Funkcje zespolone.*

Agata Pilitowska

2007

1 Liczby zespolone

Definicja 1.1. ***Liczba zespolona*** *jest to para uporządkowana* (x, y) *liczb rzeczywistych* $x, y \in \mathbb{R}$.

Dwie liczby zespolone $z = (x, y)$ i $w = (u, v)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $x = u$ i $y = v$.
Działania arytmetyczne liczb zespolonych określamy w następujący sposób:

$$z + w := (x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

$$z - w := (x, y) - (u, v) := (x - u, y - v)$$

$$z \cdot w := (x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$$

$$\frac{z}{w} := \frac{(x, y)}{(u, v)} := (\frac{xu + yv}{u^2 + v^2}, -\frac{xv - yu}{u^2 + v^2}).$$

Liczbę zespoloną $(x, 0)$ będziemy utożsamiać z liczbą rzeczywistą x.
Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną i będziemy oznaczać

*Matematyka II IChiP- konspekt wykładu cz.III

literą i. Zauważmy, że $(0,1)(0,1) = (-1,0)$. Zatem i^2 możemy utożsamiać z liczbą rzeczywistą -1.
Ponieważ,

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) + (0,1)(y,0)$$

możemy liczbę zespoloną $z = (x,y)$ zapisać w ***postaci kanonicznej Gaussa***:

$$z = x + iy.$$

Liczbę rzeczywistą x nazywamy ***częścią rzeczywistą***, natomiast liczbę rzeczywistą y - ***częścią urojoną*** liczby zespolonej $z = (x,y)$, co zapisujemy

$$x = Rez, \quad y = Imz.$$

Definicja 1.2. *Liczbą **sprzężoną** z liczbą $z = x + iy$ nazywamy liczbę zespoloną $\overline{z} := x - iy$.*

Przykład 1.3.

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2,$$

$$z \cdot w = (x+iy)(u+iv) = (xu - yv) + i(xv + yu),$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{z}}{w \cdot \overline{z}} = \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} =$$

$$= \frac{(xu+yv) + i(uy - xv)}{u^2+v^2} = \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\frac{yu-xv}{u^2+v^2}.$$

$\square$

Liczby zespolone i określone na nich działania można interpretować geometrycznie. Każdemu punktowi $\overline{p} = (x,y)$ płaszczyzny OXY jest przyporządkowana dokładnie jedna liczba zespolona $x + iy$. Podobnie, każdej liczbie zespolonej

$z = x+iy$ odpowiada dokładnie jeden punkt (x, y) płaszczyzny. Utożsamiając punkty $\overline{p} = (x, y)$ płaszczyzny OXY z liczbami zespolonymi $z = x + iy$ powiemy, że płaszczyzna OXY jest płaszczyzną zespoloną Ω. Liczbom zespolonym o części urojonej równej zeru odpowiadają punkty leżące na osi odciętych o współrzędnej $Rez = x$. Oś odciętych nazywamy osią rzeczywistą. Liczbom zespolonym o części rzeczywistej równej zeru i różnej od zera części urojonej odpowiadają punkty leżące na osi rzędnych o współrzędnej $Imz = x$. Oś rzędnych nazywamy osią urojoną.

Definicja 1.4. ***Modułem*** *liczby zespolonej* $z = x + iy$, *nazywamy liczbę rzeczywistą*

$$| z | := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$ interpretujemy geometrycznie jako długość promienia wodzącego punktu (x, y).

Definicja 1.5. ***Argumentem*** *liczby zespolonej* $z = x + iy \neq 0$ *nazywamy każdą liczbę rzeczywistą* φ, *spełniającą dwa warunki:*

$$\cos\varphi = \frac{x}{| z |}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{| z |}.$$

Każda liczba zespolona różna od zera ma nieskończenie wiele argumentów. Każde dwa spośród nich różnią się między sobą o całkowitą wielokrotność liczby 2π. Ten z argumentów, który należy do przedziału $(-\pi, \pi]$ nazywamy ***argumentem głównym*** i oznaczamy symbolem $argz$. Argument główny jest określony jednoznacznie. Zbiór $Argz = \{argz + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ oznacza zbiór wszystkich argumentów niezerowej liczby zespolonej z.
Geometrycznie, argument liczby zespolonej $z = x + iy$ jest miarą względną

kąta, jaki tworzy wektor wodzący punktu (x, y) z osią rzeczywistą. Każdą liczbę z przedziału $(-\pi, \pi]$ można uważać za argument główny liczby 0.

Jeżeli $z_1, z_2 \in \Omega$ i $z_2 \neq 0$ to prawdziwe są następujące zależności:

$$\begin{aligned} \mid z_1 \cdot z_2 \mid &= \mid z_1 \mid \cdot \mid z_2 \mid, \\ \mid \frac{z_1}{z_2} \mid &= \frac{\mid z_1 \mid}{\mid z_2 \mid}, \\ \mid z \mid &= \mid \overline{z} \mid, \\ z\overline{z} &= \mid z \mid^2, \\ Arg(z_1 \cdot z_2) &= Argz_1 + Argz_2, \\ Arg\frac{z_1}{z_2} &= Argz_1 - Agrz_2. \end{aligned}$$

Definicja 1.6. ***Postać trygonometryczna*** *liczby zespolonej $z = x + iy$:*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie $r = \mid z \mid$ jest modułem liczby z, zaś φ jest dowolnym jej argumentem.

Przykład 1.7. Niech $z = \sqrt{3} + i$. Wówczas $\mid z \mid = \sqrt{3+1} = 2$. Argument liczby z wyznaczamy z równości:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad \sin\varphi = \frac{1}{2}.$$

Stąd $\varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ dla $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Argumentem głównym jest więc $argz = \frac{\pi}{6}$. Zatem

$$\sqrt{3} + i = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}).$$

$\square$

Dla liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej:
$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

mamy:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \\ z^n &= r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \end{aligned}$$

W szczególności otrzymujemy tzw. ***wzór Moivre'a***:

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Przykład 1.8. Niech $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ i $z_2 = -\sqrt{3} + i$. Postać trygonometryczna liczb z_1 i z_2 jest odpowiednio równa:

$$z_1 = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})) \quad \text{oraz} \quad z_2 = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{5\pi}{6})).$$

Stąd

$$z_1 z_2 = 4(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i \sin(\frac{7\pi}{6})) = 4(\cos(\frac{-5\pi}{6}) + i \sin(\frac{-5\pi}{6})).$$

□

Przykład 1.9.

$$\begin{aligned} (\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i})^{20} &= (\frac{2(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3})}{\sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{4} + i \sin\frac{-\pi}{4})})^{20} = \\ &= (\sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})))^{20} = \\ = \sqrt{2}^{20} (\cos(20\frac{7\pi}{12}) + i \sin(20\frac{7\pi}{12})) &= 2^{10}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2^9(1 - i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

□

Ponadto jeżeli $z \neq 0$, to pierwiastek $\sqrt[n]{z}$ ma dokładnie n różnych wartości:

$$\sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Wszystkie liczby $\sqrt[n]{z}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ mają równe moduły, więc leżą na okręgu o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $\sqrt[n]{r}$. Dzielą ten okrąg na n równych części.

