MDI 2 Zestaw 7: Przepływy w sieciach

7.1 (✐) Udowodnij Własność 1: Jeśli N jest siecią o źródle s i ujściu t, a f jest przepływem w N, to $f^+(s) - f^-(s) = f^-(t) - f^+(t)$.

7.2 Udowodnij Lemat 2: Dla dowolnego przepływu f w N i dowolnego przekroju $(S, V \setminus S)$ zachodzi $\operatorname{val} f = f^+(S) - f^-(S)$.

7.3 (✐) Udowodnij Obserwację 5: Niech f będzie przepływem, a P ścieżką f-powiększającą. Zdefiniujmy:

$$\hat{f} = \begin{cases} f(a) + r(P) & \text{jeśli } a \text{ jest łukiem na } P \text{ skierowanym w przód,} \\ f(a) - r(P) & \text{jeśli } a \text{ jest łukiem na } P \text{ skierowanym w tył,} \\ f(a) & \text{jeśli } a \text{ nie należy do } P. \end{cases}$$

Pokaż, że $\hat{f}$ jest przepływem i $\operatorname{val} \hat{f} = \operatorname{val} f + r(P)$.

7.4 Zaproponuj algorytm znajdowania maksymalnego przepływu w sieci z wieloma źródłami i wieloma ujściami. Przepływ w takiej sieci definiujemy analogicznie do sieci z jednym źródłem i jednym ujściem. Jeśli S jest zbiorem źródeł i T jest zbiorem ujść, to dla każdego $v \notin S \cup T$ funkcja przepływu spełnia prawo Kirchhoffa, a wartość przepływu f wynosi $f^+(S) - f^-(S) = f^-(T) - f^+(T)$ (dlaczego zachodzi równość?).

7.5 Niech $N = (G, c, s, t)$ będzie siecią. Niech $p\colon V(G) \setminus \{s, t\} \to [0, +\infty)$ będzie *przepustowością wierzchołkową*. Zaproponuj algorytm znajdowania maksymalnego przepływu f w sieci N z dodatkowym założeniem, że dla każdego wierzchołka $v \notin \{s, t\}$ zachodzi $f^+(v) \le p(v)$.

7.6 Jak problem znajdowania spójności krawędziowej grafu sprowadzić do problemu znajdowania maksymalnego przepływu?

7.7 (⚙) Sprowadzając do problemu znajdowania maksymalnego przepływu w sieci pokazać, że w dowolnym grafie dwudzielnym maksymalna liczność skojarzenia równa się minimalnej liczności pokrycia wierzchołkowego.

7.8 (⚙) Pojęcie przepływów w sieciach można w naturalny sposób rozszerzyć na sieci, w których fukcja przepustowości przyjmuje dowolne wartości rzeczywiste dodatnie. Pokaż, że algorytm Forda-Fulkersona nie zadziała dla takich sieci.

Wskazówka: Skorzystaj z sieci poniżej, $r = (\sqrt{5} - 1)/2$, zauważ, że $r^2 = 1 - r$.