo wnętrze obszaru regularnego $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ na wnętrze obszaru regularnego $U$. Załóżmy ponadto, że funkcje $\varphi_1$, $\varphi_2$ i $\varphi_3$ są klasy $C^1$ na pewnym zbiorze otwartym zawierającym obszar $\Omega$ oraz jakobian $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ jest różny od zera wewnątrz obszaru $\Omega$.*

*Wówczas zachodzi następujący wzór:*

$$\int\int_U\int f(x, y, z) dxdydz =$$

$$\int\int_\Omega\int f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dudvdw.$$

**Przykład 2.19.** (Przesunięcie równoległe.)
Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$. Przekształcenie

$$(u, v, w) \mapsto (x = u + a, y = v + b, z = w + c)$$

odwzorowuje różnowartościowo obszar $\Omega = \mathbb{R}^3$ na obszar $U = \mathbb{R}^3$. Ponadto

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Stąd

$$\int\int_U\int f(x, y, z) dxdydz = \int\int_\Omega\int f(u + a, v + b, w + c) dudvdw.$$

□

**Przykład 2.20.** (Przekształcenie podobieństwa.)
Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ oraz $abc \neq 0$. Przekształcenie

$$(u, v, w) \mapsto (x = au, y = bv, z = cw)$$

odwzorowuje różnowartościowo obszar $\Omega = \mathbb{R}^3$ na obszar $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$.
Ponadto

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc.$$

Stąd

$$\int\int_U\int f(x, y, z)dxdydz = \int\int_\Omega\int f(au, bv, cw)\,|abc|\,dudvdw.$$

□

**Przykład 2.21.** Niech $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Bryła ograniczona powierzchnią o równaniu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ opisana jest jako obszar $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\}$.
Zgodnie z interpretacją geometryczną objętość tej bryły wynosi

$$\int\int_V\int 1dxdydz.$$

Przekształcenie podobieństwa

$$(u, v, w) \mapsto (x = au, y = bv, z = cw)$$

odwzorowuje wzajemnie jednoznacznie wnętrze kuli $U = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | u^2 + v^2 + w^2 < 1\}$ na wnętrze rozpatrywanej bryły $V$. Stąd

$$\int\int_V\int 1dxdydz = \int\int_U\int abcdudvdw = \frac{4}{3}abc\pi.$$

□

**Przykład 2.22.** (Przekształcenie walcowe.)
Położenie punktu $\overline{p}$ w przestrzeni można opisać trójką liczb $(\varphi, r, z)$, gdzie $\varphi$ oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu $\overline{p}$ na

płaszczyznę $OXY$ a dodatnią częścią osi $OX$, $r$ oznacza odległość rzutu punktu $\overline{p}$ na płaszczyznę $OXY$ od początku układu współrzędnych oraz $z$ oznacza odległość punktu $\overline{p}$ od płaszczyzny $OXY$. Trójkę liczb $(\varphi, r, z)$ nazywamy *współrzędnymi walcowymi* punktu przestrzeni.

Przekształcenie

$$(\varphi, r, z) \mapsto (x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z)$$

nazywamy *przekształceniem walcowym.* Ponadto

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,r,z)} = det \begin{bmatrix} -r\sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -r.$$

□

**Przykład 2.23.** Obszar $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$ we współrzędnych walcowych określony jest jako obszar $\Omega = \{(\varphi, r, z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, 0 \leqslant r \leqslant 1, r \leqslant z \leqslant 1\}$. Stąd

$$\int\int_U\int (x^2+y^2)dxdydz = \int\int_\Omega\int (r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,r,z)}\right| d\varphi dr dz =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_r^1 r^3 dz = \frac{\pi}{10}.$$

□

**Przykład 2.24.** (Przekształcenie sferyczne.)
Położenie punktu $\overline{p}$ w przestrzeni można opisać trójką liczb $(\varphi, \psi, r)$, gdzie $\varphi$ oznacza miarę kąta między rzutem promienia wodzącego punktu $\overline{p}$ na płaszczyznę $OXY$ a dodatnią częścią osi $OX$, $\psi$ oznacza miarę kąta między promieniem wodzącym punktu $\overline{p}$ a płaszczyzną $OXY$ oraz $r$ oznacza odległość punktu $\overline{p}$ od początku układu współrzędnych. Trójkę liczb $(\varphi, \psi, r)$ nazywamy *współrzędnymi sferycznymi* punktu przestrzeni.

Przekształcenie

$$(\varphi, \psi, r) \mapsto (x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi)$$

nazywamy *przekształceniem sferycznym*. Ponadto

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\psi,r)}\right| = \left| det \begin{bmatrix} -r\sin\varphi\cos\psi & r\cos\varphi\cos\psi & 0 \\ -r\cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\psi \\ \cos\varphi\cos\psi & \sin\varphi\cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix} \right| = r^2\cos\psi.$$

□

**Przykład 2.25.** Obszar $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, 0 \leqslant z\}$ we współrzędnych sferycznych określony jest jako obszar $\Omega = \{(\varphi,\psi,r) \in \mathbb{R}^3 | 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}\}$. Stąd

$$\int\int_U\int (x+2z)dxdydz = \int\int_\Omega\int (r\cos\varphi\cos\psi + 2r\sin\psi)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varphi,\psi,r)}\right| d\varphi d\psi dr =$$

$$\int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\varphi\cos\psi + 2r\sin\psi) r^2 \cos\psi d\psi = \frac{3}{16}\pi.$$