Przykład 1.10. Są dwa pierwiastki drugiego stopnia z liczby $4 = 4 + i0 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$:

$$\sqrt{4}_1 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2, \quad \sqrt{4}_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2.$$

$\square$

Przykład 1.11. Zgodnie ze wzorem $\sqrt{1}_k = \cos(\frac{2k\pi}{3}) + i \sin(\frac{2k\pi}{3})$ dla $k = 0, 1, 2$, mamy trzy pierwiastki trzeciego stopnia z jedności $1 = \cos 0 + i \sin 0$:

$$\sqrt{1}_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1,$$
$$\sqrt{1}_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sqrt{1}_2 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\square$

Symbolem $e^{i\varphi}$ oznaczymy liczbę zespoloną o module równym 1 i argumencie φ. Jest to tzw. ***wzór Eulera***:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Definicja 1.12. ***Postać wykładniczna*** *liczby zespolonej* $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$*:*

$$z = re^{i\varphi}.$$

gdzie r *jest modułem liczby* z*, zaś* φ *jest jej argumentem.*

Postać wykładnicza liczby zespolonej umożliwia prosty zapis wcześniej podanych wzorów:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \\ z^n &= r^n e^{in\varphi}, \\ \overline{z} &= re^{-i\varphi} \end{aligned}$$

$$\sqrt[n]{z}_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\frac{arg z + 2\pi k}{n})}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Przykład 1.13.

$$e^{1-i} = ee^{-i} = e(\cos(-1) + i\sin(-1)) = e(\cos 1 - i\sin 1).$$

□

Przykład 1.14. Dla $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ oraz $z_2 = 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ otrzymujemy:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \sqrt{2}\sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4}+(-\frac{\pi}{4}))} = 2e^0 = 2, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} e^{i(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4}))} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \\ z_1^4 &= (\sqrt{2})^4 e^{4i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\pi} = -2, \end{aligned}$$

$$\overline{z}_2 = \sqrt{2}e^{-i(-\frac{\pi}{4})} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 1 + i = z_1.$$

□

2 Ciągi liczbowe o wyrazach zespolonych

Funkcję określoną na zbiorze liczb naturalnych o wartościach zespolonych nazywamy ciągiem nieskończonym o wyrazach zespolonych i oznaczamy (z_n).

Definicja 2.1. *Ciąg* $(z_n) = (x_n + iy_n)$ *jest* ***zbieżny do granicy*** *(właściwej)* $z_0 = x_0 + iy_0$, *co oznaczamy* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, *jeśli*

$$\forall(\varepsilon > 0)\exists(N > 0)\forall(n > N) \mid z_n - z_0 \mid = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon.$$

Geometrycznie oznacza to, że w kole o środku w punkcie z_0 i promieniu $\varepsilon > 0$ (dowolnie małym) leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (z_n). (Prawie wszystkie tzn. wszystkie z pominięciem skończonej liczby wyrazów.)
Ciąg, który nie ma granicy właściwej nazywamy ciągiem ***rozbieżnym***.
W teorii ciągów liczbowych o wyrazach zespolonych wprowadza się pojęcie (tylko jednej) granicy niewłaściwej ∞.

Definicja 2.2. *Ciąg* (z_n) *ma granicę* ***niewłaściwą***, *co oznaczamy* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$, *jeśli ciąg o wyrazach rzeczywistych* $(\mid z_n \mid) \to +\infty$. *Czyli, że*

$$\forall(M > 0)\exists(N > 0)\forall(n > N) \mid z_n \mid > M.$$

Do ciągów o wyrazach zespolonych można stosować twierdzenia o działaniach arytmetycznych na granicach ciągów zbieżnych w brzmieniu takim, jak dla ciągów o wyrazach rzeczywistych.

Badanie zbieżności ciągów o wyrazach zespolonych sprowadza się do badania zbieżności ciągów o wyrazach rzeczywistych.

Twierdzenie 2.3. *Ciąg o wyrazach zespolonych* $z_n = x_n + iy_n$ *jest zbieżny do granicy* $z_0 = x_0 + iy_0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Przykład 2.4. Ciąg $z_n = (1 + \frac{5}{n}) + (3 - \frac{1}{n})i$ ma granicę $z_0 = 1 + 3i$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{5}{n}) = 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty}(3 - \frac{1}{n}) = 3$. □

3 Funkcje zespolone

3.1 Funkcje zespolone zmiennej rzeczywistej

Definicja 3.1. *Niech $T \subseteq \mathbb{R}$. Funkcję $z : T \to \Omega$, $t \mapsto z(t) = x(t) + iy(t) = Rez(t) + iImz(t)$ nazywamy* ***funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej****.*

Pojęcia granicy, ciągłości funkcji, pochodnej i całki Riemanna wprowadza się analogicznie jak dla funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej.

Funkcja $z(t) = x(t)+iy(t)$ ma w punkcie t_0 granicę (jest ciągła, różniczkowalna) wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje rzeczywiste $x(t)$ i $y(t)$ mają w tym punkcie granicę (są ciągłe, różniczkowalne).

Istnienie pochodnej funkcji $z(t)$ jest równoważne istnieniu pochodnych $x'(t)$ i $y'(t)$ oraz zachodzi związek:

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Ponadto, jeżeli funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są całkowalne w przedziale $[\alpha, \beta]$, to

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} z(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x(t)dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)dt.$$

Przykład 3.2.

$$(z_0 + re^{it})' = -r\sin t + ir\cos t = ir(\cos t + i\sin t) = ire^{it},$$

$$\int\limits_{0}^{\pi}(z_0 + re^{it})dt = \int\limits_{0}^{\pi}(x_0 + r\cos t)dt + i\int\limits_{0}^{\pi}(y_0 + r\sin t)dt = \pi x_0 + i(\pi y_0 + 2r).$$

□

Różniczkowanie i całkowanie funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej przeprowadzamy w ten sposób, że stosujemy te same reguły różniczkowania i całkowania co do funkcji rzeczywistej, traktując liczbę zespoloną i jak stałą.

Równanie

$$z = x + iy = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \text{dla} \quad t \in T \subseteq \mathbb{R} \tag{1}$$

można zastąpić układem dwóch równań rzeczywistych:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \text{dla} \quad t \in T. \end{cases}$$

Jeśli funkcja $z(t)$ jest ciągła w przedziale T, to równanie (1) jest równaniem parametrycznym krzywej na płaszczyźnie zapisanym w postaci zespolonej.

Przykład 3.3. Równanie

$$z = z_0 + re^{it}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

jest równoważne układowi dwóch równań:

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t, \quad \text{dla} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Równanie to jest równaniem okręgu o środku w punkcie z_0 i promieniu r.

□

3.2 Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

Niech Ω oznacza przestrzeń liczb zespolonych i niech $E, F \subset \Omega$.

