MDI 2 Zestaw 5: KOLOROWANIE WIERZCHOŁKOWE

5.1 Pokaż, że graf G jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma nieparzystych cykli.

5.2 () Niech $\alpha(G)$ oznacza liczność największego zbioru niezależnego w G. Pokaż, że $n \le \alpha(G)\chi(G)$.

5.3 Jaka jest liczba chromatyczna grafu otrzymanego z grafu pełnego K_n przez wyrzucenie

a) jednej krawędzi,

b) dwóch krawędzi,

c) trzech krawędzi tworzących trójkąt?

5.4 Niech $G_n := (\mathbb{Z}_n, E_n)$, gdzie $E_n := \{uv : u = v + 1 \lor u = v + 2\}$. Wyznacz $\chi(G_n)$.

5.5 Dla pewnego grafu $G = (V, E)$ i pewnego zbioru $V' \subset V$ konstruujemy graf

$$G' = (V, E \cup \{(u, w) : u \in V', w \in V - V'\}).$$

Wykaż, że wówczas $\chi(G') \leqslant 2 \cdot \chi(G)$.

5.6 *Kostką d-wymiarową* nazywamy graf Q_d, którego wierzchołkami są wszystkie d-elementowe ciągi binarne, $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$ sąsiaduje z $(b_1, b_2, \ldots, b_d)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedno i, że $a_i \neq b_i$. Jaka jest liczba chromatyczna Q_d?

5.7 Pokaż, że a) $\chi(G \square H) \le \chi(G) \cdot \chi(H)$ b)() $\chi(G \square H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$.

5.8 Niech $(d_1, .., d_n)$ będzie ciągiem stopni wierzchołków G. Pokaż, że $\chi(G) \le \max\limits_{i \in \{1,..,n\}} \min\{d_i + 1, i\}$.

5.9 Pokaż, że jeśli G jest spójny i $\delta(G) < \Delta(G)$, to $\chi(G) \le \Delta(G)$. Czy można pominąć założenie o spójności?

5.10 Udowodnij twierdzenie Szekeresa-Wilfa: $\chi(G) \le \max\limits_{H \subseteq G \text{ indukowany}} \{\delta(H) + 1\}$.

5.11 Pokazać, że jeśli graf G jest pokolorowany właściwie na $\chi(G)$ kolorów, to w każdym kolorze istnieje wierzchołek stopnia co najmniej $\chi(G) - 1$.

5.12 Pokaż, że

a) $\chi(G)\chi(\overline{G}) \ge n$, b) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \ge 2\sqrt{n}$,

c) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \le n + 1$, d) $\chi(G)\chi(\overline{G}) \le (n+1)^2/4$.

5.13 Pokaż, że każdy graf krytyczny jest bispójny.

5.14 Pokaż, że w grafie krytycznym nie ma zbioru rozcinającego, który jest kliką.

5.15 Scharakteryzuj wszystkie grafy 3-krytyczne.

5.16 Pokaż, że dla każdego grafu istnieje ustawienie jego wierzchołków w ciąg, dla którego algorytm zachłanny pokoloruje graf optymalnie.

5.17 Algorytm `Largest First`: Najpierw uporządkuj wierzchołki według stopni, od największego. Następnie pokoloruj graf zachłannie, rozpatrując wierzchołki w tej kolejności. Pokaż, że dla żadnego c algorytm `Largest First` nie jest c-aproksymacyjny, nawet jeśli graf wejściowy jest drzewem.

5.18 Algorytm `Smallest Last`: Skonstruuj permutację wierzchołków w następujący sposób: znajdź wierzchołek najniższego stopnia w grafie G, usuń go i wstaw na koniec ciągu. Powtarzamy ten krok, dopóki w grafie są jeszcze wierzchołki. Następnie pokoloruj graf zachłannie, rozpatrując wierzchołki zgodnie z kolejnością w skonstruowanej permutacji.

a) pokaż, że algorytm `Smallest Last` optymalnie koloruje drzewa,

b) pokaż, że algorytm `Smallest Last` nie jest algorytmem optymalnym.