□

# 3 Całka krzywoliniowa

## 3.1 Całka krzywoliniowa niezorientowana

Niech $K = \{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in [\alpha,\beta]\}$ będzie łukiem gładkim na płaszczyźnie i niech będzie określona funkcja $f : K \to \mathbb{R}$. Podzielmy przedział $[\alpha,\beta]$ punktami $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ na $n$ łuków częściowych $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Oznaczmy długości tych łuków odpowiednio przez $\Delta k_1, \Delta k_2, \ldots, \Delta k_n$ i niech $\delta_n := \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta k_i$. Z każdego z łuków częściowych $k_i$, $i = 1, \ldots, n$, wybierzmy dowolny punkt $\overline{p}_i$ i utwórzmy następującą sumę

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} f(\overline{p}_i)\Delta k_i.$$

**Definicja 3.1.** *Jeżeli istnieje granica skończona* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ *ciągu sum* $(S_n)$*, gdy* $\delta_n \to 0$ *i jeżeli granica ta nie zależy od wyboru punktów podziału* $t_i$ *oraz wyboru punktów* $\overline{p}_i$ *na łukach częściowych, to granicę tę nazywamy* ***całką***

***krzywoliniową niezorientowaną*** *funkcji $f(x,y)$ po krzywej $K$ i oznaczamy symbolem*

$$\int_K f(x,y)ds.$$

**Przykład 3.2.** Jeżeli $f(x,y) = 1$ dla każdego punktu $(x,y) \in K$, to całka $\int_K f(x,y)ds$ równa jest długości łuku krzywej $K$. □

**Przykład 3.3.** Jeżeli $f(x,y) \geqslant 0$ dla każdego punktu $(x,y) \in K$, to całka $\int_K f(x,y)ds$ równa jest polu części walcowej, której kierownicą jest $K$ a tworzące są równoległe do osi $OZ$. □

**Twierdzenie 3.4.** *Jeżeli istnieją całki krzywoliniowe z funkcji $f(x,y)$ i $g(x,y)$ po krzywej $K$ to dla dowolnych $a,b \in \mathbb{R}$*

$$\int_K (af(x,y) + bg(x,y))ds = a\int_K f(x,y)ds + b\int_K g(x,y)ds.$$

**Twierdzenie 3.5.** *Jeżeli punkt $\overline{p}$ dzieli krzywą $K$ na dwie krzywe $K_1$ i $K_2$ to*

$$\int_K f(x,y)ds = \int_{K_1} f(x,y)ds + \int_{K_2} f(x,y)ds.$$

Całkę krzywoliniową niezorientowaną można wyrazić przez całkę oznaczoną.

**Twierdzenie 3.6.** *Jeżeli funkcja $f(x,y)$ jest ciągła na łuku gładkim $K = \{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in [\alpha,\beta]\}$, to całka krzywoliniowa niezorientowana $\int_K f(x,y)ds$ istnieje i równa jest całce oznaczonej*

$$\int_K f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(x_1(t), x_2(t))\sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2}dt.$$

**Przykład 3.7.** Jeżeli $K = \{(t, y(t)) \mid t \in [\alpha,\beta]\}$ oraz funkcja $y(t)$ ma ciągłą pochodną na przedziale $[\alpha,\beta]$, to

$$\int_K f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f(t,y(t))\sqrt{(1 + (y'(t))^2}dt.$$

□

**Przykład 3.8.** Niech $K = \{(r\cos t, r\sin t) \mid t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ będzie łukiem okręgu. Wówczas

$$\int\limits_K xyds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos t \sin t dt = \frac{r^3}{2}.$$

$\square$

Całkę krzywoliniową niezorientowaną funkcji $f(x, y, z)$ po krzywej $K = \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ w przestrzeni definiujemy analogicznie jak w przypadku całki na płaszczyźnie i oznaczamy $\int\limits_K f(x, y, z)ds$. Twierdzenia dotyczące własności całki krzywoliniowej niezorientowanej na płaszczyźnie pozostają prawdziwe dla całki w przestrzeni. W szczególności zachodzi twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej niezorientowanej na całkę oznaczoną.

**Twierdzenie 3.9.** *Jeżeli funkcja $f(x, y, z)$ jest ciągła na łuku gładkim $K = \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$, to całka krzywoliniowa niezorientowana $\int\limits_K f(x, y, z)ds$ istnieje i równa jest całce oznaczonej*

$$\int\limits_K f(x, y, z)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x_1(t), x_2(t), x_3(t))\sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + (x_3'(t))^2}dt.$$

**Przykład 3.10.** Niech $K = \{(a\cos t, a\sin t, bt) \mid t \in [0, 2\pi]\}$. Całka krzywoliniowa niezorientowana z funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ po krzywej $K$ równa jest

$$\int\limits_K (x^2 + y^2 + z^2)ds = \int\limits_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)\sqrt{a^2 + b^2}dt =$$

$$\sqrt{a^2 + b^2}(2a^2 + \frac{8}{3}b^2\pi^2)\pi.$$

$\square$

## 3.2 Całka krzywoliniowa zorientowana

Każdemu łukowi $K = \{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ na płaszczyźnie można nadać kierunek, przyjmując punkt $A = (x_1(\alpha), x_2(\alpha))$ za początek łuku a punkt $\overline{B} = (x_1(\beta), x_2(\beta))$ za koniec lub na odwrót, punkt $\overline{B} = (x_1(\beta), x_2(\beta))$ za początek łuku a punkt $\overline{A} = (x_1(\alpha), x_2(\alpha))$ za jego koniec. Te dwie orientacje krzywej nazywamy przeciwnymi. W pierwszym przypadku kierunek łuku jest zgodny z kierunkiem wzrostu parametru $t$. Mówimy wówczas, że przedstawienie parametryczne łuku i nadany mu kierunek są zgodne. W drugim przypadku kierunek łuku jest niezgodny z kierunkiem wzrostu parametru $t$. Mówimy wówczas, że przedstawienie parametryczne łuku i nadany mu kierunek są niezgodne.

