MD 4 Liczby podziału

4.1. Niech $M(n)$ oznacza największą wartość k, dla której wartość liczby Stirlinga $S(n,k)$ jest największa. Udowodnić, że albo

$$S(n,0) < S(n,1) < \ldots < S(n,M(n)) > S(n,M(n)+1) > \ldots > S(n,n)$$

albo

$$S(n,0) < S(n,1) < \ldots < S(n,M(n)-1) = S(n,M(n)) > \ldots > S(n,n)\ .$$

Pokazać ponadto, że $0 \leqslant M(n+1) - M(n) \leqslant 1$.

Wsk. Indukcja, wzory rekurencyjne na $S(n,k)$.

4.2. Oblicz a) $S(n,n-1)$, b) $S(n,2)$, c) $S(5,3)$.

4.3. Oblicz a) $P(n,2)$, b) $P(11,4)$.

4.4. Niech $n = b_1 + b_2 + \ldots + b_k$ będzie podziałem liczby n. Podziałem do niego **sprzężonym** nazywamy podział $n = b_1^* + b_2^* + \ldots b_l^*$, gdzie $b_i^* = |\{j :\ b_j \geqslant i\}| = \max\{j :\ b_j \geqslant i\}$. Podziałem *samosprzężonym* nazywamy podział, który jest równy swojemu podziałowi sprzężonemu. Pokazać, że liczba podziałów samosprzężonych liczby n jest równa liczbie podziałów liczby n na składniki nieparzyste parami różne. Wsk. Jak wyglądają diagramy Ferrersa podziałów samosprzężonych.

4.5. Pokazać, że liczba podziałów liczby n na składniki parami różne jest równa liczbie podziałów liczby n na składniki nieparzyste. Wsk. Każdą liczbę można przedstawić jednoznacznie jako iloczyn liczby nieparzystej i potęgi 2.

4.6. Ile jest **uporządkowanych podziałów liczby** n na k składników (tzn. ciągów $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ takich, że $b_1, b_2, \ldots, b_k > 0$ oraz $\sum_{i=1}^{k} b_i = n$).

4.7. Pokazać, że liczba rozkładów liczby n na nie więcej niż k składników jest równa liczbie rozkładów liczby $n + \frac{k(k+1)}{2}$ na k nierównych części.

4.8. Pokazać, że liczba rozkładów liczby n na składniki parzyste jest równa liczbie rozkładów, w których każda z liczb występuje parzystą liczbę razy.

4.9. Pokazać, że liczba rozkładów liczby n na składniki nieparzyste jest równa liczbie rozkładów liczby n, w których każdy składnik, poza największym występuje parzystą liczbę razy, zaś największy składnik występuje nieparzystą liczbę razy.

4.10. Pokazać, że $P(n,3)$ równa się liczbie rozkładów liczby $2n$, na trzy składniki, wszystkie mniejsze niż n.