# **MD 3** Tożsamości

3.1. Udowodnić następujące tożsamości (nadając obu stronom równości odpowiednie interpretacje kombinatoryczne)

$a)\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0,\ n\neq 0$ $\quad b)\ \binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ - było na wykładzie,

$c)\ \binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2,$ $\quad d)\ \binom{n}{m}\binom{m}{k}=\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k},$ $\quad e)\ \sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k}=\binom{r+n+1}{n},$

$f)\ \sum_{r=0}^{n}\binom{r}{k}=\binom{n+1}{k+1},$ $\quad g)\ \binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1},$ $\quad h)\ \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}i=n2^{n-1},$

$i)\ \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\binom{n-j}{k-j}=\binom{n}{k}2^k,$ $\quad j)\ m^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(m-1)^{n-k}.$

3.2. Pokazać, że

$$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\ldots<\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}=\binom{n}{\lceil\frac{n}{2}\rceil}>\ldots>\binom{n}{n}.$$

3.3. Udowodnić następujące tożsamości

(a) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{j}=\begin{cases}0, & \text{jeśli } n\neq j\\ (-1)^n & \text{jeśli } n=j\end{cases},$

(b) $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},$

(c) $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{n+i}{l}=(-1)^k\binom{n}{l-k},$

Wskazówki:

(a) 1 d) oraz 1 a);

(b) indukcja po $n$, 1 g), 1 a);

(c) indukcja po $n$, 3 a);