Niech parametrom $t_1$ i $t_2$ odpowiadają punkty $\overline{A}_1 = (x_1(t_1), x_2(t_1))$ i $\overline{A}_2 = (x_1(t_2), x_2(t_2))$ łuku $K$. Jeżeli kierunek łuku jest zgodny z kierunkiem wzrostu parametru to dla $t_1 < t_2$ punkt $\overline{A}_1$ poprzedza punkt $\overline{A}_2$. W przeciwnym przypadku punkt $\overline{A}_2$ poprzedza punkt $\overline{A}_1$.

Jeżeli przedstawienie parametryczne $\{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ łuku jest niezgodne z nadanym mu kierunkiem, to przedstawienie parametryczne $\{(x_1(-t), x_2(-t)) \mid t \in [-\beta, -\alpha]\}$ będzie już z tym kierunkiem zgodne.

**Definicja 3.11.** *Łuk, któremu nadano kierunek, nazywamy **łukiem skierowanym** (lub zorientowanym).*

Łuk skierowany od punktu $\overline{A}$ do punktu $\overline{B}$ oznaczamy $\breve{AB}$. Aby podkreślić, że łuki $\breve{AB}$ i $\breve{BA}$ różnią się tylko kierunkiem piszemy $\breve{AB} = -\breve{BA}$.

Niech dana będzie krzywa zorientowana płaska $K = \{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ i niech na krzywej $K$ będą określone dwie funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$. Podzielmy przedział $[\alpha, \beta]$ punktami $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ na $n$ części. Wybierzmy z każdego przedziału punkt $t_{\theta_i} \in [t_{i-1}, t_i]$. Niech $\overline{p}_i = (x_1(t_{\theta_i}), x_2(t_{\theta_i}))$ i $d_n$ będzie długością najdłuższego z przedziałów $[t_{i-1}, t_i]$. Utwórzmy sumę

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} P(\overline{p}_i)(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})) + Q(\overline{p}_i)(x_2(t_i) - x_2(t_{i-1})).$$

**Definicja 3.12.** *Jeżeli istnieje granica skończona $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ciągu sum $(S_n)$ przy $d_n \to \infty$ i jeżeli granica ta nie zależy od wyboru punktów $t_i$ oraz $\overline{p}_i$ to granicę tę nazywamy **całką krzywoliniową skierowaną** pary funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ po drodze $K$ i oznaczamy*

$$\int_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Analogicznie mając krzywą przestrzenną $K = \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ i trzy funkcje $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ definiujemy całkę krzywoliniową zorientowaną trójki funkcji po krzywej $K$

$$\int\limits_K P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

**Przykład 3.13.** Jeżeli punkt materialny o masie 1 porusza się po krzywej $K$ pod wpływem siły $F$ o składowych $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ (np. w polu grawitacyjnym lub elektrostatycznym) to pracę wykonywaną przez tę siłę wzdłuż drogi $K$ wyraża całka $\int\limits_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. □

**Twierdzenie 3.14.** *Jeżeli istnieje całka krzywoliniowa skierowana z funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ po krzywej $K$, to istnieje też całka po krzywej $-K$, przy czym*

$$\int\limits_{-K} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = -\int\limits_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

**Twierdzenie 3.15.** *Jeżeli krzywą $K$ podzielimy na dwa łuki $K_1$ i $K_2$, to całka krzywoliniowa skierowana z funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ po krzywej $K$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją całki po krzywych $K_1$ i $K_2$ oraz*

$$\int\limits_K P(x, y)dx+Q(x, y)dy = \int\limits_{K_1} P(x, y)dx+Q(x, y)dy+\int\limits_{K_2} P(x, y)dx+Q(x, y)dy.$$

**Twierdzenie 3.16.** *Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są ciągłe na zorientowanym łuku gładkim $K = \{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$, przy czym orientacja jest zgodna z kierunkiem wzrostającego parametru (tzn. jest zgodna z kierunkiem tego łuku) to całka krzywoliniowa skierowana z funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ po krzywej $K$ istnieje oraz*

$$\int\limits_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_\alpha^\beta (P(x_1(t), x_2(t))x_1'(t) + Q(x_1(t), x_2(t))x_2'(t))dt.$$

**Przykład 3.17.** Jeżeli $K = \{(t, y(t)) \mid t \in [\alpha, \beta]\}$ to

$$\int\limits_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int\limits_\alpha^\beta (P(t, y(t)) + Q(t, y(t))y'(t))dt.$$

□

Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciągłe na krzywej kawałkami gładkiej, to całka $\int\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ również istnieje i równa jest sumie całek na poszczególnych łukach gładkich krzywej.

**Przykład 3.18.** Niech $K = \{(t,t^2) \mid t \in [-1,1]\}$ będzie łukiem paraboli od punktu $\overline{A} = (-1,1)$ do punktu $\overline{B} = (1,1)$. Całka krzywoliniowa zorientowana z funkcji $P(x,y) = y^2 + 2xy$ i $Q(x,y) = x^2 - 2xy$ na krzywej $K$ wynosi

$$\int\limits_K (y^2 + 2xy)dx + (x^2 - 2xy)dy = \int\limits_{-1}^{1} ((t^4 + 2t^3) + (t^2 - 2t^3)2t)dt = -\frac{6}{5}.$$

□

W przypadku trójwymiarowym całkę krzywoliniową zorientowaną z funkcji $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ na łuku gładkim $K = \{(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \mid t \in [\alpha,\beta]\}$ zorientowanym zgodnie z kierunkiem wzrastającego parametru możemy zamienić na całkę oznaczoną według następującego wzoru

$$\int\limits_K P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} (P(x_1(t), x_2(t), x_3(t))x_1'(t) + Q(x_1(t), x_2(t), x_3(t))x_2'(t) + R(x_1(t), x_2(t), x_3(t))x_3'(t))dt.$$