Definicja 3.4. *Funkcję* $f : E \to F; z \in E \mapsto f(z) = w \in F$ *nazywamy* ***funkcją zespoloną zmiennej zespolonej****.*
Zbiór E *nazywamy* ***dziedziną*** *a zbiór* $f(E) \subseteq F$*, nazywamy* ***przeciwdziedziną*** *funkcji* f*.*

Niech $f : E \to F$ będzie funkcją zespoloną zmiennej zespolonej $z = x+iy$ i niech $f(z) = w = u + iv$. Wówczas $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, gdzie
$u(x, y) = Ref(z)$ nazywamy ***częścią rzeczywistą*** funkcji $f(z)$,
$v(x, y) = Imf(z)$ nazywamy ***częścią urojoną*** funkcji $f(z)$.
Zatem funkcja zespolona zmiennej zespolonej jest równoważna parze funkcji rzeczywistych dwóch zmiennych rzeczywistych.

Przykład 3.5. Niech $f(z) = z^3 - 2z$ będzie funkcja zespoloną zmiennej $z = x + iy$. Wówczas

$$f(z) = (x + iy)^3 - 2(x + iy) = x^3 - 3xy^2 - 2x + i(3x^2y - y^3 - 2y).$$

Czyli $Ref(z) = x^3 - 3xy^2 - 2x$ oraz $Imf(z) = 3x^2y - y^3 - 2y$. □

Funkcja zespolona $f : E \to F$ odwzorowuje zbiór płaski E płaszczyzny zespolonej Ω na zbiór płaski $f(E)$ płaszczyzny zespolonej obrazu.

Przykład 3.6. Funkcja $w = f(z) = \frac{1}{z}$ przekształca okrąg $\{z \in \Omega : \mid z \mid^2 = 4\}$ na okrąg o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu $\frac{1}{2}$. □

Nie zawsze obrazem obszaru jest obszar.

Przykład 3.7. Funkcja $f(z) =\mid z - z_0 \mid$ zmiennej zespolonej $z \in \Omega$ odwzorowuje płaszczyznę zespoloną na półoś rzeczywistą dodatnią, łącznie z jej początkiem.
$\square$

Niech $E \subset \Omega$ będzie dziedziną funkcji zespolonej f i niech z_0 będzie punktem skupienia zbioru E (w punkcie z_0 funkcja f może nie mieć określonej wartości).

Definicja 3.8. (Heine'go)
Liczbę zespoloną $g \in \Omega$ nazywamy ***granicą funkcji*** *f w punkcie z_0 i oznaczamy $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = g$, jeżeli dla każdego ciągu punktów (z_n) zbioru E różnych od z_0, $\lim\limits_{z_n \to z_0} f(z_n) = g$.*

Dla funkcji zespolonej zmiennej zespolonej prawdziwe są twierdzenia o granicy sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu w brzmieniu takim, jak dla funkcji zmiennej rzeczywistej.

Twierdzenie 3.9. *Funkcja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ma granicę $g = g_1 + ig_2$ w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = g_1 \quad \text{oraz} \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = g_2.$$

Przykład 3.10.

$$\lim_{z \to i} \frac{z^2 + 1}{z + i} = 0,$$

gdyż

$$\lim_{z \to i} \frac{(z - i)(z + i)}{z + i} = \lim_{z \to i} (z - i) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} x + i(y - 1) = 0.$$

$\square$

Definicja 3.11. *Funkcja zespolona f ma granicę* ***niewłaściwą*** *w punkcie z_0, co oznaczamy $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$, jeśli dla każdego ciągu (z_n) punktów zbioru E różnych od z_0:*

$$\lim_{z_n\to z_0} f(z_n) = \infty.$$

Definicja 3.12. *Granicę funkcji zespolonej f w nieskończoności określamy następująco:*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) := \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}).$$

Przykład 3.13.

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1+z^2}{1-z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{1+\frac{1}{z^2}}{1-\frac{1}{z^2}} = \lim_{z\to 0} \frac{z^2+1}{z^2-1} = -1.$$

□

Definicja 3.14. *Funkcja zmiennej zespolonej f jest* ***ciągła*** *w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$, jeżeli*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Twierdzenie 3.15. *Funkcja zmiennej zespolonej $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ jest ciągła w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy część rzeczywista $u(x,y)$ i część urojona $v(x,y)$ funkcji f są ciągłe w punkcie (x_0, y_0).*

Funkcja f jest ciągła na zbiorze E, gdy jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

3.3 Pochodna funkcji zmiennej zespolonej

Niech f będzie funkcją zmiennej zespolonej, określoną w pewnym otoczeniu E punktu z_0. Symbolem $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ oznaczymy różny od zera przyrost zmiennej z, taki że $z_0 + \Delta z \in E$.

Definicja 3.16. ***Pochodną*** *funkcji f w punkcie z_0, ozn. $f'(z_0)$ lub $\frac{df}{dz}(z_0)$, nazywamy granicę właściwą (o ile istnieje)*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

W definicji pochodnej funkcji f zmiennej zespolonej przyrost $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ zmiennej niezależnej z dąży do zera przez dowolne wartości zespolone.

Przykład 3.17. Niech $f(z) = z^2$.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0.$$

□

Jeżeli istnieje pochodna $f'(z_0)$, to funkcja $f(z)$ jest ciągła w punkcie z_0.

Przy założeniu, że odpowiednie funkcje zmiennej zespolonej są różniczkowalne, pozostają prawdziwe twierdzenia o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, funkcji złożonej i odwrotnej, które są prawdziwe dla funkcji zmiennej rzeczywistej.

Twierdzenie 3.18. (Warunek konieczny różniczkowalności funkcji zespolonej) *Jeżeli funkcja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ma w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ pochodną $f'(z_0)$, to pochodne cząstkowe $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ i $\frac{\partial v}{\partial y}$ istnieją w punkcie (x_0, y_0) oraz spełniają w tym punkcie tzw.* ***równania Cauchy-Riemanna****:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Warunki Cauchy-Riemanna są konieczne, ale nie są wystarczające dla istnienia pochodnej funkcji f.

Przykład 3.19. Niech $f(z) = f(x+iy) = \sqrt{|\, xy \,|}$, gdzie $u(x,y) = \sqrt{|\, xy \,|}$ oraz $v(x,y) = 0$. W punkcie $z_0 = (0,0)$ spełnione są warunki Cauchy-Riemanna, gdyż

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Jednak pochodna $f^{'}(0)$ nie istnieje, gdyż gdy $\Delta z \to 0$ wzdłuż półprostej o równaniach $\Delta x = \alpha t$, $\Delta y = \beta t$, dla $t > 0$, wtedy

$$f^{'}(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt{|\, \Delta x \cdot \Delta y \,|}}{\Delta x + i\Delta y} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{|\, \alpha t \cdot \beta t \,|}}{\alpha t + i\beta t} = \frac{\sqrt{|\, \alpha\beta \,|}}{\alpha + i\beta}$$

co oznacza, że wartość granicy $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z}$ zależy od wartości parametrów α i β, czyli od kierunku półprostej. $\square$

