Funkcje tworzące - przykładowe zadania

http://mini.pw.edu.pl/~sokolj

1. Za pomocą funkcji tworzących znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_n = 2a_{n-1} + 3 \text{ dla } n \geq 1, \;\; a_0 = 0$$

Rozwiązanie

Zaczynamy od znalezienia funkcji tworzącej:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (2a_{n-1} + 3) x^n = 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$$

W obu sumach podstawmy $m = n-1$. Sumowanie zaczynaliśmy przy $n = 1$, więc teraz zaczniemy od $m = 1 - 1 = 0$.

$$f(x) = 2x \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m + 3x \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 2xf(x) + \frac{3x}{1-x}$$

$$f(x)(1-2x) = \frac{3x}{1-x}$$

$$f(x) = \frac{3x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1-2x} = \frac{A(1-2x) + B(1-x)}{(1-x)(1-2x)}$$

Stąd $3x = A(1-2x) + B(1-x) = A - 2Ax + B - Bx = (A+B) + (-2A-B)x$. Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach x (przy x^0 i x^1), otrzymujemy $A + B = 0$ i $-2A - B = 3$ $\Longrightarrow A = -3$ i $B = 3$.

Ostatecznie otrzymujemy funkcję tworzącą postaci:

$$f(x) = \frac{-3}{1-x} + \frac{3}{1-2x}$$

Rozwijamy ją w szereg potęgowy (korzystając ze wzoru na szereg geometryczny):

$$f(x) = -3\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-3x^n + 3 \cdot 2^n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (-3 + 3 \cdot 2^n) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(ostatnia równość wynika z definicji funkcji tworzącej).

Stąd $a_n = -3 + 3 \cdot 2^n = 3(2^n - 1)$.

Sprawdzenie dla pierwszych wyrazów ciągu

	wzrór rekurencyjny $a_n = 2a_{n-1} + 3$ dla $n \geq 1, \;\; a_0 = 0$	wzór jawny $a_n = 3(2^n - 1)$
$n = 0$	$a_0 = 0$	$a_0 = 3(2^0 - 1) = 3(1-1) = 0$
$n = 1$	$a_1 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$	$a_1 = 3(2^1 - 1) = 3(2-1) = 3$
$n = 2$	$a_2 = 2 \cdot 3 + 3 = 9$	$a_2 = 3(2^2 - 1) = 3(4-1) = 9$
$n = 3$	$a_3 = 2 \cdot 9 + 3 = 3$	$a_3 = 3(2^3 - 1) = 3(8-1) = 21$

2. Za pomocą funkcji tworzących znajdź wzór jawny na n-ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie w następujący sposób:

$$a_n = 5a_{n-1} + 3^n \text{ dla } n \geq 1, \; a_0 = 1$$

Rozwiązanie

Zaczynamy od znalezienia funkcji tworzącej:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (5a_{n-1} + 3^n) x^n = 1 + 5x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 3x \sum_{n=1}^{\infty} (3x)^{n-1}$$

W obu sumach podstawmy $m = n - 1$. Sumowanie zaczynaliśmy przy $n = 1$, więc teraz zaczniemy od $m = 1 - 1 = 0$.

$$f(x) = 1 + 5x \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m + 3x \sum_{m=0}^{\infty} (3x)^m = 1 + 5x f(x) + \frac{3x}{1-3x}$$

$$f(x)(1-5x) = 1 + \frac{3x}{1-3x} = \frac{1-3x+3x}{1-3x} = \frac{1}{1-3x}$$

$$f(x) = \frac{1}{(1-3x)(1-5x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1-5x} = \frac{A(1-5x) + B(1-3x)}{(1-3x)(1-5x)}$$

Stąd $1 = A(1-5x) + B(1-3x) = A - 5Ax + B - 3Bx = (A+B) + (-5A-3B)x$. Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach x (przy x^0 i x^1), otrzymujemy $A + B = 1$ i $-5A - 3B = 0$ $\implies A = -\frac{3}{2}$ i $B = \frac{5}{2}$.

Ostatecznie otrzymujemy funkcję tworzącą postaci:

$$f(x) = \frac{-\frac{3}{2}}{1-3x} + \frac{\frac{5}{2}}{1-5x}$$

Rozwijamy ją w szereg potęgowy (korzystając ze wzoru na szereg geometryczny):

$$f(x) = -\frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n + \frac{5}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{2} \cdot 3^n x^n + \frac{5}{2} \cdot 5^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-3^{n+1} + 5^{n+1}}{2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

(ostatnia równość wynika z definicji funkcji tworzącej). Stąd

$$a_n = \frac{-3^{n+1} + 5^{n+1}}{2} = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 3^{n+1})$$

.

Sprawdzenie dla pierwszych wyrazów ciągu

	wzór rekurencyjny $a_n = 5a_{n-1} + 3^n$ dla $n \geq 1, \; a_0 = 1$	wzór jawny $a_n = \frac{1}{2}(5^{n+1} - 3^{n+1})$
$n = 0$	$a_0 = 1$	$a_0 = \frac{1}{2}(5-3) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$
$n = 1$	$a_1 = 5 \cdot 1 + 3 = 8$	$a_1 = \frac{1}{2}(25-9) = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$
$n = 2$	$a_2 = 5 \cdot 8 + 9 = 49$	$a_2 = \frac{1}{2}(125-27) = \frac{1}{2} \cdot 98 = 49$
$n = 3$	$a_3 = 5 \cdot 49 + 27 = 272$	$a_3 = \frac{1}{2}(625-81) = \frac{1}{2} \cdot 544 = 272$