**Przykład 3.19.** Praca wykonana przez siłę $F = [x^2, y^2, z^2]$ wzdłuż drogi $K = \{(r\cos t, r\sin t, bt) \mid t \in [0,2\pi]\}$ równa jest

$$\int\limits_K x^2dx + y^2dy + z^2dz = \int\limits_0^{2\pi} ((r^2\cos^2 t(-r\sin t) + r^2\sin^2 t r\cos t + b^2t^2b)dt = \frac{8}{3}b^3\pi^3.$$

□

Niech $D$ będzie obszarem płaskim ograniczonym krzywą Jordana $K$. Powiemy, że krzywa Jordana $K$ będąca brzegiem obszaru $D$ jest zorientowana dodatnio względem tego obszaru, jeśli w czasie obiegu po krzywej $K$ w danym kierunku mamy obszar $D$ po lewej stronie.

Całkę krzywoliniową zorientowaną po krzywej zamkniętej płaskiej można w pewnych sytuacjach zamienić na całkę podwójną.

**Twierdzenie 3.20.** (Twierdzenie Green'a[1])
*Jeżeli funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ są ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ na obszarze domkniętym $D$ normalnym względem obu osi układu współrzędnych oraz brzeg $K$ obszaru $D$ jest krzywą Jordana zorientowaną dodatnio względem $D$, to prawdziwy jest następujący wzór Green'a:*

$$\int\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

Twierdzenie Green'a pozostaje prawdziwe dla obszarów jednospójnych i wielospójnych dających się podzielić łukami na skończoną ilość obszarów normalnych względem obu osi.

**Przykład 3.21.** Niech $K$ będzie brzegiem prostokąta $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ zorientowanym dodatnio i niech $P(x,y) = y(x^2+1)$ oraz $Q(x,y) = x(y^2-1)$. Stosując twierdzenie Green'a całka krzywoliniowa zorientowana $\int\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ wynosi

$$\int\limits_K y(x^2+1)dx + x(y^2-1)dy = \int\int\limits_D (y^2 - x^2 - 2)dxdy = -2.$$

□

**Przykład 3.22.** Niech $K$ będzie okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - 2x = 0$ zorientowanym dodatnio i niech $P(x,y) = y^2 + 2x$ oraz $Q(x,y) = x^2 + 2y$. Stosując twierdzenie Green'a całka krzywoliniowa zorientowana $\int\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ wynosi

$$\int\limits_K y^2 + 2xdx + x^2 + 2ydy = \int\int\limits_D 2(x-y)dxdy = 2\pi,$$

gdzie $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0\}$. □

**Przykład 3.23.** Niech $K$ będzie dodatnio zorientowanym brzegiem obszaru ograniczonego $D$. Wówczas całka krzywoliniowa zorientowana po tej krzywej

[1] George Green (1793-1841) - matematyk i fizyk angielski

z funkcji $P(x,y) = -\frac{1}{2}y$ i $Q(x,y) = \frac{1}{2}x$ określa pole obszaru $D$, gdyż $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ oraz

$$\mid D \mid = \int\int_D 1 dxdy = \int\int_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}) dxdy = \frac{1}{2}\int_K xdy - ydx.$$

□

**Przykład 3.24.** Pole obszaru $D$ ograniczonego elipsą $K = \{(a\cos t, b\sin t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$ wynosi

$$\mid D \mid = \frac{1}{2}\int_K -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\sin^2 t + ab\cos^2 t)dt = \pi ab.$$

□

## 3.3 Niezależność całki krzywoliniowej od drogi całkowania

Niech $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ będą funkcjami ciągłymi wraz z pochodnymi cząstkowymi $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ w obszarze płaskim jednospójnym $D$. Niech $K$ będzie krzywą gładką o początku w punkcie $\overline{A}$ i końcu w punkcie $\overline{B}$, zawartą w obszarze $D$. Całka krzywoliniowa zorientowana $\int_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ zależy na ogół od wyboru krzywej $K$.

**Przykład 3.25.** Niech $K = \{(a\cos t, b\sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$, dla $a \neq b$, będzie półelipsą o początku w punkcie $\overline{A} = (a, 0)$ i końcu w punkcie $\overline{B} = (-a, 0)$. Wówczas

$$\int_K (x - y)dx + (x + y)dy = ab\pi.$$

Jeżeli natomiast $K = \{(a\cos t, a\sin t) \mid t \in [0, \pi]\}$ będzie półokręgiem o początku w punkcie $\overline{A} = (a, 0)$ i końcu w punkcie $\overline{B} = (-a, 0)$ to

$$\int_K (x - y)dx + (x + y)dy = a^2\pi.$$

□

Całkę krzywoliniową zorientowaną $\int\limits_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ nazywać będziemy ***niezależną od drogi całkowania*** w obszarze jednospójnym $D$, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów $\overline{A}, \overline{B} \in D$ wartość tej całki na każdej krzywej gładkiej $K \subset D$ o początku w punkcie $\overline{A}$ i końcu w punkcie $\overline{B}$ jest taka sama. Ponieważ w tym przypadku wartość całki nie zależy od wyboru krzywej $K$, lecz tylko od początku $\overline{A}$ i końca $\overline{B}$, całkę krzywoliniową zorientowaną oznaczamy symbolem

$$\int\limits_{\overline{A}}^{\overline{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

**Twierdzenie 3.26.** *Niech $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ będą funkcjami ciągłymi wraz z pochodnymi cząstkowymi $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ w obszarze płaskim jednospójnym $D$ i niech $\overline{A}, \overline{B} \in D$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby całka krzywoliniowa zorientowana $\int\limits_{\overline{A}}^{\overline{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ nie zależała od drogi całkowania jest, by dla każdego $(x,y) \in D$ spełniony był warunek*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Zatem na mocy twierdzenia Green'a całka krzywoliniowa zorientowana $\int\limits_{\overline{A}}^{\overline{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ nie zależy od drogi całkowania wtedy i tylko wtedy, gdy całka po każdej krzywej gładkiej zamkniętej zawartej w obszarze $D$ jest równa 0.