Twierdzenie 3.20. (Warunek wystarczający istnienia pochodnej funkcji zespolonej)
Jeżeli funkcje $u(x,y)$ oraz $v(x,y)$ spełniają warunki Cauchy-Riemanna w pewnym obszarze E i jeżeli ponadto są w tym obszarze klasy C^1, to funkcja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ma w każdym punkcie $z = x + iy$ tego obszaru pochodną:

$$f^{'}(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right).$$

Przykład 3.21. Niech $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Funkcje $u(x,y) = e^x \cos y$ oraz $v(x,y) = e^x \sin y$ są klasy C^1 i spełniają warunki Cauchy-Riemanna na całej płaszczyźnie:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Stąd funkcja f ma w każdym punkcie z_0 płaszczyzny pochodną

$$f'(z_0) = e_0^x \cos y_0 + ie_0^x \sin y_0 = e^{z_0}.$$

$\square$

Pochodne drugiego i wyższych rzędów funkcji zmiennej zespolonej określa się tak, jak w przypadku funkcji zmiennej rzeczywistej:

$$f^{(n+1)}(z_0) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f^{(n)}(z_0 + \Delta z) - f^{(n)}(z_0)}{\Delta z}, \quad \text{dla} \;\; n = 1, 2, 3, \ldots.$$

3.4 Funkcje holomorficzne

Definicja 3.22. *Funkcję zespoloną f zmiennej zespolonej nazywamy funkcją **holomorficzną** w punkcie z_0, jeśli ma pochodną $f^{'}(z)$ w pewnym otoczeniu tego punktu.*

Holomorficzność funkcji f w punkcie z_0 jest własnością odnoszącą się nie tylko do samego punktu z_0, lecz także do pewnego otoczenia tego punktu. Funkcja holomorficzna w punkcie z_0 ma w tym punkcie pochodną, ale nie na odwrót. Funkcja może mieć pochodną w punkcie z_0 i nie być holomorficzna w tym punkcie, gdyż może nie mieć pochodnej w żadnym otoczeniu punktu z_0.

Przykład 3.23. Funkcja $f(z) =\mid z \mid^2 = x^2 + y^2 = u(x, y)$ ma pochodną w punkcie $z_0 = 0$, gdyż

$$f^{'}(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mid \Delta z \mid^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\mid \Delta z \mid^2 \cdot \overline{\Delta z}}{\mid \Delta z \mid^2} = \lim_{\Delta z \to 0} \mid \Delta z \mid e^{-iarg\Delta z} = 0.$$

Nie jest to funkcja holomorficzna w punkcie $z_0 = 0$, ponieważ dla $z \neq 0$ pochodna $f'(z)$ nie istnieje. Warunki Cauchy-Riemanna są spełnione tylko w punkcie $z_0 = 0$, gdyż dla $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \neq -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

□

Definicja 3.24. *Funkcja f jest holomorficzna w obszarze E, jeżeli jest holomorficzna w kazdym punkcie tego obszaru.*

Holomorficzność w obszarze oznacza dokładnie to samo, co istnienie pochodnej w każdym punkcie tego obszaru.

Przykład 3.25. Znając część rzeczywistą $u(x, y) = x^2 - y^2$ funkcji holomorficznej możemy znaleźć tę funkcję. Z równań Cauchy-Riemanna mamy:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Stąd

$$v(x, y) = 2xy + C(x),$$

oraz

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x) = 2y \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(x, y) = 2xy + D.$$

Ostatecznie

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = x^2 - y^2 + i(2xy + D) = (x + iy)^2 + iD.$$

□

4 Całka krzywoliniowa funkcji zmiennej zespolonej

Niech f będzie funkcją zmiennej zespolonej określoną na krzywej gładkiej C danej równaniem:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

i zorientowanej zgodnie ze wzrastającym parametrem.
Podzielmy przedział $[\alpha, \beta]$ na n podprzedziałów za pomocą punktów t_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ tak, że

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta.$$

Punktom t_k odpowiadają punkty $z_k = z(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, krzywej C. Na każdym łuku częściowym $z_{k-1}z_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$ wybieramy w dowolny sposób punkt ξ_k i tworzymy sumę całkową:

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Definicja 4.1. *Jeżeli dla każdego ciągu podziałów przedziału $[\alpha, \beta]$ takiego, że długość największego z przedziałów $[t_{k-1}, t_k]$ dąży do zera, ciąg (S_n) sum całkowych jest zbieżny do tej samej granicy skończonej, niezależnej od wyboru punktów ξ_k, to tę granicę nazywamy* ***całką krzywoliniową funkcji f wzdłuż krzywej C*** *i oznaczamy*

$$\int_C f(z)dz.$$

Całka krzywoliniowa funkcji zmiennej zespolonej zachowuje wszystkie właściwości całki krzywoliniowej zmiennej rzeczywistej. W szczególności

Twierdzenie 4.2. *Jeżeli funkcja f jest ciągła na krzywej gładkiej C, to*

$$|\int\limits_C f(z)dz| \leqslant ML,$$

gdzie $M := \sup\limits_{z\in C} | f(z) |$ *oraz* L *oznacza długość krzywej* C.

Całka $\int\limits_C f(z)dz$ po krzywej kawałkami gładkiej C jest sumą całek po każdej jej gładkiej części.

Twierdzenie 4.3. *Jeżeli funkcja* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *jest ciągła na krzywej kawałkami gładkiej* C, *to całka krzywoliniowa* $\int\limits_C f(z)dz$ *istnieje oraz*

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int\limits_C v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

Twierdzenie 4.4. (O zamianie całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną) *Jeżeli funkcja* f *jest ciągła na krzywej gładkiej* C *o przedstawieniu parametrycznym* $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, *skierowanej zgodnie ze wzrostem parametru, to*

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

Przykład 4.5. Niech C będzie krzywą o równaniu

$$z(t) = e^{it}, \quad t \in [-\pi, 0].$$

Wówczas

$$\int\limits_C | z | dz = \int\limits_{-\pi}^0 | e^{it} | ie^{it}dt = 2.$$

□

Przykład 4.6. Niech $C = K(z_0, r) = \{z \in \Omega :| z - z_0 |= r\}$ będzie okręgiem o środku w punkcie z_0 i promieniu r skierowanym dodatnio względem koła ograniczonego tym okręgiem. Wówczas

$$\int\limits_{K(z_0,r)} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{r^n e^{int}} dt = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1. \end{cases}$$

□

Twierdzenie 4.7. (Podstawowe Cauchy)
Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D oraz C jest kawałkami gładką krzywą Jordana leżącą w obszarze D, to

$$\int\limits_C f(z)dz = 0.$$

Przykład 4.8. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, funkcja $f(z) = z^n$ jest holomorficzna na całej płaszczyźnie oraz okrąg $K(0, r)$ jest krzywą gładką Jordana, zatem

$$\int\limits_{K(0,r)} z^n dz = 0.$$

□

Wniosek 4.9. *Niech funkcja f będzie holomorficzna w obszarze jednospójnym D z wyjątkiem punktu $z_0 \in D$. Jeśli C oraz C_1 oznaczają kawałkami gładkie krzywe Jordana zawarte w obszarze D, skierowane zgodnie i zawierające wewnątrz punkt z_0, to*

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{C_1} f(z)dz.$$

Wniosek 4.10. *Niech C oznacza kawałkami gładką krzywą Jordana położoną w obszarze jednospójnym D i zawierającą punkty $z_k \in D$, $k = 1, 2, \dots, n$ w swoim wnętrzu. Niech $K(z_k, r)$ oznaczają okręgi o środkach z_k, $k = 1, 2, \dots, n$ i wspólnym promieniu r tak małym, żeby żadne dwa z tych okręgów nie miały wspólnego punktu i żeby każdy z tych okręgów leżał wewnątrz krzywej C. Wszystkie krzywe są skierowane dodatnio względem swych wnętrz. Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D z wyjątkiem punktów $z_1, z_2, \dots, z_n$, to*

$$\int\limits_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{K(z_k,r)} f(z)dz.$$

