MDI 2 Zestaw 6: SKOJARZENIA

6.1 Pokazać, że jeśli G jest grafem dwudzielnym o klasach X i Y, to maksymalna liczba krawędzi skojarzenia wynosi $\min_{A \subseteq X}(|X - A| + |N(A)|)$, gdzie $N(A)$ oznacza zbiór sąsiadów w G wierzchołków należących do A (twierdzenie Königa-Egerváry'ego).

6.2 Klaster obliczeniowy ma pewną liczbę k-rdzeniowych procesorów. Chcemy wykonać program równoległy, składający się z niezależnych od siebie procesów. Nie każdy proces może być wykonywany przez każdy procesor, ale wszystkie rdzenie należące do jednego procesora mogą wykonywać te same procesy. Sformułuj warunek konieczny i wystarczający na to, by każdy proces dało się przypisać do innego rdzenia (nie każdy procesor musi być wykorzystany).

6.3 Udowodnij twierdzenie Königa: Jeśli G jest dwudzielny, to $\chi'(G) = \Delta(G)$. Podpowiedź:

(a) Pokaż, że graf dwudzielny regularny ma skojarzenie doskonałe.

(b) Pokaż, że graf dwudzielny G jest podgrafem pewnego $\Delta(G)$-regularnego grafu dwudzielnego.

6.4 Udowodnić, że każdy prostokąt łaciński można rozszerzyć do kwadratu łacińskiego (macierz wymiaru $n \times m$ o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$ jest prostokątem łacińskim, jeśli w żadnej kolumnie ani wierszu nie powtarza się żaden wyraz).

6.5 Wykazać, że prostokąt łaciński $n \times m$ można rozszerzyć na co najmniej $(m - n)!$ sposobów. Znaleźć dolne ograniczenie na liczbę kwadratów łacińskich $m \times m$.

6.6 (⚙) Przypuśćmy, że warunek Halla jest spełniony i że każda z m dziewcząt akceptuje przynajmniej t kawalerów. Udowodnić, że małżeństwa mogą być skojarzone na $t!$ sposobów gdy $t \leq m$ i na $t!/(t - m)!$ sposobów gdy $t > m$ (tw. Halla, zbieżność nazwisk przypadkowa).

6.7 Popraw dolne ograniczenie na liczbę kwadratów łacińskim, korzystając z zadania 6.6.

6.8 Pokazać, że w dowolnej grupie m panien i n kawalerów istnieje k panien, którym można znaleźć mężów wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny podzbiór S panien akceptuje łącznie przynajmniej $|S| + k - m$ kawalerów.

6.9 (✎) Czy istnieją systemy różnych reprezentantów dla rodzin zbiorów

a) $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}, \{1, 2\}, \{1\}, \{2, 3\}$,

b) $\{1, 3, 4, 6\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{4, 6\}, \{4, 5, 6\}$,

c) $\{1, 2, 4, \}, \{2, 3, 6\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}$?

6.10 Dla danego $J_0 \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $J_0 \neq \emptyset$ podać przykład ciągu $\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$, $A_i \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, który nie ma systemu różnych reprezentantów, lecz spełniony jest warunek

$$\forall J \neq J_0 \; \left| \bigcup_{j \in J} A_j \right| \geq |J| \,.$$

6.11 Pokazać, że warunek Halla dla ciągu $\langle A_1, A_2, \ldots A_n \rangle$ podzbiorów zbioru X jest równoważny warunkowi $|\{i : A_i \subseteq Y\}| \leq |Y|$ dla każdego $Y \subseteq X$.

6.12 Zmodyfikuj algorytm Edmondsa (metodę węgierską), aby znajdował najliczniejsze skojarzenie w grafie dwudzielnym G.

6.13 (⚙) Zaprojektuj wielomianowy algorytm 2-aproksymacyjny dla problemu znajdowania najmniejszego maksymalnego skojarzenia w grafie.