MD 0 Indukcja

Udowodnić indukcyjnie:

0.1. $1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\ldots+n\cdot2^n = 2+(n-1)2^{n+1}$

0.2. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$,

0.3. $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots n\cdot n! = (n+1)!-1$,

0.4. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+..+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}, \quad n\geqslant 2$,

0.5. $n^3<4^n$,

0.6. $3^n>n2^n$,

0.7. $\binom{2n}{n}>2n$ dla $n>1$,

0.8. $5n\leqslant n^2-3$ dla $n\geqslant 6$,

0.9. $8|5^n+2\cdot3^{n-1}+1$,

0.10. $11|2^{6n+1}+3^{2n+2}$,

0.11. $133|11^{n+2}+12^{2n+1}$,

0.12. Udowodnić indukcyjnie, że suma kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta wynosi $(n-2)\pi$.

0.13. W grafie skierowanym każda para różnych punktów jest połączona strzałką w jednym kierunku. Udowodnić, że istnieje centrum czyli punkt, z którego można dojść do każdego innego punktu w co najwyżej dwóch krokach poruszając się zgodnie z kierunkiem strzałek.

0.14. Niech $(A_1, A_2, ..)$ będzie ciągiem podzbiorów pewnego zbioru U. Niech $S(1)=A_1$, $S(n+1)=A_{n+1}\div S(n)$, $n\geqslant 1$. Udowodnić indukcyjnie, że dowolny $x\in U$ należy do $S(n)$ wtedy i tylko wtedy gdy zbiór $\{k : x\in A_k, k\leqslant n\}$ ma nieparzystą liczbę elementów.

0.15. Niech $A=\{n\in\mathbb{N} : 2|n^2-3n+3\}$. Wykazać, że jeśli $n\in A$ to $n+1\in A$. Znaleźć dowolny element zbioru A.

0.16. Dany jest ciąg $a_0\in\mathbb{R}$, $\quad a_n=\frac{a_{n-1}}{2a_{n-1}+1}$. Napisać i udowodnić ogólny wzór ciągu.

0.17. Na ile najwięcej kawałków można podzielić pizzę przy pomocy n cięć. Znaleźć rekurencyjną zależność oraz wzór ogólny, udowodnić indukcyjnie poprawność tego wzoru.

0.18. Udowodnimy indukcyjnie, że wszystkie koty są tego samego koloru. Krok pierwszy: Weźmy jednego kota. Jest on tego samego koloru co on sam.

Krok indukcyjny: Załóżmy że każde n kotów jest tego samego koloru. Pokażemy, że wtedy każde $n+1$ kotów jest tego samego koloru.

Weźmy $n+1$ kotów. Bez pierwszego będzie ich n, zatem są tego samego koloru na mocy założenia indukcyjnego. Bez ostatniego też jest ich n, więc są tego samego koloru. Środkowe koty nie zmieniają koloru, więc wszystkie $n+1$ muszą mieć ten sam kolor. Na podstawie indukcji matematycznej wykazaliśmy, że wszystkie koty mają ten sam kolor.