Przykład 4.11. Niech C będzie elipsą o równaniu $4x^2+y^2-4 = 0$, skierowaną dodatnio względem swego wnętrza. Funkcja $\frac{1}{z^2+1}$ jest holomorficzna na całej płaszczyźnie z wyjątkiem punktów $z_1 = -i$ oraz $z_2 = i$. Stąd

$$\int\limits_C \frac{dz}{z^2+1} = \int\limits_{K(-i,\frac{1}{2})} \frac{dz}{z^2+1} + \int\limits_{K(i,\frac{1}{2})} \frac{dz}{z^2+1} = 0.$$

□

Przykład 4.12. Funkcja $f(z) = x = u(x, y)$ nie jest holomorficzna na płaszczyźnie zespolonej Ω, gdyż dla żadnego punktu $(x, y) \in D$ nie spełnia warunków Cauchy-Riemanna:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Niech C oraz C' będą dwiema krzywymi łączącymi punkt $a = 0$ z punktem $b = 1+i$. Niech C będzie odcinkiem o równaniu $z = z(t) = (1+i)t$, $t \in [0, 1]$, natomiast niech C' będzie linią łamaną złożoną z dwóch odcinków $z = z(t) = t$, $t \in [0,1]$ oraz $z = z(t) = 1 + it$, $t \in [0,1]$. Wówczas

$$\int\limits_C x dz = \int\limits_0^1 (1+i)t dt = \frac{1}{2}(1+i),$$

$$\int\limits_{C'} x dz = \int\limits_0^1 t dt + \int\limits_0^1 i dt = \frac{1}{2} + i.$$

Zatem całka krzywoliniowa $\int\limits_C f(z)dz$ może zależeć od drogi łączącej punkt początkowy z punktem końcowym krzywej C. □

Definicja 4.13. *Funkcję F nazywamy* ***funkcją pierwotną*** *funkcji f w obszarze D, jeżeli dla każdego $z \in D$ spełniony jest warunek:*

$$F'(z) = f(z).$$

Dla każdej funkcji holomorficznej w obszarze jednospójnym istnieje funkcja pierwotna.

Twierdzenie 4.14. *Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D, to funkcja:*

$$F(z) := \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi, \quad z \in D, \quad z_0 \in D$$

jest funkcją pierwotną funkcji f w obszarze D.

Twierdzenie 4.15. *Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze jednospójnym D, to całka krzywoliniowa funkcji f wzdłuż dowolnej krzywej kawałkami gładkiej $C \subset D$ nie zależy od drogi całkowania, a jedynie od punktu początkowego $z_1 \in D$ i końcowego $z_2 \in D$ oraz*

$$\int\limits_C f(z)dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f w obszarze D.

Całkę $\int\limits_C f(z)dz$, w której C jest krzywą o początku $a = z(\alpha)$ i końcu $b = z(\beta)$ i która nie zależy od drogi całkowania oznaczamy również przez

$$\int\limits_a^b f(z)dz.$$

Przykład 4.16. Funkcja $f(z) = z^2$ jest holomorficzna na całej płaszczyźnie zespolonej, zatem całka $\int\limits_C z^2 dz$ po łamanej C przedstawionej na rysunku zależy jedynie od punktu początkowego $z_1 = 1 + i$ i od punktu końcowego $z_2 = 4 + i$.

$$\int\limits_C z^2 dz = \int\limits_{1+i}^{4+i} z^2 dz = \frac{1}{3}((4+i)^3 - (1+i)^3) = 18 + 15i.$$

□

Twierdzenie 4.17. (Wzór całkowy Cauchy)
Niech D będzie obszarem jednospójnym, którego brzeg C jest kawałkami gładką krzywą Jordana zorientowaną dodatnio względem obszaru D. Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze D, to w każdym punkcie wewnętrznym $z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Z twierdzenia (4.17) wynika, że wartość funkcji holomorficznej w każdym punkcie $z_0 \in D$ można wyrazić przez wartość tej funkcji na dowolnej kawałkami gładkiej krzywej Jordana $C \subset D$, we wnętrzu której znajduje się punkt z_0. To znaczy, że wartości funkcji holomorficznej na krzywej C określają jednoznacznie wartości tej funkcji wewnątrz krzywej.

Przykład 4.18. Funkcja $f(z) = \frac{\cos z}{z+i}$ jest holomorficzna we wnętrzu i na okręgu $K(i,1)$. Na mocy wzoru całkowego Cauchy:

$$\int\limits_{K(i,1)} \frac{\cos z}{z^2+1} dz = \int\limits_{K(i,1)} \frac{\frac{\cos z}{z+i}}{z-i} dz = 2\pi i f(i) = \pi \cos i.$$

□

Przykład 4.19. Funkcja $f(z) = \frac{e^z}{z}$ jest holomorficzna we wnętrzu i na okręgu $K(3i,2)$. Na mocy wzoru całkowego Cauchy:

$$\int\limits_{K(3i,2)} \frac{e^z}{z(z-2i)} dz = \int\limits_{K(3i,2)} \frac{\frac{e^z}{z}}{z-2i} dz = 2\pi i f(2i) = \pi(\cos 2 + i \sin 2).$$

□

Twierdzenie 4.20. (Uogólniony wzór całkowy Cauchy)

Niech D będzie obszarem jednospójnym, którego brzeg C jest kawałkami gładką krzywą Jordana zorientowaną dodatnio względem obszaru D. Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze D, to ma ona w każdym punkcie wewnętrznym $z_0 \in D$ pochodne wyższych rzędów:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Funkcja holomorficzna w obszarze D ma w tym obszarze wszystkie pochodne. W szczególności ma w nim drugą pochodną. Zatem pochodna funkcji holomorficznej w obszarze D jest funkcją holomorficzną w tym obszarze.

Część rzeczywista i część urojona funkcji holomorficznej na obszarze D mają w tym obszarze ciągłe pochodne cząstkowe dowolnego rzędu, czyli są klasy C^∞.

Przykład 4.21. Funkcja $f(z) = \frac{1}{(z+i)^2}$ jest holomorficzna w pewnym obszarze jednospójnym zawierającym okrąg $K(i,1)$. Na mocy uogólnionego wzoru całkowego Cauchy:

$$\int\limits_{K(i,1)} \frac{1}{(z^2+1)^2} dz = \int\limits_{K(i,1)} \frac{\frac{1}{(z+i)^2}}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(i) = \frac{\pi}{2}.$$

□

Przykład 4.22. Nich C będzie dowolną krzywą zamkniętą kawałkami gładką zawierającą punkt i. Funkcja $f(z) = \cos z$ jest holomorficzna w pewnym obszarze jednospójnym zawierającym krzywą C. Na mocy uogólnionego wzoru całkowego Cauchy:

$$\int\limits_{C} \frac{\cos z}{(z-1)^3} dz = -\pi i \cos i.$$

□

5 Rozwijanie funkcji zespolonej w szereg

5.1 Szeregi o wyrazach zespolonych

Niech dany będzie ciąg liczbowy o wyrazach zespolonych: $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$.