Niech funkcje $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ spełniają w obszarze płaskim jednospójnym $D$ założenia twierdzenia 3.26. Funkcję $F(x,y)$ taką, że dla każdego $(x,y) \in D$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \ \text{ oraz } \ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

nazywamy ***funkcją pierwotną*** pary uporządkowanej funkcji $P(x,y)$ i $Q(x,y)$.

**Twierdzenie 3.27.** *Niech $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ będą funkcjami ciągłymi wraz z pochodnymi cząstkowymi $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ w płaskim obszarze jednospójnym $D$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcja $F(x,y)$ była funkcją* *pierwotną funkcji $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ jest, by dla każdego $(x,y) \in D$ spełniony był warunek*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Zatem warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby całka krzywoliniowa skierowana $\int_{\overline{A}}^{\overline{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ nie zależała od drogi całkowania w obszarze $D$, jest by istniała funkcja pierwotna funkcji $P(x,y)$ i $Q(x,y)$. Wartość całki jest wówczas określona wzorem

$$\int_{\overline{A}}^{\overline{B}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = F(\overline{B}) - F(\overline{A}).$$

Jeżeli $F(x,y)$ jest funkcją pierwotną pary funkcji $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ to jest nią też funkcja $F(x,y)+c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest stałą. Ponadto, dwie funkcje pierwotne $F(x,y)$ i $G(x,y)$ tej samej pary $P(x,y)$ i $Q(x,y)$ różnią się co najwyżej o stałą, tzn. $G(x,y) = F(x,y) + c$.

**Przykład 3.28.** Niech $P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ i $Q(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ dla $x^2+y^2 > 0$. Ponieważ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, zatem całka krzywoliniowa zorientowana $\int_{(1,0)}^{(2,1)} \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ wzdłuż dowolnej krzywej przebiegającej w górnej półpłaszczyźnie $y > 0$ nie zależy od drogi całkowania.

Wyrażenie podcałkowe $\frac{x}{x^2+y^2}dx + \frac{y}{x^2+y^2}dy$ jest różniczką zupełną funkcji $F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c$, gdzie $c$ jest dowolną stałą. Stąd

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)} \frac{xdz + ydy}{x^2+y^2} = F(2,1) - F(1,0) = \frac{1}{2}\ln 5.$$

□

Niech funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ będą ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi w obszarze przestrzennym $V$ powierzchniowo jednospójnym. Funkcję $F(x,y,z)$ taką, że dla każdego $(x,y,z) \in V$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y,z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y,z), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R(x,y,z)$$

nazywamy ***funkcją pierwotną*** trójki uporządkowanej funkcji $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$.

**Twierdzenie 3.29.** *Niech funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y)$ i $R(x,y,z)$ będą ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi w obszarze przestrzennym $V$ powierzchniowo jednospójnym. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby całka krzywoliniowa skierowana $\int_{\overline{A}}^{\overline{B}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ nie zależała od drogi całkowania w obszarze $V$, jest by istniała funkcja pierwotna funkcji $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$, tzn. by dla każdego $(x,y,z) \in V$ spełnione były warunki:*

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

*Wartość całki jest wówczas określona wzorem*

$$\int_{\overline{A}}^{\overline{B}} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = F(\overline{B}) - F(\overline{A}).$$

**Przykład 3.30.** Niech $P(x,y,z) = 2x - yz$, $Q(x,y,z) = 2y - xz$ i $R(x,y,z) = 2z - xy$. Ponieważ $\frac{\partial R}{\partial y} = -x = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = -y = \frac{\partial R}{\partial x}$ oraz $\frac{\partial Q}{\partial x} = -z = \frac{\partial P}{\partial y}$, zatem całka krzywoliniowa zorientowana $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} (2x-yz)dx + (2y-xz)dy + (2z-xy)dz$ nie zależy od drogi całkowania.

Wyrażenie podcałkowe $(2x - yz)dx + (2y - xz)dy + (2z - xy)dz$ jest różniczką zupełną funkcji $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz + c$, gdzie $c$ jest dowolną stałą. Stąd

$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} (2x - yz)dx + (2y - xz)dy + (2z - xy)dz = F(1,2,3) - F(0,0,0) = 8.$$

□

# 4 Całka powierzchniowa.

## 4.1 Całka powierzchniowa niezorientowana.

**Definicja 4.1.** *Niech $D$ będzie obszarem płaskim regularnym ograniczonym jedną krzywą $K$ zamkniętą, kawałkami gładką i niech $f(x,y)$ będzie funkcją* *określoną i ciągłą w zbiorze $D \cup K$, mającą w obszarze $D$ ciągłe i ograniczone pochodne cząstkowe.* ***Gładkim płatem powierzchniowym*** *(względem płaszczyzny $OXY$) nazywamy powierzchnię $S$ o równaniu:*

$$z = f(x,y), \quad (x,y) \in D.$$

W analogiczny sposób określamy gładki płat powierzchniowy względem płaszczyzny $OXZ$ i $OYZ$.
Powierzchnia $S$ ma w każdym swym punkcie płaszczyznę styczną.

