1. (5p.) Niech G będzie grafem a v będzie wierzchołkiem grafu G. Pokaż, że jeśli G nie jest k-spójny, ale $G - v$ jest k-spójny, to $\deg v \leqslant k - 1$.

Rozwiązanie. Rozważmy najpierw przypadek, kiedy G jest grafem pełnym, niech n oznacza liczbę jego wierzchołków. Skoro G nie jest k-spójny, to $n \leqslant k$. Z drugiej strony, skoro $G-v$ jest k-spójny, to $n-1 \geqslant k+1$, sprzeczność.

Zatem G nie jest grafem pełnym. Skoro nie jest k-spójny, zawiera zbiór $S \subseteq V(G)$ rozmiaru co najwyżej $k-1$, dla którego graf $G - S$ ma co najmniej dwie składowe.

Zauważmy, że jeśli $(G-v)-S$ także ma co najmniej dwie składowe, to $G-v$ nie jest k-spójny, sprzeczność. W szczególności oznacza to, że $G-S$ ma dwie składowe i jedna z nich ma tylko jeden wierzchołek – v. Sąsiedzi v należą do zbioru S, zatem jest ich co najwyżej $|S| \leqslant k - 1$. □

2. (5p.) Niech k, n będą liczbami naturalnymi, takimi że $k > 2$ i $n \geqslant 2k + 1$. Niech $G(n, k)$ będzie grafem o zbiorze wierzchołków $\{0, \ldots, n-1\}$, w którym i, j jest krawędzią wtedy i tylko wtedy, gdy

$$j - i = \pm\, 2 \pmod{n} \text{ lub } j - i = \pm\, k \pmod{n}.$$

Zbadaj, dla jakich k i n graf $G(n, k)$ jest eulerowski.

Rozwiązanie. Chcemy skorzystać z twierdzenia Eulera. Sprawdźmy najpierw stopnie wierzchołków. Ponieważ $k > 2$ i $n \geqslant 2k + 1$, każdy wierzchołek i ma czterech sąsiadów: $i - k, i - 2, i + 2, i + k$ (działania modulo n). Zatem niezależnie od wartości n, k, każdy wierzchołek ma parzysty stopień.

Teraz sprawdźmy spójność. Niech krawędzie typu 2 (odpowiednio, k) oznaczają krawędzie łączące wierzchołki o numerach różniących się o 2 (różniących się o k). Jeśli n jest nieparzyste, graf jest spójny: krawędzie typu 2 tworzą w nim cykl Hamiltona.

Załóżmy zatem, że n jest parzyste. Jeśli k jest liczbą parzystą, graf jest niespójny: nie ma żadnej krawędzi łączącej wierzchołek o numerze parzystym z wierzchołkiem o numerze nieparzystym.

Pozostał przypadek, że k jest nieparzyste. Wówczas graf jest spójny: krawędzie typu 2 tworzą dwa cykle, z których jeden zawiera wszystkie wierzchołki o numerach parzystych, a drugi wszystkie wierzchołki o numerach nieparzystych. Dowolna krawędź typu k łączy te dwa cykle. Zatem cały graf jest spójny.

Podsumowując, graf $G(n, k)$ jest eulerowski wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna z liczb n, k jest nieparzysta. □

3. (5p.) Wykaż, że dla dowolnego grafu G, następujące warunki są równoważne:

i) G jest cyklem;

ii) G jest hamiltonowski, ale dla każdej krawędzi $e \in E(G)$, graf $G - e$ nie jest hamiltonowski.

Rozwiązanie.

i) $\Rightarrow$ ii). Jeżeli G jest cyklem, to jest oczywiście hamiltonowski. Ponadto, dla dowolnej krawędzi e, graf $G - e$ jest ścieżką, więc nie zawiera żadnego cyklu.

ii) $\Rightarrow$ i). Przypuśćmy przeciwnie, czyli G spełnia warunek ii), ale nie jest cyklem. Niech C będzie cyklem Hamiltona w G. W szczególności graf G jest spójny. Skoro G nie jest cyklem i jest spójny, to istnieje krawędź $e \in E(G) \setminus E(C)$. Wówczas C jest cyklem Hamiltona grafu $G - e$, sprzeczność z warunkiem ii). $\square$

4. (5p.) Niech $n \geqslant 4$ będzie liczbą parzystą. Zdefiniujmy następujący graf G:

$$V(G) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\},$$
$$E(G) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}, x_i y_i, x_i y_{i+1}, y_i x_{i+1}\}$$

(wszystkie działania na indeksach wykonujemy modulo n). Wyznacz $\chi'(G)$.

Rozwiązanie. Sąsiedzi wierzchołka x_i to $x_{i-1}, x_{i+1}, y_{i-1}, y_{i+1}, y_i$ (działania modulo n). Dla wierzchołków y_i sytuacja jest symetryczna, zatem graf jest 5-regularny. Oznacza to, że $\chi'(G) \geqslant 5$.

Zdefiniujmy teraz poprawne 5-kolorowanie c krawędzi grafu G, patrz rysunek poniżej:

$$c(e) = \begin{cases} 1 \text{ jeśli } e = x_i x_{i+1} \text{ lub } e = y_i y_{i+1}, \text{ gdzie } i \text{ jest parzyste,} \\ 2 \text{ jeśli } e = x_i x_{i+1} \text{ lub } e = y_i y_{i+1}, \text{ gdzie } i \text{ jest nieparzyste,} \\ 3 \text{ jeśli } e = x_i y_{i+1}, \\ 4 \text{ jeśli } e = y_i x_{i+1}, \\ 5 \text{ jeśli } e = x_i y_i. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla każdego wierzchołka, każda z pięciu krawędzi z nim incydentnych ma inny kolor (patrz rysunek, korzystamy tu z tego, że n jest parzyste). Oznacza to, że $\chi'(G) \leqslant 5$. Podsumowując, otrzymujemy $\chi'(G) = 5$. □