Definicja 5.1. ***Szeregiem liczbowym*** *o wyrazach zespolonych nazywamy ciąg* $(\sum_{k=1}^{n} z_k)$ *i oznaczamy symbolem* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Wyrazy ciągu $(\sum_{k=1}^{n} z_k)$ nazywamy ***sumami częściowymi*** szeregu.

Definicja 5.2. ***Sumą szeregu*** $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *nazywamy granicę właściwą (o ile istnieje) ciągu* $(\sum_{k=1}^{n} z_k)$ *sum częściowych. Mówimy wówczas, że szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ *jest zbieżny.*

Jeżeli ciąg $(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k)$ nie ma granicy właściwej, to mówimy, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ jest rozbieżny.

Definicja 5.3. *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *jest* ***bezwzględnie zbieżny****, jeśli zbieżny jest szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mid z_n \mid$.

Twierdzenie 5.4. *Szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *o wyrazach* $z_n = x_n + iy_n$ *jest zbieżny do sumy* $s = a + ib$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są szeregi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ *odpowiednio do sum* a *i* b.

Twierdzenie 5.5. (Kryteria zbieżności szeregów)

1. (Kryterium porównawcze) Jeżeli wyrazy szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *spełniają warunek:*

$$\forall (n \geqslant N) \quad \mid z_n \mid \leqslant a_n,$$

oraz szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to szereg o wyrazach zespolonych* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *jest zbieżny bezwzględnie.*

2. (Kryterium d'Alamberta) Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \mid \frac{z_{n+1}}{z_n} \mid = g < 1,$$

to szereg o wyrazach zespolonych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli* $g > 1$, *to szereg jest rozbieżny.*

3. (Kryterium Cauchy) Jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid z_n \mid} = g < 1,$$

to szereg o wyrazach zespolonych $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *jest bezwzględnie zbieżny. Jeśli* $g > 1$, *to szereg jest rozbieżny.*

Przykład 5.6. Szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2-i}{3})^{n^2}$ jest bezwzględnie zbieżny, gdyż

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\mid(\frac{2-i}{3})^{n^2}\mid} = \lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{5}}{3})^n = 0 < 1.$$

□

5.2 Szeregi potęgowe

Definicja 5.7. ***Szeregiem funkcyjnym*** *o wyrazach zespolonych nazywamy szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$, *którego wyrazy są funkcjami zmiennej zespolonej określonymi w pewnym wspólnym zbiorze* A.

Definicja 5.8. *Szereg funkcyjny* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *jest* ***jednostajnie zbieżny*** *na zbiorze* A *do sumy* $S(z)$, *jeśli jego ciąg sum częściowych* $(s_n(z))$ *jest jednostajnie zbieżny na tym zbiorze do funkcji* $S(z)$:

$$\forall(\varepsilon > 0)\ \exists(N)\ \forall(z \in A)\ \forall(n > N)\ \mid s_n(z) - S(z) \mid < \varepsilon.$$

Twierdzenie 5.9. (Kryterium Weierstrassa)
Jeżeli wyrazy szeregów $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *spełniają warunek:*

$$\forall(n \in \mathbb{N})\ \forall(z \in \Omega)\quad \mid f_n(z) \mid \leqslant a_n,$$

oraz szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to szereg* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ *jest zbieżny w zbiorze* Ω *jednostajnie i bezwzględnie.*

Definicja 5.10. *Szereg funkcyjny*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = (a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots + a_n(z-z_0)^n),$$

gdzie $a_0, a_1, a_2, \ldots \in \Omega$, *nazywamy* ***szeregiem potęgowym*** *o środku w punkcie* z_0.

Definicja 5.11. ***Promieniem zbieżności*** *szeregu potęgowego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *nazywamy taką liczbę rzeczywistą* $r > 0$*, że dla* $z \in \Omega$ *takich, że* $\mid z - z_0 \mid < r$ *szereg jest zbieżny, a dla* $\mid z - z_0 \mid > r$ *szereg jest rozbieżny.*
Jeżeli szereg potęgowy jest zbieżny na całej płaszczyźnie zespolonej Ω*, to przyjmujemy* $r = +\infty$*, a gdy jest on zbieżny tylko w środku* z_0*, to* $r = 0$*.*

Jeżeli $r > 0$ jest promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, to $K(z_0, r)$ jest największym kołem o środku z_0 wewnątrz którego szereg ten jest zbieżny.

Twierdzenie 5.12. *Jeżeli dla szeregu potęgowego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *istnieje granica* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid} = g$ *lub* $\lim\limits_{n\to\infty} \mid \frac{a_{n+1}}{a_n} \mid = g$*, to promień zbieżności tego szeregu wyraża się wzorem:*

$$r = \begin{cases} \frac{1}{g}, & \text{gdy } \ 0 < g < \infty \\ \infty, & \text{gdy } \ g = 0 \\ 0, & \text{gdy } \ g = \infty. \end{cases}$$

Przykład 5.13. Promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n^2(1+i)^n}$ równy jest $\sqrt{2}$. Szereg jest zbieżny w kole $\mid z - i \mid \leqslant \sqrt{2}$ a rozbieżny dla $\mid z - i \mid > \sqrt{2}$.
$\square$

Twierdzenie 5.14. *Szereg potęgowy jest jednostajnie zbieżny w każdym zbiorze domkniętym i ograniczonym, zawartym wewnątrz koła zbieżności.*

Twierdzenie 5.15. *Suma* $S(z)$ *szeregu potęgowego* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *jest funkcją ciągłą i holomorficzną wewnątrz koła zbieżności. Ponadto*

$$\frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1},$$

oraz szereg pochodny ma taki sam promień zbieżności jak dany szereg.

Jeżeli funkcja zmiennej zespolonej określona w obszarze D, w pewnym otoczeniu każdego punktu tego obszaru jest sumą szeregu potęgowego, to nazywamy ją ***funkcją analityczną*** w obszarze D. Na mocy twierdzenia 5.15 funkcja analityczna w obszarze D jest holomorficzna w tym obszarze.

Przykład 5.16. Suma szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest funkcją analityczną w kole $\mid z \mid< 1$. □

Twierdzenie 5.17. *Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w kole K o środku w punkcie z_0, to można ją jednoznacznie rozwinąć w tym kole w szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, zwany* ***szeregiem Taylora*** *(tzn. funkcja f jest w tym kole sumą szeregu Taylora), którego współczynniki określone są wzorami:*

$$a_n := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

gdzie C jest okręgiem o środku w punkcie z_0 zorientowanym dodatnio względem swego wnętrza, w którym leży punkt z i który sam leży wewnątrz koła K.

Na mocy twierdzenia (5.17) funkcja holomorficzna w pewnym obszarze jest w tym obszarze analityczna.

