MD 6 Funkcje tworzące

6.1 Na ile sposobów można wybrać 11 jabłek z koszyka, w którym jest 4 antonówki, 3 malinówki i 6 papierówek?

6.2 Pokazać, że

$$\binom{4m}{1} - \binom{4m}{3} + \binom{4m}{5} - \ldots - \binom{4m}{4m-1} = 0,$$

$$\binom{4m}{0} - \binom{4m}{2} + \binom{4m}{4} - \ldots + \binom{4m}{4m} = (-4)^m.$$

6.3 Znaleźć funkcje tworzące następujących ciągów:

a) $a(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \ldots, N, \\ 0, & n > N \end{cases},$

b) $a(n) = \begin{cases} n+1, & n = 0, 1, \ldots N, \\ 0, & n \geqslant N+1 \end{cases},$

c) $a(n) = \begin{cases} (n+1)(n+2), & n = 0, 1, \ldots N, \\ 0, & n \geqslant N+1 \end{cases},$

d) $a(n) = \alpha^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

e) $a(n) = \alpha n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

f) $a(n) = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

g) $a(n) = n^k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

h) $a(n) = n\alpha^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

i) $a(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{\alpha^n}{n}, & n > 0 \end{cases},$

j) $a(n) = \begin{cases} 0, & n = 0, \\ \frac{\alpha^n}{n!}, & n > 0 \end{cases},$

6.4 Znaleźć funkcję tworzącą $F(x)$ ciągu A_n wiedząc, że funkcją tworzącą ciągu a_n jest $f(x)$ oraz:

a) $A_n = a_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$

b) $A_n = a_{n+k}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $k \in \mathbb{N}^+$

c) $A_n = a_{n+1} - a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$

d) $A_n = n \cdot a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$

e) $A_n = \begin{cases} a_{n-1}, & n = 1, \ldots, \\ 0, & n = 0 \end{cases}$

6.5 W sklepie są 2 pary skarpetek białych, 3 niebieskich, 4 zielonych i 1 czarna. Na ile sposobów można kupić 1,2,...,10 par skarpetek?

6.6 Na ile sposobów można kupić 52 litrów soku jeśli są dostępne opakowania 1 litrowe, 2 litrowe oraz 4 litrowe.

6.7 Korzystając z metod funkcji tworzących podaj wzór na n-ty wyraz ciągu określonego rekurencyjnie:

a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$ $(n \geqslant 0)$, $a_0 = 1,\ a_1 = 2,$

b) $a_n = 6n + a_{n-1}$, $a_0 = 0,$

c) $a_n = a_{n-1} + 2^n$, $a_0 = 1.$

6.8 Na ile sposobów można szachownicę wymiaru n na 2 pokryć kostkami domina (wymiaru 2 na 1 - nie muszą do siebie pasować). A na ile sposobów szachownicę n na 3?

6.9 Jasio zbiega ze schodów, które mają n stopni. W każdym momencie Jasio może przeskoczyć na następny stopień lub ominąć jeden stopień. Na ile sposobów Jasio może zbiec ze schodów?

6.10 Wyznaczyć liczbę $S(n,3)$ rozwiązując równanie rekurencyjne.

6.11 Na ile sposobów można umieścić lwy w n klatkach, tak że w każdej klatce jest co najwyżej jeden lew i żadne dwie sąsiednie klatki nie są zajęte. Zakładamy że lwów mamy nieograniczoną ilość i przynajmniej jeden lew jest w klatce.

6.12 Udowodnić:

a) $F_{m+n} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}$, $m, n \geqslant 1$

b) $\sum_{i=0}^{n} F_i^2 = F_n \cdot F_{n+1},$

c) $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1}.$

6.13 Ile jest uporządkowanych trójek (A_1, A_2, A_3) takich, że $A_1, A_2, A_3 \subset [n]$ i $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = [n]$?