**Przykład 4.2.** Wykres funkcji $z = 2x - y + 2$ rozważanej w obszarze $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ jest gładkim płatem powierzchniowym. $\square$

Niech $F(x,y,z)$ będzie funkcją określoną w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na gładkim płacie powierzchniowym $S$ o równaniu $z = f(x,y)$, gdzie $(x,y) \in D$. Podzielmy obszar $D$ na $n$ obszarów regularnych $D_1, D_2, \ldots, D_n$ o rozłącznych wnętrzach i oznaczmy przez $S_1, S_2, \ldots, S_n$ części płata $S$ odpowiadające podziałowi, o polach równych odpowiednio $\Delta S_i$. Z każdego płata $S_i$ wybierzmy punkt $\overline{p}_i$ i utwórzmy sumę:

$$\mathcal{S}_n := \sum_{i=1}^{n} F(\overline{p}_i)\Delta S_i.$$

**Definicja 4.3.** *Jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{S}_n$, przy założeniu, że największa średnica obszarów częściowych $D_i$ maleje do zera i granica ta nie zależy od podziałów obszaru $D$ ani od wyboru punktów $\overline{p}_i$, to granicę tę nazywamy* ***całką powierzchniową niezorientowaną*** *funkcji $F(x,y,z)$ po płacie $S$ i oznaczamy*

$$\int\!\!\int_S F(x,y,z)ds.$$

W analogiczny sposób możemy określić całkę powierzchniową niezorientowaną, gdy $S$ jest gładkim płatem powierzchniowym względem płaszczyzny $OXZ$ lub $OYZ$.

Jeżeli $S$ jest powierzchnią dowolną, dającą się podzielić na skończoną ilość płatów gładkich, to nazywamy ją ***powierzchnią kawałkami gładką*** i całka $\int\!\!\int_S F(x,y,z)ds$ jest wówczas sumą całek po poszczególnych płatach.
Podstawowe własności całki powierzchniowej niezorientowanej są takie same jak dla innych całek.

**Przykład 4.4.** Niech w każdym punkcie powierzchni $S$ funkcja $F(x, y, z) = 1$. Całka powierzchniowa niezorientowana po płacie $S$ określa pole powierzchni $S$,

$$\int\!\!\int_S ds = \mid S \mid .$$

□

**Twierdzenie 4.5.** (O zamianie całki powierzchniowej niezorientowanej na całkę podwójna)
*Jeżeli funkcja $F(x, y, z)$ jest ciągła na gładkim płacie powierzchniowym $S$ o równaniu $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, to całka powierzchniowa $\int\!\int_S F(x, y, z)ds$ istnieje i wyraża się wzorem:*

$$\int\!\!\int_S F(x, y, z)ds = \int\!\!\int_D F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y))^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}(x, y))^2}dxdy.$$

W szczególności, dla $F(x, y, z) = 1$,

$$\mid S \mid = \int\!\!\int_S ds = \int\!\!\int_D \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y))^2 + (\frac{\partial f}{\partial y}(x, y))^2}dxdy.$$

**Przykład 4.6.** Niech $S$ będzie powierzchnią o równaniu $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, której rzutem na płaszczyznę $OXY$ jest koło $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2-2x \leqslant 0\}$. Wówczas

$$\int\!\!\int_S (xy + yz + xz)ds = \int\!\!\int_D (xy + y\sqrt{x^2 + y^2} + x\sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{2}dxdy = \frac{32}{3}\sqrt{2}.$$

□

## 4.2 Całka powierzchniowa zorientowana.

Rozważmy gładki płat powierzchniowy $S$ o równaniu $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. Jest to powierzchnia dwustronna. Jeżeli wyróżnimy na tej powierzchni stronę dodatnią i stronę ujemną to płat $S$ nazwiemy ***płatem zorientowanym***. Wówczas $-S$ oznaczać będzie płat różniący się od $S$ tylko orientacją.

Niech na zorientowanym płacie $S$ określone będą trzy funkcje ciągłe $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$. Niech $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ będą kątami, które oś normalna $n$ do powierzchni $S$, o zwrocie od strony ujemnej płata do jego strony dodatniej, tworzy z osiami $OX$, $OY$ i $OZ$ układu współrzędnych.

**Definicja 4.7.** *Całkę (o ile istnieje)*

$$\iint_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)ds$$

*nazywamy całką powierzchniową zorientowaną i oznaczamy*

$$\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \tag{4.1}$$

Analogicznie określamy całkę powierzchniową zorientowaną po gładkim płacie powierzchniowym względem płaszczyzny $OXZ$ lub $OYZ$.

Jeżeli zmienimy stronę dodatnią płata $S$ na ujemną, to funkcje $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ zmienią znaki i całka 4.1 zmieni znak. Stąd

$$\iint_{-S} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$-\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

**Przykład 4.8.** Niech $S$ będzie gładkim płatem powierzchniowym i niech funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ będą składowymi wektora prędkości cieczy przepływającej przez powierzchnię $S$. Wówczas całka $\iint_S P(x,y,z)dydz+ Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$ przedstawia objętość cieczy, jaka przepływa w jednostce czasu przez powierzchnię $S$ ze strony ujemnej na dodatnią. □

W przypadku dowolnej powierzchni kawałkami gładkiej definicja komplikuje się, ponieważ nie każdą taką powierzchnię można zorientować. Jest tak np. gdy powierzchnia $S$ jest jednostronna (np. wstęga Möbiusa).

Jeżeli natomiast powierzchnia $S$ jest dwustronna, to orientując każdy z jej płatów określamy całkę powierzchniową zorientowaną po tej powierzchni jako sumę całek po wszystkich płatach.