Przykład 5.18. Funkcja $f(z) = \frac{z}{1-z}$ jest holomorficzna w każdym punkcie $z \in \Omega \setminus \{1\}$. Stąd jest holomorficzna np. w kole $\mid z \mid< 1$ oraz w kole $\mid z+1 \mid< 2$. Zatem rozwinięcie funkcji f w punkcie $z_0 = 0$ w szereg Taylora jest następujące:

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}.$$

Promień zbieżności szeregu wynosi 1. Natomiast rozwinięcie tej funkcji w punkcie $z_0 = -1$ w szereg Taylora jest następujące:

$$\frac{z}{1-z} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} z\frac{(z+1)^n}{2^n}.$$

Promień zbieżności tego szeregu wynosi 2. □

Przykład 5.19. Funkcją wykładniczą e^z zmiennej zespolonej nazywamy sumę szeregu

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Funkcję $\sin z$ dla zmiennej zespolonej określamy jako sumę szeregu:

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Natomiast funkcję $\cos z$ dla zmiennej zespolonej określamy jako sumę szeregu:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Promienie zbieżności tych szeregów są nieskończone.

Słuszne są następujące ***wzory Eulera***:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

□

5.3 Szereg Laurenta

Na mocy twierdzenia 5.17 funkcje holomorficzne w pewnym otoczeniu punktu z_0 można rozwinąć wokół tego punktu w szereg Taylora. Natomiast w zastosowaniach często występują funkcje, które są holomorficzne jedynie w pewnym pierścieniu $P := \{z \in \Omega \mid r <\mid z - z_0 \mid< R, r \geqslant 0, R \leqslant \infty\}$. Okazuje się, że każdą taką funkcję można przedstawić w pierścieniu P jako sumę dwóch szeregów: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

Definicja 5.20. *Sumę*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

będziemy nazywać ***szeregiem Laurenta*** *o współczynnikach a_n i środku w punkcie $z_0 \in \Omega$ i oznaczać*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Pierwszy z szeregów nazywamy ***częścią regularną*** szeregu Laurenta, drugi natomiast ***częścią główną*** tego szeregu. Część regularna $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ jest szeregiem potęgowym względem $(z-z_0)$, zbieżnym w kole $\mid z - z_0 \mid< R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ a rozbieżnym na zewnątrz tego koła. Część główna $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ jest szeregiem potęgowym względem $\frac{1}{z-z_0}$, zbieżnym w obszarze $\mid z - z_0 \mid< r = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid a_{-n} \mid}$.

Powiemy, że szereg Laurenta jest zbieżny, jeśli zbieżne są oba szeregi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ i $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$.

Twierdzenie 5.21. (Laurenta)
Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w pierścieniu $P := \{z \in \Omega \mid r <\mid z - z_0 \mid< R, r \geqslant 0, R \leqslant \infty\}$, to można ją jednoznacznie rozwinąć w tym pierścieniu w szereg Laurenta $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ (tzn. funkcja f jest w tym pierścieniu sumą szeregu Laurenta), przy czym

$$a_n := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

gdzie C jest dowolnym okręgiem o środku w punkcie z_0 zorientowanym dodatnio względem swego wnętrza, zawartym w pierścieniu P.

Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w kole $\mid z - z_0 \mid < R$, to szereg Laurenta redukuje się do szeregu Taylora, gdyż na mocy twierdzenia Cauchy $a_{-n} = 0$.

Przykład 5.22. Funkcja $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$ jest holomorficzna na całej płaszczyźnie z wyjątkiem dwóch punktów $z_1 = -1$ i $z_2 = 1$. Wokół każdego punktu $z_0 \in \Omega \setminus \{z_1, z_2\}$ można tę funkcję rozwinąć w szereg Taylora o promieniu zbieżności $R = \min\{\mid z_0 + 1 \mid, \mid z_0 - 1 \mid\}$. Każde takie rozwinięcie stanowi jednocześnie rozwinięcie w szereg Laurenta w pierścieniu $0 < \mid z - z_0 \mid < R$.

W szereg Laurenta można także rozwinąć funkcję f w takim pierścieniu, dla którego rozwinięcie w szereg Taylora nie jest możliwe.

1. W pierścieniu $0 < \mid z + 1 \mid < 2$ rozwinięcie funkcji f w szereg Laurenta ma postać:

$$\frac{2}{z^2-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{z+1}.$$

2. W pierścieniu $0 < \mid z - 1 \mid < 2$ rozwinięcie funkcji f w szereg Laurenta ma postać:

$$\frac{2}{z^2-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{1}{z-1}.$$

3. W pierścieniu $1 < \mid z - 2 \mid < 3$ rozwinięcie funkcji f w szereg Laurenta ma postać:

$$\frac{2}{z^2-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(z-2)^n}.$$

4. W pierścieniu $\mid z \mid > 1$ rozwinięcie funkcji f w szereg Laurenta ma postać:

$$\frac{2}{z^2-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{z^{n+1}}.$$

$\square$

6 Punkty osobliwe funkcji zespolonej

Definicja 6.1. *Niech funkcja f będzie holomorficzna w obszarze jednospójnym D oraz niech $z_0 \in D$. Jeżeli $f(z_0) = 0$, to punkt z_0 nazywamy **zerem** funkcji f.*
Jeżeli rozwinięcie funkcji f w szereg Taylora w punkcie z_0 ma postać

$$f(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + a_{k+2}(z - z_0)^{k+2} + \dots$$

*to punkt z_0 nazywamy **zerem k-krotnym** funkcji f.*

Definicja 6.2. *Punkt $z_0 \in \Omega$, w którym funkcja f jest holomorficzna, nazywamy punktem **regularnym** tej funkcji.*
*Jeżeli funkcja f nie jest holomorficzna w punkcie z_0, ale jest holomorficzna w pierścieniu $0 <| z - z_0 |< R$, to punkt z_0 nazywamy punktem **osobliwym odosobnionym** funkcji f.*

Przykład 6.3. Funkcja $f(z) = 2\cos z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2+1}$ ma trzy punkty osobliwe odosobnione: $0, i, -i$. Każdy inny punkt płaszczyzny zespolonej jest punktem regularnym tej funkcji. □

Niech $z_0 \in \Omega$ będzie punktem osobliwym odosobnionym funkcji f. Wyróżniamy trzy typy osobliwości funkcji f:
1. Część główna rozwinięcia funkcji f w szereg Laurenta równa jest zero, czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n.$$

Punkt z_0 nazywa się wówczas punktem ***pozornie osobliwym*** funkcji f. W tym przypadku istnieje granica skończona $\lim_{z \to z_0} f(z) = a_0$.

Przyjmując $f(z_0) := a_0$ pozbywamy się osobliwości i otrzymujemy funkcję będącą sumą szeregu potęgowego, a więc holomorficzną w punkcie z_0. Tego rodzaju osobliwość nazywamy też osobliwością usuwalną.

Przykład 6.4. Punkt $z_0 = 0$ jest punktem pozornie osobliwym funkcji $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$, ponieważ dla każdego $z \neq 0$

$$\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots)}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \ldots .$$

Przyjmując $f(0) = \frac{1}{2}$ usuwamy osobliwość i otrzymujemy funkcję holomorficzną na całej płaszczyźnie Ω. □

2.Część główna rozwinięcia funkcji f w szereg Laurenta zawiera skończoną liczbę wyrazów, czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Punkt z_0 nazywa się wówczas ***biegunem k-krotnym*** funkcji f.

