

## zadania rozgrzewkowe

**Zadanie 1 (1p)**

Przepisz 10 razy tabelkę

| $\int$                         | $a < 1$   | $a = 1$   | $a > 1$   |
|--------------------------------|-----------|-----------|-----------|
| $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$      | zbieżna   | rozbieżna | rozbieżna |
| $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ | rozbieżna | rozbieżna | zbieżna   |

**Zadanie 2 (1p)**

Przepisz 10 razy tabelkę

| $\int$                         | $a < 1$    | $a = 1$  | $a > 1$    |
|--------------------------------|------------|----------|------------|
| $\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$      | $< \infty$ | $\infty$ | $\infty$   |
| $\int_1^\infty \frac{dx}{x^a}$ | $\infty$   | $\infty$ | $< \infty$ |

**Zadanie 3 (0.5 p)**

Korzystając z powyższej tabelki określ zbieżność całki. Jeśli jest zbieżna, oblicz ile wynosi

- a)  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$
- b)  $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$
- c)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- d)  $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- e)  $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$
- f)  $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$
- g)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}} dx$
- h)  $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x}} dx$
- i)  $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$
- j)  $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$
- k)  $\int_0^\infty \frac{1}{x} dx$
- l)  $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx$
- m)  $\int_0^\infty \frac{1}{x^2} dx$

## zadania rozgrzewkowe

**Zadanie 4 (0.5 p)**

Rozpoznaj, które z poniższych całek to całki niewłaściwe

a)  $\int_1^{100} \frac{1}{x} dx$

b)  $\int_{-3}^0 \frac{x}{x+4} dx$

c)  $\int_0^1 \frac{x}{x-1} dx$

d)  $\int_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

e)  $\int_0^1 \frac{1}{x^2+5x+6} dx$

f)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{e^x-1} dx$

g)  $\int_{-5}^0 \frac{x}{e^x+5} dx$

h)  $\int_1^5 \frac{1}{\ln x} dx$

i)  $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$

j)  $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2} dx$

## Zadania obowiązkowe

**Zadanie 5 (2p)**

Oblicz całki niewłaściwe

a)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+9} dx$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{3}{x^2+2x+2} dx$

c)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+5x+6} dx$

d)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{4x^2+4x+5} dx$

e)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$

f)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+4)^2} dx$

**Zadanie 6 (2.5p)**

Oblicz całki niewłaściwe

a)  $\int_5^{\infty} \frac{1}{x^3-7x^2+14x-8} dx$

b)  $\int_5^{\infty} \frac{1}{x^3+4x^2+5x} dx$

c)  $\int_0^{\infty} \frac{2x+3}{x^3+5x^2+8x+4} dx$

d)  $\int_0^{\infty} \frac{x+1}{16+32x+24x^2+8x^3+x^4} dx$

**Zadanie 7 (2p)**

Oblicz całki niewłaściwe

a)  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

b)  $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

c)  $\int_{-\infty}^0 x^2 e^x dx$

d)  $\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$

e)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{e^x+1} dx$

**Zadanie 8 (3p)**

Oblicz całki niewłaściwe

a)  $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

b)  $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

c)  $\int_{-2}^0 \frac{1}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx$

d)  $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx$

## Zadania obowiązkowe

**Zadanie 9 (2.5p)**

Oblicz całki niewłaściwe

a)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$

b)  $\int_0^1 \ln x dx$

c)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$

d)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

**Zadanie 10 (2p)**

Nie licząc całek, zbadaj czy są zbieżne

a)  $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

b)  $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$

c)  $\int_0^1 x \ln x dx$

d)  $\int_1^{\infty} \frac{x^2 + 7}{x^{2122} + x + 1} dx$

e)  $\int_1^{\infty} \frac{1}{e^x + \sqrt{x}} dx$

**Zadanie 11 (2p)**

Korzystając z kryterium całkowego zbadaj zbieżność szeregu

a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$

b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}$

c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^a n}$

Tylko dla chętnych

**Zadanie 12 (5p)**

Oblicz całki niewłaściwe

a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac < 0$

b)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad a, b, c \geq 0, \quad b^2 - 4ac \geq 0$

c)  $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$

d)  $\int_0^{\infty} \cos(bx)e^{-ax}dx, \quad a > 0, \quad b > 0$

e)  $\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x}, \quad a > b > 0$

f)  $\int_a^b \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$

**Zadanie 13 (9p)**

Podaj przykład funkcji ciągłej, określonej na zbiorze  $[0, \infty)$ , takiej że dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  zachodzi  $f(n) = n$ , tj.

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 4, \dots$$

i całka  $\int_0^{\infty} f(x)dx$  jest zbieżna.

**Zadanie 14 (9p)**

Zbadaj zbieżność całki

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

**Zadanie 15 (10p)**

Zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$$

Tylko dla chętnych

**Zadanie 16 - Całka Froullaniego (10p)**

Założmy, że  $f(x)$  jest określona i ciągła w przedziale  $[0, \infty)$  oraz istnieje skończona granica  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = f(\infty)$ . Wykaż, że

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(\infty)) \ln \frac{b}{a}$$

Korzystając z tego faktu oblicz całki

a)  $\int_a^b \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$

b)  $\int_a^b \frac{\arctan ax - \arctan bx}{x} dx$

**Zadanie 17 (10p)**

Dla jakich par  $(a, b)$  dodatnich liczb rzeczywistych poniższa całka jest zbieżna

$$\int_b^\infty \left( \sqrt{\sqrt{x+a} - \sqrt{x}} - \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-b}} \right) dx$$

**Zadanie 18 (10p)**

Oblicz całkę

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-1985(x+x^{-1})} dx$$

Wskazówka:  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$