**Twierdzenie 4.9.** (O zamianie całki powierzchniowej zorientowanej na całkę podwójna)
*Jeżeli funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ są ciągłe na zorientowanym gładkim płacie powierzchniowym $S$ o równaniu $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$,*

*to całka powierzchniowa zorientowana* $\int\int_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$ *istnieje i wyraża się wzorem:*

$$\int\int_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$= \varepsilon \int\int_D (-P(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - Q(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + R(x,y,f(x,y)))dxdy,$$

*gdzie* $\varepsilon = 1$*, gdy orientacja płata* $S$ *jest tak dobrana, że* $\cos\gamma > 0$ *oraz* $\varepsilon = -1$*, gdy orientacja płata* $S$ *jest tak dobrana, że* $\cos\gamma < 0$*.*

Analogicznie wzór jest prawdziwy dla całki powierzchniowej zorientowanej po gładkim płacie powierzchniowym względem płaszczyzny $OXZ$ lub $OYZ$.

**Przykład 4.10.** Niech $S$ będzie częścią płaszczyzny $2x + 3y + z - 6 = 0$, wyciętą płaszczyznami układu współrzędnych i tak zorientowaną, że $\cos\gamma < 0$. Równanie powierzchni $S$ jest postaci:

$$z = 6 - 2x - 3y, \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2 - \frac{2}{3}x\}.$$

Stąd

$$\int\int_S xydydz + yzdxdz + xzdxdy =$$

$$= -\int\int_D (2xy + 3y(6 - 2x - 3y) + x(6 - 2x - 3y))dxdy = -\frac{33}{2}.$$

$\square$

**Przykład 4.11.** Niech $S$ będzie górną półsferą $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$, zorientowaną tak, że $\cos\gamma < 0$. Równanie powierzchni $S$ jest postaci:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}.$$

Stąd

$$\int\int_S xz^2dxdy = \int\int_D x(R^2 - x^2 - y^2)dxdy = 0.$$

$\square$

**Twierdzenie 4.12.** (Gaussa-Ostrogradskiego)[2]
*Niech $V \subset \mathbb{R}^3$ będzie obszarem normalnym ze względu na wszystkie trzy płaszczyzny układu współrzędnych i niech brzeg $S$ tego obszaru będzie powierzchnią odcinkami gładką zorientowaną na zewnątrz obszaru $V$. Niech funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ będą ciągłe wraz z pochodnymi $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ i $\frac{\partial R}{\partial z}$ wewnątrz obszaru $V$ i na jego brzegu $S$. Wówczas:*

$$\int\int_V\int (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z})dxdydz = \tag{4.2}$$

$$\int\int_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy.$$

Wzór (4.3) pozostaje prawdziwy dla obszarów przestrzennych $V$ dających się podzielić na skończoną ilość obszarów normalnych.

**Przykład 4.13.** Niech $S$ będzie zewnętrzną stroną powierzchni sześcianu $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant a\}$. Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego

$$\int\int_S x^2dydz + y^2dxdz + z^2dxdy = \int\int_V\int 2(x+y+z)dxdydz =$$

$$2\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a (x+y+z)dz = \frac{3}{2}a^4.$$

□

**Przykład 4.14.** Niech $S$ będzie zewnętrzną stroną powierzchni stożka $V$ o równaniu $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 2$. Korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego

$$\int\int_S (x-z)dydz + (y-z)dxdz + (z-y)dxdy = 3\int\int_V\int dxdydz = 8\pi.$$

□

[2]Carl Gauss (1777-1855) - matematyk niemiecki
Michaił Ostrogradski (1801-1861) - matematyk rosyjski

**Twierdzenie 4.15.** (Stokesa)[3]
*Niech krzywa $K$ będzie brzegiem gładkiego płata powierzchniowego $S$ zorientowanego tak, aby orientacja powierzchni $S$ była zgodna z orientacją krzywej $K$ tzn. tak, że dodatni obieg na krzywej $K$ dookoła osi normalnej do powierzchni $S$ był równoskrętny z dodatnim obiegiem na płaszczyźnie $OXY$ dookoła osi $OZ$. Niech funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ będą ciągłe wraz z pochodnymi cząstkowymi w obszarze otaczającym powierzchnię $S$. Wtedy*

$$\int\limits_K P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\int\int\limits_S (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

**Przykład 4.16.** Niech $K$ będzie okręgiem o równaniach $x = r\cos t$, $y = \sin t$, $z = k$ dla $t \in [0, 2\pi]$, i orientacji zgodnej z kierunkiem wzrastającego parametru. Korzystając z twierdzenia Stokesa

$$\int\limits_K xzdx + y^2dy + zdz = \int\int\limits_S xdxdz,$$

gdzie $S$ oznacza dowolną powierzchnię gładką o równaniu $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, której brzegiem jest krzywa $K$, o orientacji tak dobranej, by $\cos\gamma > 0$. Możemy zatem przyjąć, że $S$ jest powierzchnią koła $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leqslant r^2, z = f(x,y) = k\}$. Wówczas

$$\int\int\limits_S xdxdz = \int\int\limits_D -x\frac{\partial f}{\partial y}dxdy = 0.$$

□

# 5 Podstawowe pojęcia pola wektorowego

**Definicja 5.1.** *Niech dane będą trzy funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ określone w obszarze przestrzennym $V \subset \mathbb{R}^3$. Jeżeli w obszarze $V$ określona jest funkcja przyporządkowująca każdemu punktowi $(x,y,z) \in V$ wektor $W(x,y,z) :=$*

[3]George Stokes (1819-1903) - irlandzki matematyk i fizyk

*$[P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)]$, to mówimy, że na obszarze $V$ określone jest* ***pole wektorowe W****. Obszar $V$ nazywamy obszarem istnienia pola a funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ składowymi pola $W(x,y,z)$.*