Przykład 6.5. Punkt $z_0 = 0$ jest biegunem pojedynczym funkcji

$$f(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\frac{1}{z}$$

oraz biegunem dwukrotnym dla pochodnej

$$f'(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{z^2}.$$

□

3.Część główna rozwinięcia funkcji f w szereg Laurenta zawiera nieskończenie wiele wyrazów, czyli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Punkt z_0 nazywa się wówczas punktem ***istotnie osobliwym*** funkcji f.

Przykład 6.6. Punkt $z_0 = 0$ jest punktem istotnie osobliwym funkcji $f(z) = \sin \frac{1}{z}$, gdyż dla każdego $z \neq 0$

$$\sin \frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots .$$

□

Klasyfikację punktów osobliwych odosobnionych funkcji f można również przeprowadzić bez rozwijania jej w szereg Laurenta.

Twierdzenie 6.7. *1. Jeżeli* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = g < \infty$*, to punkt* z_0 *jest punktem pozornie osobliwym funkcji* f.
2. Jeżeli $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = +\infty$*, to punkt* z_0 *jest biegunem funkcji* f.
3. Jeżeli funkcja f*, gdy* $z \to z_0$*, nie dąży do żadnej granicy (skończonej ani nieskończonej), to punkt* z_0 *jest punktem istotnie osobliwym funkcji* f.

Gdy punkt z_0 jest biegunem k-krotnym funkcji f, wtedy dla funkcji $\frac{1}{f}$ jest on zerem k-krotnym
Gdy punkt z_0 jest zerem k-krotnym funkcji g, wtedy dla funkcji $\frac{1}{g}$ jest on biegunem k-krotnym.

Przykład 6.8. Funkcja $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ma w punkcie $z_0 = 0$ punkt pozornie osobliwy, gdyż $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. Rozwijając funkcję f w szereg Laurenta otrzymujemy

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

Przyjmując $f(0) = 1$ funkcja $\frac{\sin z}{z}$ staje się holomorficzna w punkcie $z_0 = 0$.□

Przykład 6.9. Funkcja

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1} = -\frac{i}{2}\frac{1}{z-i} + \frac{i}{2}\frac{1}{z+i}$$

ma w punktach $z_1 = i$ oraz $z_2 = -i$ bieguny jednokrotne, gdyż funkcja $\frac{1}{f(z)} = z^2 + 1$ ma w tych punktach zera jednokrotne. □

Przykład 6.10. Funkcja $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ ma w punkcie $z_0 = 0$ punkt istotnie osobliwy, gdyż nie istnieje granica $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$. Rozwinięcie funkcji $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ w szereg Laurenta jest następujące:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots, \quad \text{dla} \quad 0 <| z |< \infty.$$

□

7 Residuum funkcji zespolonej

Niech $z_0 \in \Omega$ i niech funkcja f będzie holomorficzna w pewnym pierścieniu $P = \{z \in \Omega \mid 0 <| z - z_0 |< R\}$. Niech C będzie dowolną kawałkami gładką krzywą Jordana, skierowaną dodatnio względem wnętrza, zawartą w pierścieniu P i zawierającą w swym wnętrzu punkt z_0. Na mocy twierdzenia Cauchy wartość całki $\int\limits_C f(z)dz$ nie zależy od wyboru krzywej C.

Definicja 7.1. *Liczbę*

$$res_{z_0} f(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(z)dz$$

nazywamy ***residuum*** *(pozostałość) funkcji f w punkcie z_0.*

Twierdzenie 7.2. *Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w pierścieniu $P = \{z \in \Omega \mid 0 <\mid z - z_0 \mid< R\}$, to*

$$res_{z_0} f(z) = a_{-1},$$

gdzie a_{-1} równa się współczynnikowi przy wyrazie $(z - z_0)^{-1}$ w rozwinięciu funkcji f w szereg Laurenta w pierścieniu P.

Wniosek 7.3. *Residuum funkcji w punkcie regularnym lub w punkcie pozornie osobliwym jest równe zero.*

Twierdzenie 7.4. *Jeżeli punkt $z_0 \in \Omega$ jest biegunem jednokrotnym funkcji f, to*

$$res_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Przykład 7.5.

$$res_1 \frac{z}{z^2 - 1} = \lim_{z \to 1} (z - 1) \frac{z}{z^2 - 1} = \lim_{z \to 1} \frac{z}{z + 1} = \frac{1}{2}.$$

□

Twierdzenie 7.6. *Jeżeli punkt $z_0 \in \Omega$ jest biegunem k-krotnym funkcji f, to*

$$res_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)).$$

Przykład 7.7.

$$res_2 \frac{z}{(z-2)^2(z+1)} = \lim_{z \to 2} \frac{d}{dz} (\frac{z}{z+1}) = \lim_{z \to 2} \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{9},$$

$$res_0 \frac{z+1}{z^3(z-1)} = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} (\frac{z+1}{z-1}) = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} (1 + \frac{2}{z-1}) =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} (\frac{2}{z-1}) = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \frac{4}{(z-1)^3} = -2.$$

□

Jeżeli z_0 jest punktem istotnie osobliwym funkcji f, to jej residuum w tym punkcie należy obliczać przez rozwinięcie funkcji f w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu z_0.

Przykład 7.8.

$$res_0 \sin\frac{\pi}{2z} = \frac{\pi}{2},$$

gdyż rozwinięcie funkcji $\sin\frac{\pi}{2z}$ w szereg Laurenta w sąsiedztwie punktu $z_0 = 0$ ma postać:

$$\sin\frac{\pi}{2z} = \frac{\pi}{2z} - \frac{\pi^3}{48z^3} + \dots.$$

□

Twierdzenie 7.9. (Całkowe o residuach)
Jeżeli f jest funkcją holomorficzną w obszarze jednospójnym D z wyjątkiem co najwyżej punktów $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$, $C \subset D$ jest kawałkami gładką krzywą Jordana, skierowaną dodatnio względem swego wnętrza i zawierającą punkty $z_1, z_2, \dots, z_n$ w swym wnętrzu, to

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f(z).$$

Przykład 7.10. Niech C będzie dodatnio skierowaną elipsą o równaniu $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$. Funkcja $(z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$ ma w punktach $z_1 = i$ oraz $z_2 = -i$ zera dwukrotne. Stąd funkcja $f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)^2}$ ma w tych punktach bieguny dwukrotne. Tylko biegun $z_1 = i$ leży wewnątrz krzywej C. Stąd na mocy twierdzenia o residuach

$$\int_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i res_i f(z).$$

Ponieważ

$$res_i f(z) = \lim_{z \to i} \frac{d}{dz}((z-i)^2 \frac{e^z}{(z-i)^2(z+i)^2}) = -\frac{e^i(1+i)}{4}.$$

Stąd

$$\int\limits_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \frac{-e^i(1+i)}{4} = \frac{\pi}{2} e^i (1-i).$$

□

Literatura

[1] I. Dziubiński, L. Siewierski, *Matematyka dla wyzszych szkół technicznych*, tom 2, PWN, Warszawa, 1985.

[2] F. Leja, *Funkcje zespolone*, PWN, Warszawa, 1979.

[3] W. Żakowski, W. Leksiński, *Matematyka część IV*, WNT, Warszawa, 1982.