**Definicja 5.2.** *Pole wektorowe $W = [P, Q, R]$ nazywamy* ***ciągłym (różniczkowalnym, klasy*** *$C^k$) na obszarze $V$, jeżeli funkcje $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ i $R(x,y,z)$ są odpowiednio ciągłe (różniczkowalne, klasy $C^k$) w tym obszarze.*

**Definicja 5.3.** *Pole wektorowe nazywamy* ***jednostajnym****, jeżeli wszystkie wektory tego pola są równe tzn. mają ten sam zwrot, kierunek i długość.*

Niech na pewnym obszarze przestrzennym $V$ będzie określone ciągłe pole wektorowe $W = [P, Q, R]$. Niech $S$ oznacza zorientowany gładki płat powierzchniowy oraz $K$ zamkniętą krzywą gładką, zawarte w $V$.

**Definicja 5.4.** *Całkę powierzchniową zorientowaną $\int\int\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$ nazywamy* ***strumieniem pola*** *$W = [P, Q, R]$ przez powierzchnię $S$.*

**Definicja 5.5.** *Całkę krzywoliniową zorientowaną $\int\limits_K P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ nazywamy* ***cyrkulacją pola*** *$W = [P, Q, R]$ wzdłuż krzywej $K$.*

**Definicja 5.6.** *Niech w obszarze $V$ będzie określona funkcja różniczkowalna $F(x,y,z)$. Powiemy, że pole $W = [P, Q, R]$ jest* ***gradientem*** *funkcji $F(x,y,z)$, jeśli $W = [\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}]$, co zapisujemy*

$$W = gradF.$$

*Funkcję $F$ nazywamy* ***potencjałem*** *pola $W$.*

Nie każde pole wektorowe ma potencjał. Na mocy twierdzenia 3.29 warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia potencjału pola $W = [P, Q, R]$ jest, aby:

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

**Przykład 5.7.** Pole $W = [y^2, z^2, x^2]$ nie ma potencjału. □

Niech w obszarze $V$ będzie określone pole wektorowe $W = [P, Q, R]$ klasy $C^1$.

**Definicja 5.8.** ***Dywergencją*** *(wydajnością) pola wektorowego* $W = [P, Q, R]$ *nazywamy funkcję*

$$divW := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Pole, w którym $divW = 0$ nazywamy polem ***bezźródłowym***.

**Definicja 5.9.** ***Rotacją*** *(wirem) pola wektorowego* $W = [P, Q, R]$ *nazywamy wektor*

$$rotW := [\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}].$$

Pole, w którym $rotW = [0, 0, 0]$ nazywamy polem ***bezwirowym***.

**Przykład 5.10.** Obszarem istnienia pola wektorowego $W = [y^2, z^2, xy]$ jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

$$divW = 0 + 0 + 0 = 0,$$

czyli pole $W$ jest bezźródłowe.

$$rotW = [x - 2z, -y, -2y].$$

Pole $W$ nie ma potencjału, gdyż $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = y - 2z \neq 0$. □

**Wniosek 5.11.** *Pole wektorowe* $W$ *klasy* $C^1$ *ma potencjał* $F(x, y, z)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy jest polem bezwirowym.*

**Wniosek 5.12.** *W polu wektorowym* $W$ *klasy* $C^2$

$$divrotW = 0.$$

**Definicja 5.13.** *Operatorem wektorowym* ***nabla*** *nazywamy operator*

$$\nabla := (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}).$$

Operator nabla można stosować do każdej funkcji różniczkowalnej $F(x, y, z)$ zmiennych $x, y, z$. Wynik operacji jest wektorem $\nabla F = [\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}]$, czyli

$$gradF = \nabla F.$$

**Definicja 5.14.** ***Laplasjanem*** *nazywamy operator wektorowy*

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Laplasjan można stosować do każdej funkcji $F(x, y, z)$ dwukrotnie różniczkowalnej trzech zmiennych $x, y, z$. Wynik operacji jest funkcją tych zmiennych.

**Twierdzenie 5.15.** *Jeżeli pole wektorowe $W$ ma potencjał $F(x, y, z)$ w pewnym obszarze $V$, to*

$$div(gradF) = div(\nabla F) = \Delta F.$$

Przy odpowiednich założeniach znane już twierdzenia w interpretacji wektorowej orzekają, że:

(Tw. Gaussa-Ostrogradskiego) Całka potrójna z dywergencji pola wektorowego $W$ w obszarze $V$ o brzegu gładkim $S$ (przy czym pole jest klasy $C^1$ w obszarze $V \cup S$, a normalna do $S$ jest skierowana na zewnątrz $V$) równa się strumieniowi wektora pola $W$ przez brzeg obszaru $V$.

(Tw. Stokesa) Cyrkulacja wektora pola $W$ wzdłuż zamkniętej krzywej gładkiej $K$ równa się strumieniowi rotacji wektora $W$ przez zorientowaną powierzchnię $S$, której brzegiem jest krzywa $K$.

(Tw. o niezależności od drogi całkowania) Całka krzywoliniowa w polu wektorowym $W$ klasy $C^1$ nie zależy od drogi całkowania wtedy i tylko wtedy, gdy $rotW = [0, 0, 0]$.

# Literatura

[1] F. Leja, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa, 1979.

[2] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2*, GiS, Wrocław, 2005.

[3] I. Dziubiński, L. Siewierski, *Matematyka dla wyższych szkół technicznych*, tom 1, PWN, Warszawa, 1984.

[4] I. Dziubiński, L. Siewierski, *Matematyka dla wyższych szkół technicznych*, tom 2, PWN, Warszawa, 1985.